

فرآیندهای خود بازگشتی میانگین متحرک پیوسته با محرک نیمه لوی

نویسنده مدرسی^۱، سعید رضاخواه^{۲*}، شیرین شعاعی^۳

۱. دانشگاه علامه طباطبائی، دانشکده آمار، ریاضی و علوم کامپیوتر،

۲. دانشگاه صنعتی امیرکبیر، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر،

۳. دانشگاه شهید بهشتی، دانشکده علوم ریاضی، گروه بیم‌سنجی

پذیرش ۹۸/۱۰/۰۳

دریافت ۹۷/۰۲/۳۰

چکیده

مدل‌های خود بازگشتی میانگین متحرک زمان پیوسته (کارما) با محرک لوی با ویژگی ایستایی نموها دارای یک محدودیت قوی است و باعث ایستایی فرایند می‌شوند. در این مقاله با تعمیم فرایند کارما به حالتی که محرک فرایند نیمه لوی باشد زمینه‌ای ایجاد می‌شود که فرایند کارما یک فرایند دوره‌ای و لذا دارای کاربرد بسیار وسیع‌تر است. بر این اساس، ویژگی‌های آماری فرایند کارما با محرک نیمه لوی بررسی شده و با استفاده از داده‌های شبیه‌سازی شده در حالت گسسته، خواص آماری اثبات شده تأیید می‌شود.

واژه‌های کلیدی: اندازه نیمه لوی، فرایندهای دوره‌ای، مدل میانگین متحرک خود بازگشتی زمان پیوسته.

مقدمه

یکی از مدل‌های مشهور برای بررسی نمونه‌های مشاهده شده در فواصل مساوی از سری‌های زمانی ایستا، فرایندهای خودبازگشتی میانگین متحرک (آرما)^۱ است که بر حسب نویزهای مستقل و هم‌توزیع و یا نویزهای ایستا مدل‌بندی می‌شوند. بسیاری از سری‌های زمانی فیزیکی به‌طور پیوسته نسبت به زمان تحقق می‌یابند و دارای ساختار تغییرات پیوسته هستند از این‌رو، تعیین مدلی در زمان پیوسته برای بررسی این‌گونه سری‌های زمانی بسیار مناسب‌تر از مدل زمان گسسته است. برتری این مدل‌ها در استنباط و برآورد برای داده‌های با فرکانس بالا، مشاهدات قابل اندازه‌گیری در فواصل غیرمساوی و همچنین در زمانی که با داده‌های مفقود شده^۲ مواجه هستیم دارای اهمیت بیشتری است [۱]. این موارد از جمله دلایلی هستند که فرایندهای آرما^۳ زمان پیوسته (کارما) را بررسی می‌کنند. این مدل‌ها با اندازه لوی کلاسی از فرایندهای تجمعی و ایستای زمان پیوسته را تشکیل می‌دهند که تحقیقات چشم‌گیری در زمینه آنها انجام شده است. این فرایندها توان مدل‌بندی جهش‌ها و تلاطم‌های تصادفی را دارند، به‌همین دلیل در بررسی پدیده‌های طبیعی و بازارهای مالی به‌کار می‌روند. در حالت کلی فرایندهای کارما دارای تابع کواریانسی هستند که با افزایش فاصله بین مشاهدات به‌طور نمایی کاهش پیدا می‌کنند بنابراین حافظه کوتاه مدت دارند. در مقابل کلاس تعمیم یافته‌ای از این فرایندها به نام فرایندهای کارمای تفاضلی کسری^۴ وجود دارند که قادر به مدل‌بندی

rezakhah@aut.ac.ir

*نویسنده مسئول

1. Autoregressive moving average (ARMA)

2. Missing data

3. Continuous-time ARMA (CARMA)

4. Fractionally integrated CARMA

پدیده‌هایی با حافظه طولانی مدت هستند [۲]. این ویژگی اغلب در داده‌های مالی، اقتصادی و مخابراتی دیده می‌شوند. برای اولین بار براکول فرایندهای کارمای آستانه‌ای^۱ را معرفی کرد [۳]. این فرایندها جواب یکتای یک معادله دیفرانسیل تصادفی با ضرایب تکه‌ای خطی^۲ و لپشیتز هستند. این شرایط وجود و یکتایی جواب را تضمین می‌کند. بعد از آن براکول و اشترامر تقریبی از این فرایندها را برای مدل بندی لکه‌های خورشیدی به کار بردند [۴]. در این مقالات اندازه به کار رفته در معادلات دیفرانسیل تصادفی، حرکت براونی استاندارد است و در نتیجه جواب معادله یک فرایند کارمای گوسی است. این مدل‌ها در حالت خطی و غیرخطی برای مدل بندی سری‌های زمانی مالی نیز به کار گرفته می‌شدند [۴].

در بازارهای مالی تغییرات و جهش‌ها نقش مهمی را در مدل بندی قیمت گذاری دارایی و نوسانات بازار ایفا می‌کنند و همین موضوع باعث شده که در مدل بندی‌های مالی به ویژه در فرمول‌های قیمت گذاری اختیارات بلک-شولز^۳، مرتن^۴ و تعمیم آنها نیز از فرایندهای لوی استفاده شود [۶]، [۷]. فرایندهای لوی فرایندهای پیوسته تصادفی با نهموهای مستقل و ایستا هستند که در هر نقطه از راست پیوسته و دارای حد چپ است. این فرایندها، مارکفی و تغییرات جهشی را در بر می‌گیرند بنابراین در مدل‌های قیمت گذاری سهام، تعیین تلاطم بازار، مدیریت ریسک و نرخ بازگشت سرمایه نیز به کار می‌روند. مثال‌های متعددی از مدل‌های زمان پیوسته و کاربردهای آن در اقتصادسنجی و مالی وجود دارند که برای بررسی آنها می‌توان به کتاب برگستروم [۸] و [۹] مراجعه کرد.

برای اولین بار براکول مدل‌های زمان پیوسته آرما با اندازه لوی مرتبه دوم را معرفی کرد و ویژگی‌های آنها را بررسی کرد [۱۰]. کاربرد کلاسی از این مدل‌ها را در تلاطم‌های تصادفی برنردف-نیلسن و شفارد در [۱۱] به طور مفصل بیان کردند. در این راستا فرایندهای ایستای اورنشتاین-اولنک با اندازه لوی و تعمیمی از آنها برای مدل بندی نوسانات تصادفی^۵ معرفی شدند [۱۲]. در ارتباط با ویژگی‌های آماری این مدل‌ها، از جمله سببیت و معکوس پذیری باید شرایط خاصی روی ضرایب مدل وجود داشته باشد تا نمایش میانگین متحرک یا نمایش خطی از این مدل‌ها موجود باشند [۱۳]. در این مرجع هسته‌ها و توابع خودهم بستگی و رفتار حدی آنها نیز بررسی شده است. مدل بسط داده شده و مدل کارمای مرتبه p و q با اندازه لوی چندمتغیره با استفاده از نمایش فضا-حالت^۶ و نمایش طیفی آنها بررسی شده است [۱۴]. براکول و همکارانش در سال‌های اخیر مدل‌های کارمای برای برازش داده‌های با فواصل یکنواخت در نظر گرفتند و نتایج خود را برای مدل فرایند مدل در مورد نوسانات روزانه قیمت تغییرات ارز بررسی و تحلیل کردند [۱۵]. آنها ابتدا برآوردهای مناسبی برای پارامترهای فرآیند مدل زمان پیوسته خود بازگشتی مرتبه اول به دست آورده و سپس روش برآورد ضرایب مدل کارمای در حالت کلی را ارائه دادند. برای این کار ابتدا فرایند نمونه‌گیری شده در نقاط گسسته با فواصل مساوی را در نظر گرفته و از این فرض که هر فرایند کارمای می‌توان به صورت مجموعی از فرایندهای مستقل زمان پیوسته خود بازگشتی مرتبه اول نوشت، کمک گرفتند و در نهایت با کمک روش‌های بازگشتی کالمن^۷ و با استفاده از نمایش فضا-حالت، پارامترها را برآورد کردند. هم‌چنین با فرض این که فرایند کارمای با اندازه لوی از مرتبه دوم

1. Threshold CARMA
2. Linear piecewise
3. Black-Scholes option pricing
4. Merton
5. Stochastic volatility
6. State-space representation
7. Kalman recursion

سببی و ایستای اکید باشد، پیش‌بینی کننده‌های خطی^۱ با کم‌ترین مربعات خطا^۲ را به‌صورت امید شرطی به شرط گذشته فرایند را برای پیش‌بینی این مدل‌ها به‌کار گرفتند [۱۶].

فرایندهای تصادفی کارما معرفی شده تاکنون ایستا یا به‌طور مجانبی ایستا بوده‌اند. در این مقاله به‌منظور پوشش پدیده‌هایی که ماهیتاً نایستا هستند خانواده‌ای از فرایندهای کارما با اندازه نیمه لوی^۳ با هسته نامفی را که رفتار ایستای دوره‌ای دارند معرفی می‌کنیم. فرایندهای نیمه لوی تمامی ویژگی‌های فرایندهای لوی را دارند با این تفاوت که نمونه‌های آنها ایستای دوره‌ای هستند. برای معرفی مدل، ابتدا ساختار اندازه نیمه لوی ساده^۴ را بیان می‌کنیم. برای این کار محور مثبت اعداد حقیقی را به زیربازه‌هایی با طول ثابت به‌عنوان فواصل دوره‌ای متوالی تقسیم کرده و سپس هر یک را به تعدادی مشخص زیربازه با طول‌های معین افراز می‌کنیم. این تقسیم‌بندی به‌نحوی است که در زیربازه‌های هر دوره، نرخ رخداد پواسن متفاوت ولی در زیربازه‌های متناظر از فواصل دوره‌ای متوالی نرخ رخداد پواسن یک‌سان است، از این‌رو، فرآیند رخداد پواسن دارای نمونه‌های ایستای دوره‌ای می‌شود. توزیع بزرگی جهش‌ها در همه زیربازه‌ها یک‌سان منظور می‌شوند. بنابراین فرایند پواسن مرکب ناهمگن حاصل، دارای نمونه‌های ایستای دوره‌ای است. میانگین و تابع کواریانس مدل کارما با اندازه نیمه لوی حاصل را به‌دست آورده و نشان می‌دهیم که رفتار دوره‌ای دارند و درستی نتایج به‌دست آمده را با تکنیک‌های شبیه‌سازی بررسی می‌کنیم.

با توجه به این حقیقت که هر فرایند ایستای دوره‌ای در حالت گسسته متناظر یک فرایند چندبعدی ایستا است [۱۷]، ایستایی فرایند چندبعدی متناظر را مورد آزمون قرار داده و ویژگی ایستای دوره‌ای بودن فرایند معرفی شده را نتیجه‌گیری می‌کنیم. با استفاده از یک مثال، رسم هم‌بستگی نگار فرایندها و رسم نمودار جعبه‌ای مربوط به آنها نشان می‌دهیم که این فرایندها هرکدام ایستا ولی دارای میانگین و واریانس متفاوت هستند، از این‌رو، توزیع احتمالی آنها متفاوت است. با رسم هم‌بستگی نگارهای متقابل و مشاهده ایستایی آنها نتیجه می‌شود که تشکیل یک فرایند چند بعدی ایستا می‌دهند که دارای توزیع‌های متفاوتی هستند، از این‌رو، فرآیند اولیه دارای ویژگی وابستگی دوره‌ای است. هم‌چنین با رسم هم‌بستگی نگار فرآیند دوره‌ای اصلی برحسب فاصله بین داده‌ها مشاهده می‌شود که رفتار دوره‌ای نسبت به این فاصله وجود دارد که بیان‌گر وابستگی دوره‌ای اکید سری زمانی کارما با اندازه نیمه لوی متناظر است.

این مقاله به‌صورت زیر تقسیم‌بندی شده است. در بخش دوم به توصیف و معرفی مدل کارما با اندازه نیمه لوی می‌پردازیم و ساختار اندازه نیمه لوی ساده را بیان می‌کنیم. سپس با تعیین ویژگی‌های آماری فرایند از جمله ساختار دوره‌ای میانگین و کواریانس، رفتار دوره‌ای فرایند نتیجه می‌شود. بخش سوم به شبیه‌سازی فرایند براساس مثالی ساده از فرایند کارما با اندازه نیمه لوی ساده پواسن مرکب ناهمگن اختصاص دارد. رفتار دوره‌ای فرایند کارما با محرک نیمه لوی معرفی شده را با نشان دادن ویژگی ایستایی فرایند چندبعدی متناظر نشان می‌دهیم. علاوه بر این تابع هم‌بستگی نگار فرآیند اصلی را برحسب فاصله بین مشاهدات رسم می‌کنیم که نشان می‌دهد نسبت به این فاصله رفتار دوره‌ای دارد که بیان‌گر ایستایی دوره‌ای اکید فرآیند است.

معرفی فرایند کارما با اندازه نیمه لوی

در این بخش فرایند کارما با اندازه نیمه لوی را معرفی کرده و به تبیین ساختار اندازه آن می‌پردازیم. هم‌چنین با در نظر گرفتن شرایطی بر پارامترهای مدل، نمایش انتگرالی میانگین متحرک جواب را برحسب اندازه نیمه لوی به‌دست

1. Linear predictor
2. Least square error
3. Semi-Levy driven CARMA model
4. Simple semi-Levy

می‌آوریم. کلاس بزرگی از فرایندهای تصادفی، فرایندهایی هستند که دارای نمونه‌های ایستا و مستقل هستند. این فرایندها دارای انعطاف پذیری بیش‌تری بوده است و این ویژگی آنها سبب می‌شود که بتوانیم توزیع‌های با بعد متناهی آنها را تعیین کنیم. به فرایندهایی که از صفر آغاز شده، به‌طور تصادفی پیوسته، دارای نمونه‌های مستقل و ایستا و مسیرهای نمونه‌ای آنها از راست پیوسته و دارای حد چپ هستند فرایندهای لوی گفته می‌شوند که یکی از مشهورترین این فرایندها حرکت براونی است. اگر این فرایندها به‌جای نمونه‌های ایستا دارای نمونه‌های ایستای دوره‌ای باشند به آنها فرایندهای نیمه لوی گویند. به‌عبارت دیگر کلاسی از فرایندهای سازگار $\{X(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ را با این ویژگی که به‌ازای هر $T > 0$ و $s, t \geq 0$ داشته باشیم $X_{t+T} - X_{s+T} \stackrel{d}{=} X_t - X_s$ بیان‌گر برابری توزیعی است؛ را فرایند نیمه لوی با دوره T گویند.

فرض کنید $\{S(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ یک فرایند مرتبه دوم نیمه لوی نامنفی نازولی و $\{Y(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ یک فرایند کارما از مرتبه p و q با اندازه نیمه لوی و جواب معادله دیفرانسیل تصادفی (۱) باشد.

$$a(D)Y(t) = b(D)DS(t) \quad (1)$$

به‌طوری‌که D بیان‌گر مشتق نسبت به t و $a(z) = z^p + a_1 z^{p-1} + \dots + a_p$ و $b(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_{p-1} z^{p-1}$ چندجمله‌ای‌های مشخصه آنها باشند. a_1, \dots, a_p و b_1, \dots, b_q پارامترهای ضرایب هستند به‌طوری‌که $b_q = 1$ و به‌ازای $b_j = 0$ ، $q < j < p$. هم‌چنین فرض می‌کنیم چندجمله‌ای‌های $a(z)$ و $b(z)$ ریشه‌های مشترک نداشته باشند. معادله مذکور را می‌توان بدین‌صورت نمایش فضا-حالت نوشت:

$$Y(t) = b' X(t) \quad (2)$$

$$dX(t) - AX(t)dt = edS(t) \quad (3)$$

به‌طوری‌که $A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -a_p & a \end{bmatrix}$ ، e بردار ستونی یکه، b بردار ستونی‌ای که درایه‌های آن ضرایب چندجمله‌ای مشخصه $b(z)$ و a بردار سطری $[-a_{p-1} \quad -a_{p-2} \quad \dots \quad -a_1]$ است. با کمک فرمول ایتو جواب معادله دیفرانسیل تصادفی مذکور بدین‌صورت به‌دست می‌آید:

$$X(t) = e^{A(t-s)} X(s) + \int_s^t e^{A(t-u)} edS(u) \quad (4)$$

با توجه به رابطه (۴) و این‌که فرایند S دارای نمونه‌های مستقل است، مشابه حالتی که جواب ایستا است، می‌توان به‌سادگی نشان داد که فرایند X مارکف است.

۱. ساختار اندازه نیمه لوی

بر اساس تجزیه مشهور لوی-ایتو هر فرایند لوی را می‌توان به‌صورت مجموع سه فرایند لوی از جمله حرکت براونی، فرایند پواسون مرکب و یک مارتینگل انتگرال‌پذیر مرتبه دوم نوشت که اندازه جهش‌های آن کم‌تر از یک و تعداد جهش‌ها با احتمال یک شمارا باشند. با توجه به این‌که شناسایی وجود یک فرایند نیمه لوی در طبیعت براساس ساختار تقریبی نیمه لوی متناظر است، یک اندازه نیمه لوی ساده را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

تعریف ۱: اندازه تصادفی $\{M(A) : A \in \mathbb{R}\}$ را یک اندازه نیمه لوی ساده با دوره T گویند هرگاه افزای مانند $B_i = (s_{i-1}, s_i]$ که $i \in \mathbb{N}$ ، بر محور اعداد حقیقی وجود داشته باشد، به‌طوری‌که $s_0 = 0$ و به‌ازای مقادیر ثابت

$r \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $T = \sum_{i=1}^r |B_i|$ هم‌چنین برای هر B_i اندازه لوی M_i وجود داشته باشد به طوری که M_{i+kr} ، $k \in \mathbb{Z}$ بر B_{i+kr} همان ساختار توزیعی را داشته باشد که M_i بر B_i دارد.

اگر M_i یک اندازه پواسون نیمه لوی ساده با نرخ λ_i روی B_i باشد به طوری که $\lambda_{i+kr} = \lambda_i$ آنگاه

$$M(0, kT + s) = \sum_{i=1}^{kr+j-1} M_i(s_{i-1}, s_i] + M_{kr+j}(s_{j-1}, s]$$

یک اندازه پواسون نیمه لوی ساده با دور GT نامیده می‌شود. بنابراین با فرض این که $t = kT + s$ و $s \in B_j$ داریم $N(t) = M(0, t]$ یک فرایند پواسون نیمه لوی با پارامتر

$$\Lambda_t = (k-1) \sum_{i=1}^r \lambda_i + \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i + \frac{\lambda_j l_j^s}{l_j} \quad (5)$$

است که دارای نمونه‌های دوره‌ای است. لازم به توضیح است که k تعداد دوره‌ها، $r \in \mathbb{N}$ ، $l_j = |B_j|$ و به‌ازای $j = 1, \dots, r$ داریم $l_j^s = s - s_{j-1}$. بنابراین اندازه نیمه لوی پواسون مرکب $S(t)$ را به صورت (۶) تعریف می‌کنیم:

$$S(t) = \gamma t + \sum_{n=1}^{N(t)} J_n \quad (6)$$

که در آن $\gamma \in \mathbb{R}^+$ ، $N(t)$ یک فرایند پواسون نیمه لوی با پارامتر Λ_t با دوره T و با افراز مطرح شده در تعریف ۱ باشد. هم‌چنین جهش‌های J_n متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یک‌سان F در زمان n امین رخداد فرآیند پواسون $N(t)$ فرض شده‌اند.

۲. بررسی ویژگی‌های فرایند

چنان‌که بیان شد فرایند کارما با اندازه نیمه لوی جواب یک معادله دیفرانسیل تصادفی است که ویژگی‌های احتمالی آن را تحلیل و بررسی قرار می‌کنیم. بدین منظور شرایطی را در نظر می‌گیریم تا نمایش انتگرالی جواب که یک فرایند تصادفی است به صورت رابطه‌ای یک به یک موجود باشد. برای بررسی جواب‌ها فرض می‌کنیم این شرایط برقرار باشند:

۱. به‌ازای هر $t \in \mathbb{R}^+$ ، متغیرهای $X(t)$ از $\{S(r) - S(t), r > t\}$ مستقل‌اند.

۲. قسمت‌های حقیقی مقادیر ویژه ماتریس A منفی فرض می‌شوند که در این صورت $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = 0$ و برعکس.

اگر شرایط مذکور برقرار باشند، جواب (۴) با میل دادن $s \rightarrow -\infty$ و با فرض این که S یک اندازه نیمه لوی باشد به نمایش میانگین متحرک زیر همگرا می‌شود

$$X(t) = \int_{-\infty}^t e^{A(t-u)} edS(u) \quad (7)$$

پس از به‌دست آوردن $X(t)$ و با کمک رابطه (۲) می‌توان $Y(t)$ را به صورت $Y(t) = \int_{-\infty}^t f(t-u) dS(u)$ نمایش

داد که در آن $f(t) = b' e^{At} eI_{[0, \infty)}(t)$ هسته فرایند کارمای $Y(t)$ است و چون شرط ۱ برقرار است فرایند، تابعی سببی از S است.

با استفاده از ویژگی‌های امید ریاضی و واریانس و هم‌چنین برابری والد، بر اساس رابطه (۶) امید ریاضی و واریانس اندازه نیمه لوی را بدین صورت به‌دست می‌آوریم:

$$E[S(t)] = \gamma t + \kappa \Lambda_t \quad (۹)$$

$$\text{Var}[S(t)] = \beta \Lambda_t \quad (۱۰)$$

$$\text{که در آن } E[N(t)] = \Lambda_t \text{ و } E[J_n^2] = \beta, E[J_n] = \kappa$$

برای پیدا کردن ویژگی‌های مدل معرفی شده بر اساس نمایش (۷)، ابتدا میانگین و کواریانس فرایند را برای مدل جدید معرفی شده به دست می‌آوریم. برای این منظور ابتدا محور حقیقی را به زیربازه‌های $B_i = (s_{i-1}, s_i]$ افراز می‌کنیم که در آن $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{kT+j-1} \leq s_{kT+j} = t$ و هم‌چنین فرض می‌کنیم $t = kT + s$ نقطه‌ای در زیربازه B_{kT+j} باشد. در این صورت با خاصیت جمع‌پذیری انتگرال می‌توان $X(t)$ را بدین صورت نوشت:

$$X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(k-n)T+s}^{(k-n+1)T+s} e^{A(t-u)} e dS(u) = \lim_{d \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^d \sum_{i=1}^r e^{At} \int_{(k-n)T+s_{j-i-2}}^{(k-n+1)T+s_{j-i-1}} e^{-Au} e dS(u) + e^{At} \int_{kT+s_{j-1}}^{kT+s} e^{-Au} dS(u).$$

با توجه به خاصیت خطی بودن امید ریاضی کافیسست $E[dS(t)]$ را با این فرض که $u, u+du \in B_j$ و با کمک رابطه (۵) محاسبه کنیم.

$$\begin{aligned} E[dS(t)] &= E[S(u+du)] - E[S(u)] = \gamma(u+du) + \kappa \Lambda_{u+du} - \gamma u - \kappa \Lambda_u \\ &= \gamma du + \kappa(\Lambda_{u+du} - \Lambda_u) = \gamma du + \kappa \lambda_j du = (\gamma + \kappa \lambda_j) du \end{aligned}$$

بنابراین امید ریاضی فرایند به صورت رابطه (۱۱) حاصل می‌شود

$$E[X(t)] = -A^{-1} e^{As} \left[\frac{I}{I - e^{AT}} \sum_{i=0}^{j-1} (\gamma + \kappa \lambda_i) (e^{-As_{j-i-1}} - e^{-As_{j-i-2}}) + (\gamma + \kappa \lambda_j) (e^{-As} - e^{-As_{j-1}}) \right] e \quad (۱۱)$$

که در آن I ماتریس همانی و e یک بردار ستونی واحد هستند.

لم ۱. امید ریاضی فرایند $X(t)$ دوره‌ای با دوره T است.

اثبات: با توجه به مفروضات مدل به سادگی می‌توان با تبدیل s به $s+T$ در رابطه (۱۱) برابری $E[X(t+T)] = E[X(t)]$ را نشان داد.

برای به دست آوردن کواریانس فرایند بدون آن که به کلیت مسئله خللی وارد شود کافی است فرض کنیم h مقداری بسیار کوچک و $t, t+h \in B_{kr+j}$ در این صورت داریم:

$$\text{Cov}(X(t), X(t+h)) = \beta e^{As} \left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{AnT} \left(\sum_{i=0}^{j-1} \int_{s_{j-i-2}}^{s_{j-i-1}} e^{-Au} e e' e^{-A'u} du \right) e^{A'nT} + \int_{s_{j-1}}^s e^{-Au} e e' e^{-A'u} du \right] e^{A's} e^{A'h}. \quad (۱۲)$$

لم ۲. کواریانس فرایند $X(t)$ دوره‌ای با دوره T است.

اثبات: با توجه به مفروضات مدل به سادگی می‌توان با تبدیل s به $s+T$ در رابطه (۱۱) برابری $\text{cov}(X(t+T), X(t+h+T)) = \text{cov}(X(t), X(t+h))$ را نشان داد.

با توجه به دوره‌ای بودن توابع میانگین و کواریانس می‌توان نتیجه گرفت که $\{Y(t), t \geq 0\}$ که ترکیبی خطی از $X(t)$ است، یک فرایند کارما با اندازه نیمه لوی ساده و ایستای دوره‌ای با دوره T است.

در بخش بعد ابتدا الگوریتم شبیه‌سازی اندازه نیمه لوی ساده و سپس فرایند کارما تحت این محرک را بیان کرده و با بیان مثالی به بررسی خواص مدل می‌پردازیم.

شبیه‌سازی

در این بخش درستی نتایج تئوری ارائه شده در بخش‌های قبل مبنی بر این که فرایند زمان پیوسته دارای وابستگی دوره‌ای است را به کمک شبیه‌سازی نشان می‌دهیم. بدین منظور از روش گسسته‌سازی با محاسبه مقدار تجمعی فرآیند روی زیربازه‌های مجزا و یک‌سان از دوره‌های متوالی با طول ثابت استفاده می‌کنیم. سپس نشان می‌دهیم که فرایند تجمعی حاصل یک فرایند ایستای دوره‌ای زمان گسسته است. بنابراین ابتدا یک فرایند کارما زمان پیوسته را با استفاده از اندازه نیمه لوی شبیه‌سازی می‌کنیم. برای این منظور فواصل دوره‌ای را به صورت $((j-1)T, jT)$ که j یک عدد طبیعی و نمایان‌گر شماره دوره است؛ در نظر می‌گیریم. دوره اول به وسیله I زیربازه متمایز به صورت B_1, B_2, \dots, B_r افراز می‌شود که طول آنها با $|B_i|$ ، $i = 1, \dots, r$ نشان داده می‌شود. سایر دوره‌ها را با افزاهایی به همین تعداد و با همین طول‌ها تقسیم‌بندی می‌کنیم. شماره‌های افراز کل دوره شبیه‌سازی شده را به ترتیب از شماره یک در نظر می‌گیریم. سپس در مورد طول اعضای افراز برای هر عدد طبیعی j داریم که $|B_i| = |B_{i+jr}|$. همچنین این فرایند در عضوهای افراز B_i و B_{i+jr} دارای نرخ رخداد یکسان λ_i هستند. حال برای تولید اندازه نیمه لوی ساده $S(t)$ بدین صورت عمل می‌کنیم.

- طول هر دوره را با یک مقدار حقیقی مثبت T و تعداد دوره‌های بررسی شده k را که برای شبیه‌سازی اندازه نیمه لوی $S(t)$ لازمند مشخص می‌کنیم.
 - تعداد زیربازه‌های مربوط به هر دوره I را مشخص می‌کنیم و این زیربازه‌ها را اعضای افراز می‌نامیم.
 - طول همه اعضای افراز یعنی $|B_i|$ ها را با در نظر گرفتن برابری $|B_i| = |B_{i+kr}|$ مشخص می‌کنیم.
 - برای هر عضو افراز B_i یک توزیع پواسن با نرخ رخداد λ_i را در واحد زمان که $\lambda_i = \lambda_{i+jr}$ در نظر می‌گیریم.
 - بر اساس نرخ رخداد λ_i از توزیع پواسن برای هر عضو افراز B_i عددی تصادفی تولید می‌کنیم.
 - برای هر عضو افراز B_i به تعداد عدد تصادفی تولید شده در قسمت ۵ اعداد تصادفی از توزیع یکنواخت پیوسته بر روی بازه (L_{i-1}, L_i) ، که L_i بیان‌گر مجموع طول اعضای افراز از عضو شماره یک تا شماره i است، تولید می‌کنیم. این اعداد تصادفی بیان‌گر موضع وقوع جهش‌های تصادفی و مقادیر حاصل شده به‌عنوان موضع رخدادهای فرآیند پواسن در آن عضو افراز خواهد است.
 - در نهایت با توجه به این که $\gamma \in R$ مقدار ثابت و J_k ها متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با تابع توزیع F هستند $S(t)$ را با استفاده از رابطه (۶) به دست می‌آوریم.
- بنابراین با کمک از روابط (۲) و (۳) و با استفاده از اندازه نیمه لوی $S(t)$ ساخته شده می‌توان فرایند کارما را تولید کرد. ساختار الگوریتمی تولید فرایند کارما بدین صورت است:
- مقادیر p و q را تعیین می‌کنیم.
 - مطابق ساختار و شرایط $a(z)$ در رابطه (۱) که چندجمله‌ای $a(z)$ دارای ریشه‌هایی با بخش‌های حقیقی مثبت است، پارامترهای a_1, a_2, \dots, a_p را محاسبه می‌کنیم.
 - با استفاده از مقادیر a_1, a_2, \dots, a_p ماتریس A ارائه شده پس از رابطه (۳) را می‌سازیم.
 - مقادیر b_1, b_2, \dots, b_p را تعیین می‌کنیم.
 - با استفاده از رابطه (۳) و ساختار $S(t)$ بیان شده، $X(t)$ را بر اساس گسسته‌سازی به‌وسیله بازه‌های کوچک با طول‌های مساوی به دست می‌آوریم.
 - در نهایت با استفاده از $X(t)$ و مقادیر معین شده b_1, b_2, \dots, b_p و رابطه (۲) فرایند کارما مورد نظر تولید می‌شود.

مثال: برای بررسی این مدل، ابتدا یک نمونه از فرایند کارما را با استفاده از الگوریتم‌های شرح داده شده قبل تولید می‌کنیم. برای این منظور، پارامترهای $S(t)$ را به صورت $x=7$ ، $k=4$ و مقادیر بردار $[2, 2, 2, 1, 1, 2]$ را به عنوان طول‌های متناظر اعضای افزای B_i در هر دوره در نظر می‌گیریم. همچنین مقادیر بردار $[7, 5, 3, 11, 5, 9, 13]$ را به عنوان نرخ رخدادهای پواسن متناظر λ_i برای این اعضای افزای مشخص می‌کنیم. همچنین J_k ها را به عنوان دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع نرمال با میانگین ۳ و واریانس ۱ در نظر می‌گیریم.

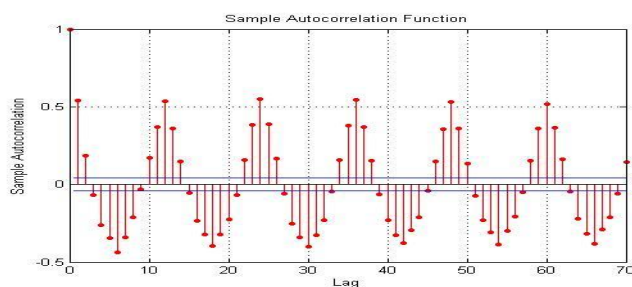
در این مثال، مدل کارما از مرتبه‌های ۴ و ۲ را شبیه‌سازی می‌کنیم. بنابراین با توجه به ساختار $a(Z)$ ، ریشه‌های آن را به صورت $Z_1 = -1$ ، $Z_2 = -2$ ، $Z_3 = -2 - i$ و $Z_4 = -2 + i$ در نظر می‌گیریم. در نتیجه مقادیر پارامترهای a_1, a_2, a_3, a_4 به صورت ۷، ۱۹، ۲۳ و ۱۰ حاصل شوند و ماتریس A بدین صورت است:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -10 & -23 & -19 & -7 \end{bmatrix}$$

با استفاده از ساختار $S(t)$ و حل معادله (۳)، $X(t)$ به دست می‌آید. در نهایت با استفاده از رابطه (۲) و مقادیر پارامترهای $b_1 = 0.5$ ، $b_2 = 1$ ، $b_3 = 0$ و $b_4 = 0$ مدل کارما از مرتبه‌های ۴ و ۲ به دست می‌آید.

در ادامه شبیه‌سازی برای بررسی ویژگی‌های بیان شده این مدل، روش زیر را به کار می‌بریم.

با توجه به مثال و این که تعداد دوره‌ها را $k=4$ در نظر گرفتیم، یک مجموعه داده کامل $Y(t)$ برای اندازه نیمه لوی مربوط به فرایند کارما از مرتبه‌های ۴ و ۲ تولید می‌کنیم. سپس برای نشان دادن این که خروجی مدل یک فرایند ایستای دوره‌ای پیوسته است؛ کافی است نشان دهیم فرایند گسسته تولید شده به وسیله این فرایند براساس مقادیر نمونه‌گیری شده در فواصلی با طول مساوی تشکیل یک فرایند ایستای چند متغیره گسسته می‌دهد. نقاط نمونه‌گیری به فاصله یک از کل فرایند در نظر گرفته می‌شود و اندازه فرایند را در نقاط نمونه‌گیری شده به عنوان فرایند گسسته جدید در نظر می‌گیریم. اکنون براساس نتایج تئوری باید نشان دهیم که این فرایند گسسته تشکیل یک فرایند ایستای چندمتغیره گسسته می‌دهد. با توجه به فرضیات شبیه‌سازی و این که $B_i = [2, 2, 2, 1, 1, 2]$ نتیجه می‌شود که مشاهدات فرایند گسسته به طول یک باید تشکیل فرایند ایستای دوره‌ای با دوره ۱۲ را بدهد. شکل ۱، نمودار هم‌بستگی نگار فرایند است که رفتار دوره‌ای تابع هم‌بستگی نگار با تکرار ساختار وابستگی‌ها در فواصل ۱۲ را به وضوح نشان می‌دهد. این مطلب خود بیان گر وابستگی دوره‌ای اکید توابع خودهم‌بستگی است.



شکل ۱. نمودار هم‌بستگی نگار فرایند

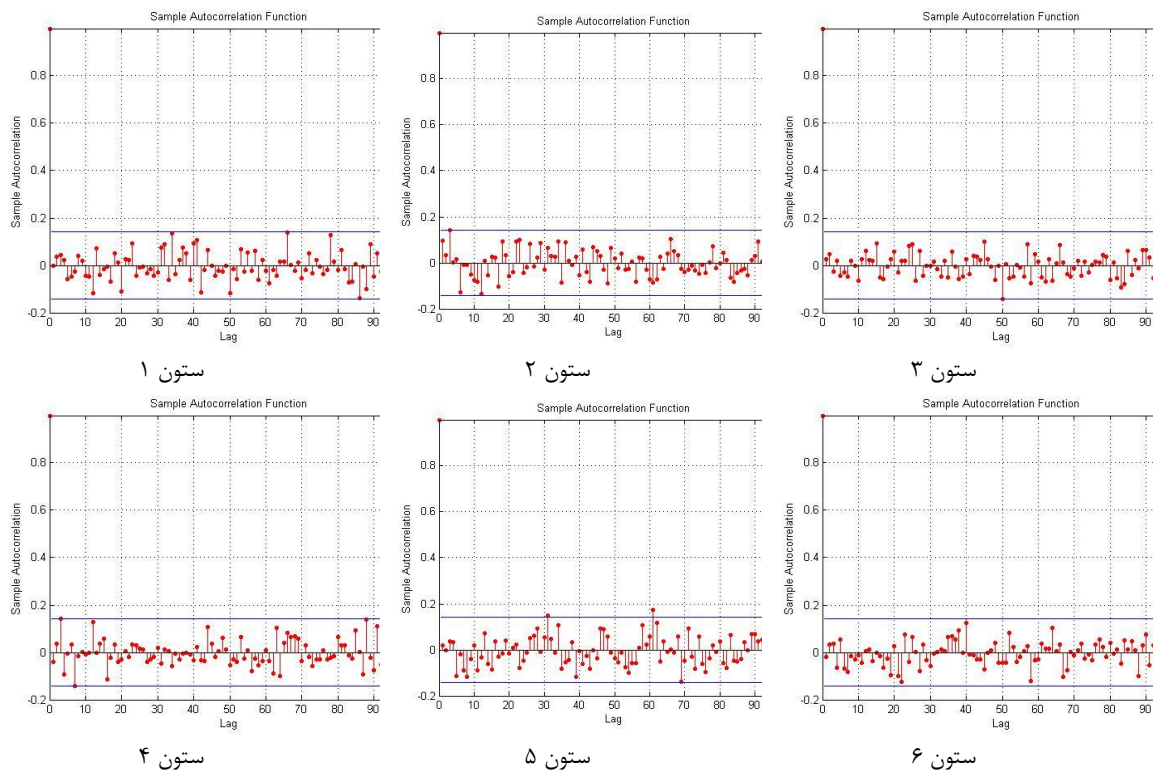
بنابراین فرایند چندمتغیره ایستا را می توان بر این اساس تشکیل داد و ایستایی این فرایند چندمتغیره را آزمود. برای این منظور هر دوره به طول ۱۲ که به ۱۲ قسمت به طول ۱ تقسیم شده است، مشاهدات زیربازه اول، زیربازه دوم تا زیربازه دوازدهم را نشان داده و تشکیل یک فرایند ۱۲ متغیره ایستا می دهد. پس ۱۲ فرایند ایستای تک متغیره داریم که این ویژگی ایستایی آنها آزمایش می شود. حال نشان می دهیم که وابستگی متقابل این ۱۲ فرایند نیز ایستا است. برای انجام این آزمون ۳ مرحله زیر اجرا می شود.

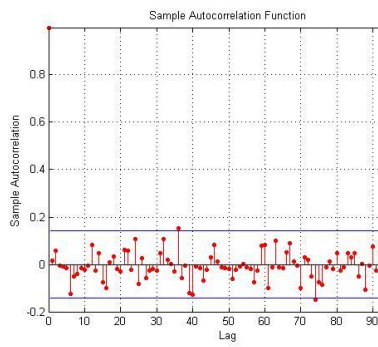
۱. همبستگی نگار تک تک این ۱۲ فرایند در شکل ۲ ترسیم شده است، که نشان می دهد این ۱۲ فرایند از نظر ساختار همبستگی ایستا است.

۲. همبستگی نگار متقابل این ۱۲ فرایند به صورت دوبه دو و به ترتیب هر کدام با شماره بعدی در شکل ۳ رسم شده است و مشاهده می شود که تمام مقادیر در بازه صفر قرار دارند، از این رو، همبستگی متقابل این ۱۲ فرایند دارای ساختار ایستایی است.

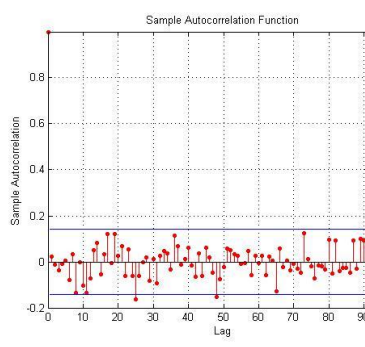
۳. در شکل ۴ نمودار جعبه ای تک تک این فرایندها برای ۱۰۰۰ دوره ارایه می شود که بیان گر ایستایی تک تک فرایندها در میانگین و واریانس است و در ضمن میانگین و واریانسها متفاوت هستند، از این رو، فرآیند اصلی در میانگین و واریانس رفتار دوره ای دارد.

پس نتایج تئوری بدین وسیله تأیید می شود و خروجی مدل یک فرایند ایستای دوره ای است.

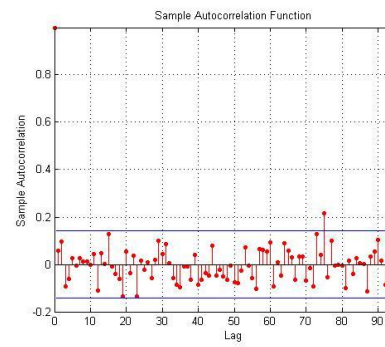




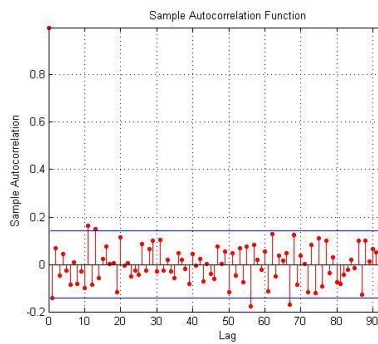
ستون ۷



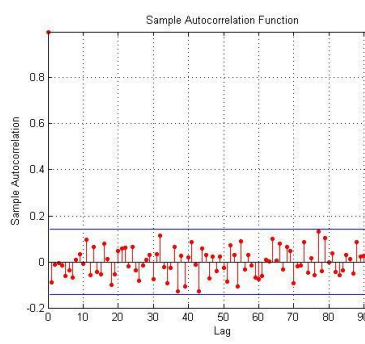
ستون ۸



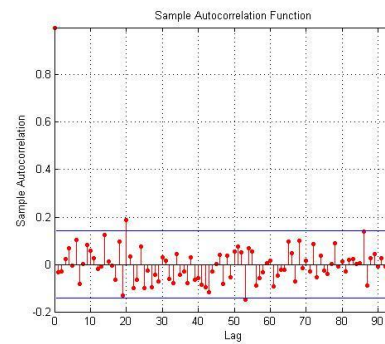
ستون ۹



ستون ۱۰

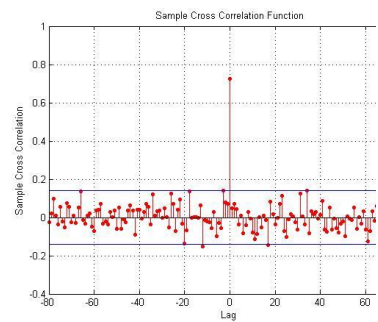


ستون ۱۱

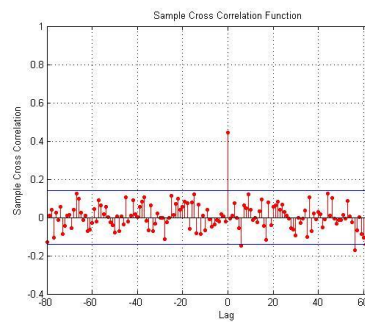


ستون ۱۲

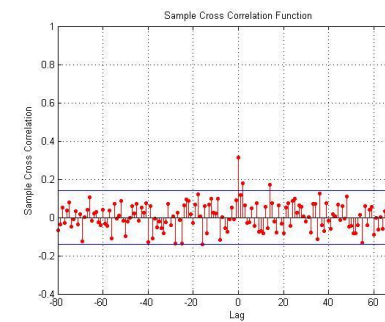
شکل ۲. هم‌بستگی نگار تک تک این ۱۲ فرایند



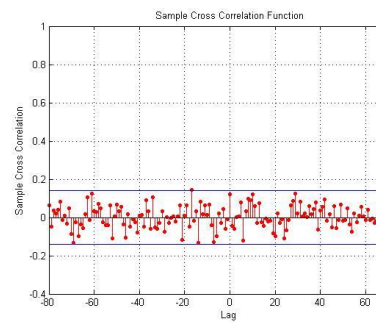
Crosscorr1&2



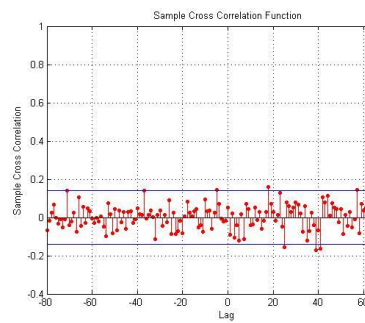
Crosscorr2&3



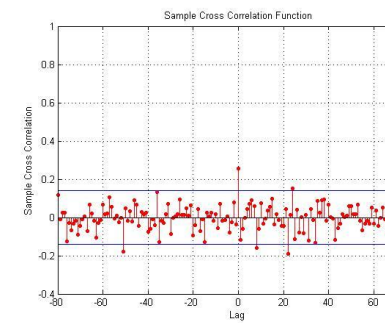
Crosscorr3&4



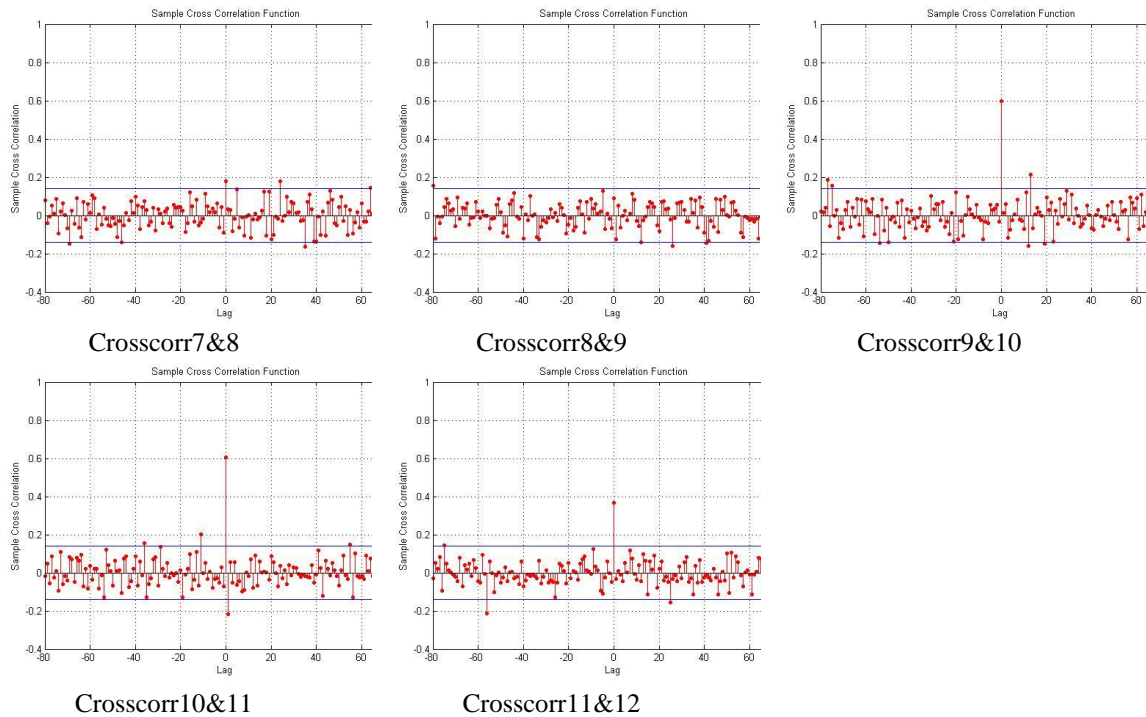
Crosscorr4&5



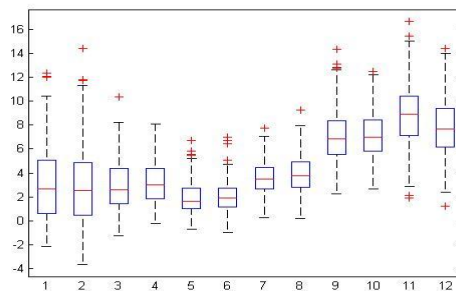
Crosscorr5&6



Crosscorr6&7



شکل ۳. هم‌بستگی نگار متقابل ۱۲ فرایند



شکل ۴. نمودار جعبه‌ای تک تک ۱۲ فرایند ایستای متناظر در فواصل دوره ای متوالی

نتیجه‌گیری و گسترش

در این مقاله به بررسی ویژگی‌های فرایند کارما با اندازه نیمه لوی براساس تقریب به‌وسیله یک اندازه نیمه لوی ساده پرداختیم. نشان دادیم که گشتاورهای اول و دوم این فرایند ایستای دوره‌ای هستند. با شبیه‌سازی اندازه نیمه لوی و با کمک نمایش فضا-حالت مدل، فرایند کارما را شبیه‌سازی کرده و ویژگی ایستای دوره‌ای بودن نشان داده شد. با توجه به ویژگی ایستای دوره‌ای فرایند با برآورد پارامترهای مدل می‌توان این مدل را برای داده‌های واقعی با اندازه‌های نیمه لوی به کار برد و براساس نتایج این مقاله ساختار تغییرات فرایند را با هر تقریب دلخواه به‌دست آورد. این مقاله به شرایطی که نرخ رخداد لحظه‌ای جهش‌ها در فرایند نیمه لوی لزوماً بر بازه‌ها دارای مقادیر ثابت نیست؛ بلکه صرفاً دارای رفتار دوره‌ای است، یعنی $\lambda_{t+u} = \lambda_u$ (که نرخ رخداد در بازه $(0, T]$ به صورت $\Lambda_T = \int_0^T \lambda_u du$ است)، قابل تعمیم است. علاوه بر این در مورد توزیع پرش‌ها تبیین ساختاری که بیان‌گر رفتار دوره‌ای توزیع پرش‌ها بدون محدودیت توزیع یک‌سان روی اعضای یک افراز باشد، زمینه دیگری برای تعمیم مقاله است.

منابع

1. Stelzer R., "CARMA processes driven by non-Gaussian noise", TUM-IAS Primary Sources-Essays in Technology and Science 1 (1) (2011).
2. Brockwell P. J., Marquardt T., "Levy driven and fractionally integrated ARMA processes with continuous time parameter", *Statist, Sinica*, 15 (2005) 477-494.
3. Brockwell P. J., "On continuous-time threshold ARMA processes", *Journal of statistical planning and inference*, Vol.39 (1994) 291-303.
4. Brockwell P. J., Stramer O., "On the approximation of continuous-time threshold ARMA processes", *Annals of the institute of statistical Mathematics*, Vol. 47, Issue 1 (1995) 1-20.
5. Brockwell P. J., "Representations of continuous-time ARMA processes", *Journal of Applied Probability, Stochastic Methods and Their Applications*, Vol. 41 (2004) 375-382.
6. Cont R., Tankov P., "Financial Modeling with Jump Processes", Chapman & Hall/CRC, Boca Raton (2004).
7. Schoutens W., "Levy Processes in Finance; Pricing Financial Derivatives", John Wiley and Sons Ltd. Chichester (2003).
8. Bergstrom A. R., "Continuous-Time Econometric Modeling", Oxford University Press (1990).
9. Todorov V., "Econometric analysis of jump-driven stochastic volatility models", *J. Econom*, 160 (2010)12-21.
10. Brockwell P. J., Levy-driven continuous-time ARMA processes. *Ann. Inst. Stat. Math*, 53 (2000)113-124.
11. Barndorff-Nielsen O. E., Shephard N., "Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck based models and some of their uses in financial economics", *J. of Roy. Stat. Soc. Ser. B* 63 (2001) 167-241.
12. Brockwell P. J., Linder A., "Levy-driven time series models for financial data", *Time Series Analysis: Methods and Applications*, Vol. 30 (2012) 543-563.
13. Barndorff-Nielsen O. E., "Superposition of Ornstein-Uhlenbeck type processes", *Theory. Probab. Appl.*, 45 (2) (2001) 175-194.
14. Marquardt T., Stelzer R., "Multivariate CARMA processes", *Stochastic Processes and Their Applications*. 117 (2007) 96-120.
15. Brockwell P. J., Davis R. A., Yang Y., "Estimation for non-negative Levy-driven CARMA processes. *Journal of Business and Economic Statistics*. 29 (2011) 250-259.
16. Brockwell P. J., Linder A., "Prediction of Levy-driven CARMA processes", *Journal of Econometrics*, Vol. 189(2) (2015) 263-271.
17. Dehay D., Hurd H. L., "Spectral theory for periodically and almost periodically correlated random processes: A survey" (1998).