

ایده‌آل‌های آرمنداریز ضعیف

محمدجواد نیک‌مهر*، عبدالرضا آزادی

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، دانشکده ریاضی

پذیرش ۹۷/۰۶/۲۶

دریافت ۹۷/۰۲/۲۱

چکیده

در این مقاله ایده‌آل‌های آرمنداریز ضعیف را به‌عنوان تعمیمی از ایده‌آل‌های آرمنداریز معرفی کرده و ضمن بررسی خواص آن، رابطه آن با دیگر ساختارها را نیز بیان می‌کنیم. هم‌چنین با آوردن مثال‌های متعدد و متنوع، رفتار ایده‌آل‌های آرمنداریز ضعیف را تحت برخی توسعه‌های حلقه‌ای مورد ارزیابی قرار می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: پوچ‌ساز راست، پوچ‌ساز پوچ‌توان، حلقه آرمنداریز، حلقه نیم‌جابه‌جایی.

مقدمه

سرتاسر این مقاله R نشان‌دهنده حلقه شرکت‌پذیر با عضو همانی است. مجموعه تمام عناصر پوچ‌توان^۱ حلقه R را با نماد $nil(R)$ و حلقه چندجمله‌ای‌ها را با $R[X]$ نشان می‌دهند. مجموعه تمام ماتریس‌های بالا مثلثی^۲ $n \times n$ با درایه‌هایی از حلقه R را با نماد $T_n(R)$ نشان می‌دهیم.

حلقه R را یک حلقه کاهش‌ی^۳ گوئیم هرگاه فاقد عنصر پوچ‌توان ناصفر باشد، حلقه R را یک حلقه نیم‌جابه‌جایی^۴ گوئیم هرگاه برای هر $a, b \in R$ از این‌که $ab = 0$ نتیجه شود $aRb = 0$. حلقه R را NI -حلقه^۵ می‌نامند در صورتی که $nil(R)$ یک ایده‌آل باشد. در [۶]، لیانگ^۶ حلقه‌های نیم‌جابه‌جایی ضعیف^۷ را به‌عنوان تعمیمی از حلقه‌های نیم‌جابه‌جایی معرفی کرد. حلقه R را نیم‌جابه‌جایی ضعیف می‌نامند در صورتی که برای هر $a, b, r \in R$ اگر $ab = 0$ آن‌گاه $arb \in nil(R)$.

رگه و چاوچاریا^۸ [۸] حلقه‌های آرمنداریز^۹ را معرفی کردند. حلقه R آرمنداریز نامیده می‌شود هرگاه اگر حاصل ضرب دو چندجمله‌ای در $R[X]$ صفر باشد، آن‌گاه حاصل ضرب ضرایب آن‌ها صفر باشد. هو^{۱۰} و همکارانش [۳] مفهوم π -آرمنداریز را به‌عنوان تعمیمی از حلقه‌های آرمنداریز معرفی نمودند. حلقه R ، π -آرمنداریز نامیده می‌شود هرگاه اگر حاصل ضرب دو چندجمله‌ای در $R[X]$ پوچ‌توان باشد، آن‌گاه حاصل ضرب ضرایب آن‌ها نیز پوچ‌توان باشد. زیرمجموعه A را در حلقه R در نظر می‌گیریم. پوچ‌ساز راست (چپ)^{۱۱} زیرمجموعه‌ی A در حلقه R را با $r_R(A)$ ($l_R(A)$) نمایش داده و بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$r_R(A) = \{b \in R \mid Ab = 0\}, \quad l_R(A) = \{b \in R \mid bA = 0\}.$$

*نویسنده مسئول nikmehr@kntu.ac.ir

1. Nilpotent element
2. Upper triangular
3. Reduced
4. Semi-commutative
5. NI-ring
6. Liang
7. Weakly
8. Rege and chhawchharia
9. Armendarize
10. Huh
11. Right(left) annihilator

قلندرزاده [۲]، ایده‌آل‌های آرمنداریز را معرفی و بررسی کرد. ایده‌آل I از حلقهٔ R را آرمنداریز نامیم هرگاه

$$f(x)g(x) \in r_{R[x]}(I[x]) \text{ نتیجه بدهد } a_i b_j \in r_R(I), \text{ که در آن } g(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j \text{ و } f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$$

چندجمله‌ای‌هایی در $R[x]$ هستند. بنا بر [۱]، یک ایده‌آل یک‌طرفه از حلقه‌ی R نیم‌جابه‌جایی نامیده می‌شود هرگاه $ab \in I$ ، نتیجه بدهد $aRb \subseteq I$ که در آن a, b عضو حلقه‌ی R هستند.

از [۲]، برای یک ایده‌آل یک‌طرفه I از حلقهٔ R ، $r_R(I)$ نیم‌جابه‌جایی نامیده می‌شود هرگاه $ab \in r_R(I)$ ، نتیجه بدهد $aRb \subseteq r_R(I)$ که در آن a, b عضو حلقهٔ R هستند. در [۷]، اویانگ^۱ مفهوم پوچ‌سازپوچ‌توان^۲ را معرفی کرد و خواص آن را بررسی کرد.

برای زیرمجموعهٔ $X \subseteq R$ تعریف می‌کنیم:

$$N_R(X) = \{ a \in R \mid Xa \subseteq \text{nil}(R) \},$$

پوچ‌سازپوچ‌توان X در R است.

در این مقاله مفهوم ایده‌آل‌های آرمنداریز ضعیف^۳ را به‌عنوان تعمیمی از ایده‌آل‌های آرمنداریز معرفی می‌کنیم. این کار به این صورت انجام می‌شود که پوچ‌سازپوچ‌توان را به‌جای پوچ‌ساز در نظر می‌گیریم. نشان می‌دهیم که اگر I ایده‌آل آرمنداریز ضعیف باشد، آن‌گاه بسیاری از خواص حلقه‌های آرمنداریز و هم‌چنین ایده‌آل‌های آرمنداریز را دارد. هم‌چنین در قسمت آخر این مقاله نیز، ایده‌آل‌های نیم‌جابه‌جایی ضعیف^۴ را به‌عنوان تعمیمی از ایده‌آل‌های نیم‌جابه‌جایی تعریف کرده و ضمن بررسی خواص اساسی این ایده‌آل‌ها، نتایج قبلی موجود درباره این ایده‌آل‌ها را تعمیم می‌دهیم.

ایده‌آل‌های آرمنداریز ضعیف

در این بخش ضمن بررسی ساختاری ایده‌آل‌های آرمنداریز ضعیف، شرایط لازم برای این‌که حلقه‌ای آرمنداریز ضعیف باشد را به‌دست می‌آوریم.

ثابت می‌کنیم برای هر حلقهٔ R ، اگر $\frac{R}{I}$ حلقه‌ای آرمنداریز ضعیف و I ایده‌آلی آرمنداریز ضعیف باشد، آن‌گاه حلقهٔ R آرمنداریز ضعیف است.

هم‌چنین رفتار ایده‌آل‌های آرمنداریز ضعیف تحت توسیع‌های ماتریسی را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱. فرض کنیم I یک ایده‌آل چپ از حلقهٔ R باشد. ایده‌آل I آرمنداریز ضعیف نامیده می‌شود هرگاه برای چندجمله‌ای‌های $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ و $g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$ از $R[x]$ ، از این‌که $f(x)g(x) \in I_{R[x]}(I[x])$ برای هر $1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq m$ ، بتوان نتیجه گرفت که $a_i b_j \in N_R(I)$.

انتظار می‌رود که هر ایده‌آل آرمنداریز، آرمنداریز ضعیف باشد. در حقیقت نیز چنین است، توجه داشته باشید که عکس این مطلب همواره برقرار نیست. مثال ۶ دلیلی بر این ادعا است. پیش از بیان این مثال، به ذکر برخی قضاها و مثال‌های استفاده شده می‌پردازیم.

مثال ۲. فرض کنیم \mathbb{Z} حوزه اعداد صحیح و $T_3(\mathbb{Z})$ حلقهٔ ماتریس‌های بالا مثلثی 3×3 روی \mathbb{Z} باشد. ایده‌آل

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 2\mathbb{Z} & 0 & 0 \\ 0 & 2\mathbb{Z} & 0 \\ 0 & 0 & 2\mathbb{Z} \end{pmatrix} \right\},$$

1. Ouyang
2. Nilpotent annihilator
3. Weak Armendarize Ideal
4. Weak semi-commutative ideal

از حلقهٔ $T_3(\mathbb{Z})$ را در نظر می‌گیریم. نشان می‌دهیم که $r_{T_3(\mathbb{Z})}(I) \subset N_{T_3(\mathbb{Z})}(I)$ و $l_{T_3(\mathbb{Z})}(I) \subset N_{T_3(\mathbb{Z})}(I)$. واضح است که $r_{T_3(\mathbb{Z})}(I) = l_{T_3(\mathbb{Z})}(I) = 0$

$$N_{T_3(\mathbb{Z})}(I) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

بنابراین $l_{T_3(\mathbb{Z})}(I) = r_{T_3(\mathbb{Z})}(I) \subset N_{T_3(\mathbb{Z})}(I)$

اگر R حلقهٔ کاهشی باشد، آن‌گاه $r_R(I) = l_R(I) = N_R(I)$ برای هر ایده‌آل چپ I از حلقهٔ R . به راحتی می‌توان دید که برای هر ایده‌آل چپ ناصفر I از R ، $N_R(I)$ یک ایده‌آل از R است زمانی که $nil(R)$ یک ایده‌آل باشد. برای دیدن جزئیات بیشتر از پوچ‌سازهای پوچ‌توان، $[7]$ را ببینید. لم ۳ در ادامه استفاده می‌شود. لم ۳. فرض کنیم I یک ایده‌آل چپ از حلقهٔ R باشد. اگر $r \in R$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in T_n(I),$$

برای یک i ثابت داشته باشیم $ra_{ii} = 0$ ، آن‌گاه $rI = (0)$.

اثبات. فرض کنیم $r \in R$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in T_n(I),$$

برای یک i ثابت داشته باشیم $ra_{ii} = 0$. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنیم برای $i=1$ ، $ra_{ii} = 0$.

حال فرض کنیم a یک عضو دلخواه ایده‌آل چپ I باشد. در این صورت واضح است که $\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in T_n(I)$

و در نتیجه $ra = 0$ ، بنابراین $rI = (0)$.

حال یکی از قضایای ساختاری درباره ایده‌آل‌های آرمنداریز ضعیف، که منجر به تولید رده‌ای وسیع از ایده‌آل‌های آرمنداریز ضعیف می‌شود را بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۴. فرض کنیم R یک حلقه و I ایده‌آلی از حلقهٔ R است. ایده‌آل I آرمنداریز ضعیف است اگر و تنها اگر برای هر n ، $T_n(I)$ ایده‌آلی آرمنداریز ضعیف باشد.

اثبات. اگر $f(x)g(x) \in l_{R[x]}(I[x])$ آن‌گاه $f(x)g(x) \in l_{T_n(I)[x]}(T_n(I)[x])$. حال اگر فرض کنیم I آرمنداریز ضعیف نباشد، پس i, j ای موجود است که $a_i b_j I \not\subseteq nil(R)$. از طرفی چون R زیرحلقهٔ $T_n(R)$ است، واضح است که $nil(R) \subseteq nil(T_n(R))$. بنابراین $nil(R) \not\subseteq nil(T_n(R))$ که با آرمنداریز ضعیف بودن $T_n(I)$ تناقض دارد.

بالعکس، ایده‌آل I را آرمنداریز ضعیف در نظر می‌گیریم. نشان می‌دهیم $T_n(I)$ آرمنداریز ضعیف است. فرض کنیم

$$g(x) = \sum_{i=0}^q B_j x^j \text{ و } f(x) = \sum_{i=0}^p A_i x^i$$

دو چندجمله‌ای در حلقه $T_n(R)[x]$ باشند به طوری که

$$f(x)g(x) \in I_{\Gamma_n(R)}(T_n(I)[x])$$

قرار می‌دهیم:

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11}^i & a_{12}^i & \cdots & a_{1n}^i \\ 0 & a_{22}^i & \cdots & a_{2n}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn}^i \end{pmatrix} \text{ و } B_j = \begin{pmatrix} b_{11}^j & b_{12}^j & \cdots & b_{1n}^j \\ 0 & b_{22}^j & \cdots & b_{2n}^j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{mj}^j \end{pmatrix}$$

$$D_h = \begin{pmatrix} d_{11}^h & d_{12}^h & \cdots & d_{1n}^h \\ 0 & d_{22}^h & \cdots & d_{2n}^h \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{mh}^h \end{pmatrix}$$

ادعا می‌کنیم که $A_i B_j \in N_{T_n(R)}(T_n(I))$ برای هر i, j .

فرض کنیم

$$A = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^p a_{11}^i x^i & \sum_{i=1}^p a_{12}^i x^i & \cdots & \sum_{i=1}^p a_{1n}^i x^i \\ 0 & \sum_{i=1}^p a_{22}^i x^i & \cdots & \sum_{i=1}^p a_{2n}^i x^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{i=1}^p a_{mn}^i x^i \end{pmatrix} \text{ و}$$

$$B = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^q b_{11}^j x^j & \sum_{j=1}^q b_{12}^j x^j & \cdots & \sum_{j=1}^q b_{1n}^j x^j \\ 0 & \sum_{j=1}^q b_{22}^j x^j & \cdots & \sum_{j=1}^q b_{2n}^j x^j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{j=1}^q b_{nn}^j x^j \end{pmatrix}$$

چون $f(x)g(x)T_n(I)[x] = 0$ ، به‌ازای هر

$$D = \begin{pmatrix} \sum_{h=0}^t d_{11}^h x^h & \sum_{h=0}^t d_{12}^h x^h & \cdots & \sum_{h=0}^t d_{1n}^h x^h \\ 0 & \sum_{h=0}^t d_{22}^h x^h & \cdots & \sum_{h=0}^t d_{2n}^h x^h \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{h=0}^t d_{nn}^h x^h \end{pmatrix} \in T_n(I[x])$$

داریم $ABD = 0$.

با ضرب دو چندجمله‌ای $f(x)$ و $g(x)$ در یک‌دیگر و جمع جمله‌ها با درجه‌های یکسان و ساده کردن عبارت، درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس‌ها به صورت چندجمله‌ای خواهند بود که ضرایب آنها در $R[x]$ است. هم‌چنین با توجه به این مطلب که در ماتریس‌های بالامتلی، اگر درایه‌های روی قطر اصلی صفر شوند آن‌گاه کل ماتریس به توان مرتبه آن صفر می‌شود، کافی است بررسی را فقط روی درایه‌های قطر اصلی انجام دهیم.

چون $ABD = 0$

$$(1). \left(\sum_{i=1}^P a^i_{11} x^i\right) \left(\sum_{j=1}^q b^j_{11} x^j\right) \left(\sum_{h=0}^t d^h_{11} x^h\right) = 0,$$

$$(2). \left(\sum_{i=1}^P a^i_{22} x^i\right) \left(\sum_{j=1}^q b^j_{22} x^j\right) \left(\sum_{h=0}^t d^h_{22} x^h\right) = 0,$$

⋮

$$(n). \left(\sum_{i=1}^P a^i_{11} x^i\right) \left(\sum_{j=1}^q b^j_{11} x^j\right) \left(\sum_{h=0}^t d^h_{11} x^h\right) = 0.$$

از این‌رو، از لم ۳ و تساوی‌های بالا می‌توان نتیجه گرفت که

$$(1). \left(\sum_{i=1}^P a^i_{11} x^i\right) \left(\sum_{j=1}^q b^j_{11} x^j\right) I[x] = 0,$$

$$(2). \left(\sum_{i=1}^P a^i_{22} x^i\right) \left(\sum_{j=1}^q b^j_{22} x^j\right) I[x] = 0,$$

⋮

$$(n). \left(\sum_{i=1}^P a^i_{11} x^i\right) \left(\sum_{j=1}^q b^j_{11} x^j\right) I[x] = 0.$$

حال چون I آرمنداریز ضعیف است، بنابراین برای هر i, j و هر $1 \leq k \leq n$ ، داریم: $a^i_{kk} b^j_{kk} \in N_R(I)$ بنابراین برای هر $d^h_{kk} \in I$ و هر h, i, j, k ، $M^k_{ijh} \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $(a^i_{kk} b^j_{kk} d^h_{kk})^{M^k_{ijh}} = 0$.
قرار می‌دهیم

$$M = \text{Max}\{M^k_{ijh} \mid 1 \leq k \leq n\},$$

از این‌رو، $[(A_i B_j D_h)^m]^n = 0$. بنابراین $A_i B_j T_n(I) \subseteq \text{nil}(T_n(R))$ و لذا $T_n(I)$ آرمنداریز ضعیف است.
حلقه R را آبلی^۱ می‌خوانند هرگاه هر خودتوان^۲ آن مرکزی باشد. بنابر [۲]، ایده‌آل چپ I از حلقه R را آبلی گوئیم هرگاه به‌ازای هر خودتوان $e \in R$ و هر $r \in R$ ، $er - re \in r_R(I)$ ، $r \in R$ و هر $e \in R$ نتیجه^{۵.۲} هر ایده‌آل آرمنداریز، آبلی است.

حلقه R و (R, R) -دو مدول^۳ ${}_R M_R$ را در نظر می‌گیریم. $R \oplus M$ را توسعه بدیهی R به وسیله M نامیم و با نماد $T(R, M) = R \oplus M$ نمایش می‌دهیم و دو عمل جمع و ضرب آن‌ها را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$(r_1, m_1) + (r_2, m_2) = (r_1 + r_2, m_1 + m_2)$$

1. Abelian
2. Idempotent
3. Bi-module

$$(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1 r_2, r_1 m_2 + m_1 r_2).$$

با توجه به تعریف مذکور، توسیع بدیهی R به وسیله M با حلقه همه ماتریس‌های $\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix}$ که $r \in R$ و $m \in M$ یکریخت است.

در این قسمت با یک مثال نشان می‌دهیم که اگر I ایده‌آل حلقه R آرمنداریز ضعیف باشد، آن‌گاه ممکن است آرمنداریز نباشد.

مثال ۶. فرض کنیم $R = T(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_4)$ و $I = Ra$ که در آن $a = \begin{pmatrix} 0 & \bar{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. بنا به [۲]، مثال [۷.۲]، I ایده‌آل

آرمنداریز است. این همراه با قضیه ۴ نتیجه می‌دهد $T_5(I)$ آرمنداریز ضعیف است. اینک ادعا می‌کنیم که $T_5(I)$ آرمنداریز نیست. با توجه به این‌که هر ایده‌آل چپ آرمنداریز آبدلی است. بنابراین کافی است نشان دهیم که $T_5(I)$ آبدلی نیست. فرض کنیم

$$E = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

$$k = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \in T_5(R).$$

در این صورت $E^2 = E$ و $Ek - kE = k$ زیرا

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} 0 & \bar{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \neq 0,$$

پس $(Ek - kE)T_5(I) \neq 0$. بنابراین $T_5(I)$ ایده‌آل چپ اَبلی نیست و در نتیجه $T_5(I)$ ایده‌آل چپ آرمنداریز نیست.

نتیجه ۷. فرض کنیم $R = T(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_4)$. در این صورت حلقه $T_5(R)$ آرمنداریز نیست.

اثبات. بنابر [۲]، گزاره ۶.۲، هر ایده‌آل چپ I از حلقه آرمنداریز R ، آرمنداریز است. همچنین بنابر مثال ۶، $T_5(R)$ ایده‌آل چپ آرمنداریز نیست، از این‌رو، $T_5(R)$ حلقه‌ای آرمنداریز نیست.

توجه کنیم که نتیجه ۷ و مثال ۶، نشان می‌دهند که یک ایده‌آل چپ آرمنداریز ضعیف وجود دارد که حلقه‌اش آرمنداریز نیست. با روش مشابه برای مثال ۶ می‌توان مثال ۸ را اثبات کرد.

مثال ۸. برای هر ایده‌آل چپ آرمنداریز $I \neq 0$ از حلقه R ، $T_n(I)$ ایده‌آل چپ آرمنداریز ضعیف است که آرمنداریز نیست.

بنابر [۲]، گزاره ۶.۲، هر ایده‌آل چپ از یک حلقه آرمنداریز، آرمنداریز است. در گزاره ۹، نشان می‌دهیم ایده‌آل چپ یک حلقه π -آرمنداریز، آرمنداریز ضعیف است.

گزاره ۹. اگر R یک حلقه π -آرمنداریز باشد، آن‌گاه هر ایده‌آل چپ از آن آرمنداریز ضعیف است.

اثبات. فرض کنیم R یک حلقه π -آرمنداریز و I یک ایده‌آل چپ از R باشد. فرض کنیم $f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$ و

$$g(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j \text{ در } R[x] \text{ باشند. به‌گونه‌ای که } f(x)g(x) \in I_{R[x]}(I[x]) \text{ پس}$$

$f(x)g(x)h(x) = 0 \in \text{nil}(R[x])$ که $h(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_p x^p \in I[x]$ حال زیرا R ، π -آرمنداریز است، داریم $a_i b_j c_k \in \text{nil}(R)$ برای هر i, j, k و از این‌رو، $a_i b_j I \subseteq \text{nil}(R)$. از این‌رو $a_i b_j \in N_R(I)$ و لذا نتیجه حاصل است.

در مثال ۱۰ نشان می‌دهیم که $T_5(\mathbb{Z})$ دارای ایده‌آل چپ آرمنداریز ضعیف است که آرمنداریز نیست.

مثال ۱۰. فرض کنیم \mathbb{Z} حوزه اعداد صحیح باشد. حلقه ماتریس‌های بالا مثلثی 5×5 روی \mathbb{Z} را در نظر می‌گیریم. چون \mathbb{Z} حلقه‌ای کاهشی است بنابراین \mathbb{Z} آرمنداریز است در نتیجه π -آرمنداریز است. از این‌رو، [۳]، قضیه ۴.۲، نتیجه می‌دهد که $T_5(\mathbb{Z})$ ، π -آرمنداریز است. حال قرار می‌دهیم:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in 2\mathbb{Z} \right\}.$$

چون M یک ایده‌آل چپ از حلقه $T_5(\mathbb{Z})$ است، پس گزاره ۹ نتیجه می‌دهد که M یک ایده‌آل چپ آرمنداریز ضعیف است. اینک نشان می‌دهیم که M آرمنداریز نیست. به‌وضوح می‌توان دید که ماتریس

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

خود توان است و این در حالی است که برای ماتریس

$$f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

داریم $ef - fe = f$ و $fM \neq 0$. پس ثابت شد که ایده‌آل M آبله نیست و در نتیجه آرمنداریز نیست. بنا بر [۲]، گزاره ۳.۲، اگر M ایده‌آل چپ آرمنداریز باشد، آن‌گاه $I[x]$ نیز ایده‌آل چپ آرمنداریز است. برای هر حلقه R ، حلقه $T(R, n)$ برای $n \geq 2$ زیرحلقه‌ای از حلقه ماتریس‌های بالا مثلثی $T_n(R)$ است، بدین صورت تعریف می‌شود.

$$T(R, n) = \left\{ \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ 0 & 0 & a_0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \end{pmatrix} \mid a_i \in R \right\}.$$

برای راحتی کار می‌توان عناصر $T(R, n)$ را به‌صورت (a_0, \dots, a_{n-1}) نمایش داده آن‌گاه $T(R, n)$ با جمع نقطه‌به‌نقطه^۱ و ضرب

$$(a_0, \dots, a_{n-1})(b_0, \dots, b_{n-1}) = (a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, \dots, a_0b_{n-1} + \dots + a_{n-1}b_0)$$

یک حلقه است. از طرف دیگر نگاشت

$$\varphi: \frac{R[x]}{\langle x^n \rangle} \rightarrow T(R, n)$$

طوری که $\varphi(a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}) = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ برای $a_i \in R$ و $1 \leq i \leq n-1$ ، یکریختی حلقه‌ای است. از این‌رو، $T(R, n) \cong \frac{R[x]}{\langle x^n \rangle}$ ، جایی که $\langle x^n \rangle$ ایده‌آل تولید شده به‌وسیله x^n در حلقه چندجمله‌ای‌های $R[x]$ است. نتیجه ۱۱ در ادامه مورد نیاز است.

لم ۱۱. [۹]، لم ۱.۲، حلقه R و عدد صحیح و مثبت n را که $n \geq 2$ است، در نظر می‌گیریم. فرض کنیم I_0, \dots, I_{n-1} ایده‌آلهایی در R باشند به‌طوری‌که $I_i \subseteq I_{i+1}$ ، برای هر i که $0 \leq i \leq n-2$. در این صورت

$$J = \left\{ \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ 0 & 0 & a_0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \end{pmatrix} \mid a_i \in I_i, i=0, \dots, n-1 \right\}$$

یک ایده‌آل از $\frac{R[x]}{\langle x^n \rangle}$ است.

با روشی مشابه روش استفاده شده در اثبات قضیه ۴، می‌توان مثال ۱۲ را نیز اثبات کرد.

مثال ۱۲. اگر I_0 یک ایده‌آل چپ آرمنداریز ضعیف باشد، آن‌گاه J نیز آرمنداریز ضعیف است.

به‌وضوح، یک حلقه R را آرمنداریز ضعیف گوییم هرگاه برای چندجمله‌ای‌های $f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j$

در حلقه $R[x]$ به‌طوری‌که $f(x)g(x) = 0$ ، نتیجه شود $a_i b_j \in N_R(R)$ برای هر i, j ، در [۴]، قضیه ۱۱ ثابت

شده که اگر R دلخواه و برای ایده‌آل کاهشی I و $\frac{R}{I}$ حلقه‌ای آرمنداریز باشد، آن‌گاه R حلقه‌ای آرمنداریز است.

در [۵]، [۱۴]، مثالی از یک حلقه غیرآرمنداریز R به‌طوری‌که I ، آرمنداریز هستند ارائه شده است، که I

به‌عنوان یک حلقه آرمنداریز بدون همانی در نظر گرفته شد.

حال این نتیجه را برای حالت آرمنداریز ضعیف داریم:

قضیه ۱۳. فرض کنیم R حلقه و I ایده‌آلی از R باشد. اگر I ایده‌آلی آرمنداریز ضعیف و $\frac{R}{I}$ حلقه‌ای آرمنداریز

ضعیف باشد، آن‌گاه R حلقه‌ای آرمنداریز ضعیف است.

اثبات. فرض کنیم $f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j$ اعضای $R[x]$ باشند به‌طوری‌که $f(x)g(x) = 0$ ،

توجه کنید در $\left(\frac{R}{I}\right)[x]$ داریم:

$$\left(\sum_{i=0}^m \bar{a}_i x^i\right) \left(\sum_{j=0}^n \bar{b}_j x^j\right) = 0$$

بنابراین از این‌که $\frac{R}{I}$ حلقه‌ای آرمنداریز ضعیف است، برای هر $r \in R$ ، $n_{ijr} \in \mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که

$(a_i b_j r)^{n_{ijr}} \in I$ چون I ایده‌آلی از R است، از این‌رو، $r(a_i b_j r)^{n_{ij}} \in I$ از طرفی چون I آرمنداریز ضعیف است

پس $(a_i b_j r)^{n_{ij}+1} = (a_i b_j r)(a_i b_j r)^{n_{ij}} \in nil(R)$ به‌ویژه $a_i b_j \in N_R(I)$ پس $a_i b_j \in nil(R)$ برای هر

i, j و هر $r \in R$ یعنی $a_i b_j \in N_R(R)$ و از این‌رو، R آرمنداریز ضعیف است.

در این‌جا مثالی را ارائه می‌دهیم که پایه و اساس ساختن مثال‌هایی است که نشان می‌دهند هر حلقه آرمنداریز ضعیف

لزوماً آرمنداریز نیست.

مثال ۱۴. اگر R حلقه‌ای آرمنداریز باشد، آن‌گاه بنا بر [۵]، [۱] حلقه $T_n(R)$ آرمنداریز نیست ولی با توجه به

قضیه ۴، واضح است که حلقه $T_n(R)$ آرمنداریز ضعیف است.

ایده‌آل نیم‌جاب‌جایی ضعیف

تعریف ۱۵. ایده‌آل I از حلقه R را نیم‌جاب‌جایی می‌نامند در صورتی که برای هر $a, b \in R$ ، اگر $a, b \in I$ ، آن‌گاه $aRb \subseteq I$. بنابر [۲]، $r_R(I)$ را نیم‌جاب‌جایی می‌نامند در صورتی که برای هر $a, b \in R$ ، اگر $a, b \in r_R(I)$ ، آن‌گاه $aRb \subseteq r_R(I)$.

تعریف ۱۶. ایده‌آل I از حلقه R را نیم‌جاب‌جایی ضعیف می‌نامیم در صورتی که برای هر $a, b \in R$ ، اگر $ab \in r_R(I)$ ، آن‌گاه $aRb \subseteq N_R(I)$.

به روشنی، اگر R حلقه کاهشی و I نیم‌جاب‌جایی ضعیف باشد، آن‌گاه $r_R(I)$ نیم‌جاب‌جایی است. همچنین اگر $r_R(I)$ نیم‌جاب‌جایی باشد، آن‌گاه I نیم‌جاب‌جایی ضعیف است.

حال ممکن است این سؤال پیش آید که اگر I ایده‌آل نیم‌جاب‌جایی ضعیف باشد، آن‌گاه $r_R(I)$ نیم‌جاب‌جایی هستند. اما مثال بعدی نشان می‌دهد که این مطلب برقرار نیست.

مثال ۱۷. فرض کنیم

$$J = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{Z} \right\}$$

یک ایده‌آل از حلقه $T_5(\mathbb{Z})$ باشد. بنا بر [۶]، مثال ۱۰.۲، $T_5(\mathbb{Z})$ نیم‌جاب‌جایی ضعیف است و در نتیجه واضح است که J نیم‌جاب‌جایی ضعیف است. حال نشان می‌دهیم $r_{T_n(R)}(J)$ نیم‌جاب‌جایی نیست. واضح است

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \in r_{T_n(R)}(J)$$

و این در حالی است که

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

و همچنین

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

بنابراین

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \notin r_{T_3(\mathbb{Z})}(J),$$

و این نتیجه می‌دهد که $r_{T_n(\mathbb{R})}(J)$ نیم‌جابه‌جایی نیست.در قضیه ۱۸، I_0 و J همان ایده‌آل‌های ذکر شده در لم ۱۱.۲ هستند.قضیه ۱۸. اگر I_0 نیم‌جابه‌جایی ضعیف باشد، آن‌گاه J نیز نیم‌جابه‌جایی ضعیف است.

اثبات. فرض کنیم

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_0 \end{pmatrix} \in T(\mathbb{R}, n)$$

به طوری که $AB \in r_{T(\mathbb{R}, n)}(J)$. در این صورت $ABJ = 0$ و در نتیجه $a_0 b_0 I_0 = 0$. چون I_0 نیم‌جابه‌جایی ضعیفاست، پس $a_0 c b_0 \in N_R(I_0)$ برای هر $c \in \mathbb{R}$.

اینک فرض کنیم

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ 0 & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_0 \end{pmatrix}$$

یک عضو دلخواه در $T(\mathbb{R}, n)$ باشد. در این صورت

$$ACBJ = \begin{pmatrix} a_0 c_0 b_0 I_0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & a_0 c_0 b_0 I_0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & a_0 c_0 b_0 I_0 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 c_0 b_0 I_0 \end{pmatrix}$$

و در نتیجه $ACBJ \subseteq \text{nil}(T(\mathbb{R}, n))$ بنابراین J نیم‌جابه‌جایی ضعیف است.بنابر [۱]، گزاره ۱.۳، اگر $r_R(\mathbf{I})$ نیم‌جابه‌جایی باشد، آن‌گاه $r_{\Delta^{-1}R}(\Delta^{-1}\mathbf{I})$ نیم‌جابه‌جایی است.گزاره ۱۹. فرض کنیم I یک ایده‌آل یک‌طرفه از حلقه R و Δ زیرمجموعه بسته ضربی^۱، متشکل از عناصر منظممرکزی^۲ حلقه R باشد. اگر I نیم‌جابه‌جایی باشد، در این صورت $\Delta^{-1}\mathbf{I}$ به‌عنوان ایده‌آل چپی از حلقه $\Delta^{-1}R$ نیز

نیم‌جابه‌جایی ضعیف است.

اثبات. فرض کنیم $\alpha = u^{-1}a$ و $\beta = v^{-1}b$ که $u, v \in \Delta$ و $a, b \in R$ دو عضو در حلقه $\Delta^{-1}R$ باشند به طوری که $\alpha, \beta \in r_{\Delta^{-1}R}(\Delta^{-1}\mathbf{I})$. این همراه با این واقعیت که اعضای Δ مرکزی است، نتیجه می‌دهد:

1. Multiplicatively closed subset
2. Central regular elements

$$\alpha\beta\Delta^{-1}I = u^{-1}av^{-1}b\Delta^{-1}I = (uv)^{-1}ab\Delta^{-1}I = 0$$

و بنابراین داریم $abI = 0$. از طرفی چون I نیم‌جابه‌جایی ضعیف است، پس $arb \in N_R(I)$ برای هر $r \in R$. در

نتیجه برای هر $i \in I$ ، عدد صحیح و مثبتی مانند $m \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $(iarb)^m = 0$. حال فرض کنیم

که $\gamma = w^{-1}r$ و $w \in \Delta$ و $r \in R$. چون Δ مشمول مرکز R است، پس

$$(\delta^{-1}i\alpha\gamma\beta)^m = (iarb)^m (\delta^{-1}(wuv)^{-1})^m = 0$$

که در آن $i \in I$ و $\delta^{-1} \in \Delta$. بنابراین $\Delta^{-1}I\alpha\gamma\beta \subseteq \text{nil}(R)$ و از این رو، $\Delta^{-1}I$ نیم‌جابه‌جایی ضعیف است.

منابع

1. Bell H. E., "Near-rings in which each element is a power of itself. Bull", Aust. Math. Soc., 2 (3) (1970) 363-368.
2. Ghalandarzadeh Sh., Seyyed Javadi H., Khoramdel M., shamsaddini Fard M., "On Armendariz ideals. Bull", Korean Math. Soc., 47 (5) (2010) 883-888.
3. Huh C., Lee C. I., Park K. S., Ryu S. J., "On II-Armendariz rings", Bull. Korean Math. Soc., 44 (4) (2007) 641-649.
4. Huh C., Lee Y., Smoktunowicz A., "Armendariz rings and semicommutative rings", Comm. Algebra, 30 (2) (2002) 751-761.
5. Kim N. K., Lee Y., "Extensions of reversible rings", J. pure Appl. Algebra, 185 (1-3) (2003) 207-223.
6. Liang L., Wang L., Liu Z., "On a generalization of semicommutative rings", Taiwan. J. Math., 11 (5) (2007) 1359-1368.
7. Ouyang L., "Extensions of nilpotent PP rings", Bull. Iranian Math. Soc., 36 (2011) 169-184.
8. Rege M. B., Chhawchharia S., "Armendariz rings. Proc", Japan Acad., Series A, Math. Sci., 73 (1) (1997) 14-17.
9. Tavallaee H. A., Nikmeher M. J., Pazoki M., "Weak a-skew Armendariz ideals", Ukrainian Math. J., (2012) 1-10.