Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Statistical Cosymplectic manifolds and their submanifolds

Mohammad Bagher Kazemi[1] ✉, Shiva Salahvarzi[2]

1. Department of mathematics, University of Zanjan, Zanjan, Iran.

✉ E-mail: mbkazemi@znu.ac.ir

2. Department of mathematics, University of Zanjan, Zanjan, Iran.

E-mail: s.salahvarzi@znu.ac.ir

Article Info

Article type:

Research Article

Article history:

Received:
22 May 2018
Revised form:
25 July 2020
Accepted:
5 August 2020
Published online:
21 May 2022

Keywords:

Statistical manifold; cosymplectic structure; statistical Keahler-like manifold.

ABSTRACT

Introduction

Let $p(x,\zeta)$ be the set of parametric probability distribution with parameter $\zeta = [\zeta^1, \dots, \zeta^n] \in \mathbb{R}^n$. This set is called a statistical model or manifold. The distance between two points is measured by the Fisher metric. In general, statistical manifolds are Riemannian manifolds of distributions endowed with the Fisher information metric.

On the other hand, one of the most important structures on odd dimensional Riemannian manifolds is the almost contact structure. Recently, statistical manifolds equipped with almost contact structures are studied by many authors. In this paper, we introduce statistical almost contact-like and statistical cosymplectic manifolds on a Riemannian manifold. We recall the basic definitions and define statistical cosymplectic manifolds and their invariant submanifolds. We prove that an invariant submanifold of a statistical cosymplectic manifold with tangent structure vector field is a cosymplectic and minimal-like submanifold. Also, we prove if the structure vector field be normal to the submanifold then the submanifold is a statistical Keahler-like manifold. Finally, we construct two examples to illustrate some results of the paper.

Statistical almost contact-like manifolds

Let $(\bar{M}, g)$ be a Riemannian manifold with the Levi-Civita connection $\hat{\nabla}$. $(\bar{M}, g)$ is called a statistical manifold if there exists an affine and torsion free connection $\bar{\nabla}$ such that for all $U, V, W \in \tau(\bar{M})$

$$(\bar{\nabla}_U g)(V,W) = (\bar{\nabla}_V g)(U,W).$$

Moreover, an affine and torsion free connection $\bar{\nabla}^*$ is called a dual connection with respect to g, if

$$Ug(V,W) = g(\bar{\nabla}_U V, W) + g(V, \bar{\nabla}^*{}_U W).$$

An almost contact manifold $(\bar{M}, \varphi, \xi, \eta)$ with Riemannian metric g is an almost contact-like manifold if it has another (1,1)-tensor field φ^* satisfying

$$g(\varphi U,V)=-g(U,\varphi^* V), \qquad g(U,\xi)=\eta(U).$$

Let $(\bar{M},\varphi,\xi,\eta)$ be an almost contact-like manifold, then for all $U,V\in\tau(\bar{M})$ the following relations hold

$$g(\varphi U,\varphi^* V)=g(U,V)-\eta(U)\eta(V), \qquad \varphi^{*2}U=-U+\eta(U)\xi.$$

Definition. An almost contact-like manifold $(\bar{M},\bar{\nabla},\varphi,\xi,\eta,g)$ with statistical structure $(\bar{\nabla},g)$ is a statistical almost contact-like manifold. Moreover, $(\bar{M},\bar{\nabla},\varphi,\xi,\eta,g)$ is called a statistical cosymplectic manifold if

$$(\bar{\nabla}_U\varphi)V=0.$$

M is an invariant submanifold of a statistical cosymplectic manifold $(\bar{M},\bar{\nabla},\varphi,\xi,\eta,g)$, if for all $U\in\tau(M)$ we have $\varphi U\in\tau(M),\varphi^* U\in\tau(M)$.

Submanifolds of statistical cosymplectic manifolds

We show that the manifold $(\bar{M},\bar{\nabla},\varphi,\xi,\eta,g)$ is a statistical cosymplectic manifold if and only if $(\bar{M},\bar{\nabla}^*,\varphi^*,\xi,\eta,g)$ is a statistical cosymplectic manifold. Moreover we prove the following theorems.

Theorem. Any invariant submanifold of a statistical cosymplectic manifold with tangent structure vector field ξ, is a statistical cosymplectic and minimal-like submanifold.

Theorem. Let M be a submanifold of statistical cosymplectic manifold $(\bar{M},\bar{\nabla},\varphi,\xi,\eta,g)$ such that the structure vector field ξ is normal to M. Then for any vector field $U\in\tau(M)$ we have

$$A^*{}_\xi U=0, \quad \nabla^\perp{}_U\xi=\eta(\bar{\nabla}_U\xi)\xi.$$

Theorem. Let $(\bar{M},\bar{\nabla},\varphi,\xi,\eta,g)$ be a statistical cosymplectic manifold. If M is a submanifold of $\bar{M}$ and the structure vector field ξ is normal to M then

$$R^\perp(U,V)\xi=0, \qquad \forall U,V\in\tau(M).$$

Theorem. Let M be an invariant submanifold of statistical cosymplectic manifold $(\bar{M},\bar{\nabla},\varphi,\xi,\eta,g)$ and ξ is normal to M. Then M is a statistical Keahler-like manifold.

Conclusion

We introduce statistical cosymplectic manifolds and investigate some properties of their tensors. We define invariant and anti-invariant submanifolds and study invariant submanifolds with normal and tangent structure vector fields. We prove that an invariant submanifold of a statistical cosymplectic manifold with tangent structure vector field is a cosymplectic and minimal-like submanifold. Also we show if the structure vector field is normal to the submanifold then that is a statistical Keahler-like manifold

How to cite: Kazemi, M., Salahvarzi, Sh; (2022) Statistical Cosymplectic manifolds and their submanifolds. *Mathematical Researches*, 8 (2), 1-13

 Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

منیفلدهای دو-هم‌تافتهٔ آماری و زیرمنیفلدهای آنها

محمدباقر کاظمی[1] ✉، شیوا سلاح ورزی[2]

۱. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران. پست الکترونیکی:mbkazemi@znu.ac.ir
۲. گروه ریاضی، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران. پست الکترونیکی:s.salahvarzi@znu.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۲/۰۸
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۵/۰۶
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۵/۱۵
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۲/۳۱

واژه‌های کلیدی:

منیفلد آماری،
ساختار دو-هم‌تافته،
منیفلد شبه-کیلری آماری.

چکیده

در این مقاله منیفلدهای تقریبا تماسی خاص و دو-هم‌تافتهٔ آماری را تعریف کرده و برخی از خواص تانسورهای آن‌ها را بررسی می‌نماییم. ضمن معرفی زیرمنیفلدهای پایا و پاد-پایا، به مطالعهٔ زیرمنیفلدهای پایا با میدان برداری ساختاری مماس و نرمال می‌پردازیم. به ویژه ثابت می‌کنیم هر زیرمنیفلد پایای یک منیفلد دو-هم‌تافتهٔ آماری با میدان برداری ساختاری مماس، دو-همتافته آماری و شبه مینیمال است و اگر میدان برداری ساختاری نرمال باشد، زیرمنیفلد شبه-کیلری آماری است. به علاوه باساختن مثالی غیر بدیهی، درستی موارد فوق را در آن نشان می‌دهیم.

استناد: کاظمی، محمدباقر؛ سلاح‌ورزی، شیوا؛ (۱۴۰۱). منیفلدهای دو-هم‌تافتهٔ آماری و زیرمنیفلدهای آنها. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۲)، ۱۳-۱.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱. مقدمه

هندسهٔ اطلاع[1] یکی از جدیدترین و جالب‌ترین مفاهیمی است که بین دو شاخه مهم از علوم یعنی هندسهٔ دیفرانسیل و آمار و احتمالات به وجود آمده است. عنصر اصلی نظریهٔ هندسهٔ اطلاع نیز منیفلد آماری[2] است. فرض کنید $p(x,\zeta)$گردایه‌ای پارامتریک از توزیع‌های احتمال باشد که پارامتر $\zeta=[\zeta^1,\dots,\zeta^n]\in\mathbb{R}^n$ است. چنین مجموعه‌ای یک مدل یا منیفلد آماری را تشکیل می‌دهد. در حقیقت منیفلد آماری فضایی است که نقاط آن توزیع احتمال$p(x,\zeta)$ است. در حالت کلی بر روی یک منیفلد به صورت ذاتی متری وجود ندارد (در نتیجه صحبت از فاصله دو نقطهٔ در وهلهٔ اول بی معنی است). اما منیفلدهای آماری باتوجه به تعریفشان به شکل ذاتی دارای متری هستند که تشکیل یک متر ریمانی می‌دهد و متر فیشر یا متر اطلاع نامیده می‌شود. در نتیجه به کمک این متر می‌توان تحلیل بیشتر و بهتری از توزیع‌های احتمال داشت و مفاهیمی مانند فاصله،حجم، انحنا، انتقال موازی، ژئودزی و ... را بررسی کرد. به این ترتیب قدرت و توانایی روش‌های هندسهٔ اطلاع به کمک ابزارهای فوق، موجب کاربردهای آن در پردازش تصویر، پردازش سیگنال‌ها، آنتروپی، نظریهٔ ریسمان، نظریهٔ تخمین و ... شده است.

فرض کنید X زیرمجموعه ای از $\mathbb{R}$ و B سیگما-جبری روی فضای اندازه (X,B) است. مجموعه‌ی توانی$\rho(\mathrm{X})$ از توزیع‌های احتمال را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\rho(\mathrm{X})=\left\{p(\mathrm{X})\colon \mathrm{X}\to\mathbb{R}\,\middle|\,\mathrm{x}\in\mathrm{X}, p(\mathrm{x})\geq 0, \int_X p(x)dx=1\right\}.$$

به ازای مجموعه‌ی باز $\mathrm{U}\subset\mathbb{R}^n$ و توزیع احتمال p، یک مدل یا منیفلد آماری به صورت زیر تعریف می‌شود [۱]

$$\overline{\mathrm{M}}:=\left\{p(x;\zeta)\in\rho(X)\middle|\zeta=[\zeta^1,\dots,\zeta^n]\in\mathrm{U}\right\}.$$

ماتریس متقارن و مثبت معین gبا درایه‌های

$$g_{\mathrm{ij}}=\int_X\left(\frac{\partial}{\partial\zeta^i}logp(x;\zeta)\right)\left(\frac{\partial}{\partial\zeta^j}logp(x;\zeta)\right)p(x;\zeta)dx$$

متر فیشر نامیده می‌شود و $(\overline{\mathrm{M}},g)$ تشکیل یک منیفلد ریمانی می‌دهد. در بخش بعدی، این منیفلدها را از نقطه نظر هندسهٔ دیفرانسیل بیشتر بررسی خواهیم کرد و در اینجا فقط به یک مثال از این منیفلدها اشاره می‌کنیم.

توزیع گاوسی چند متغیره با میانگین‌های μ^i، $i=1,\dots,n$ و واریانس σ^2 را به صورت زیر در نظر بگیرید

[1]Information geometry
[2]Statistical manifold

$$p(x|\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x^i-\mu^i)^2)$$

بر اساس تعریف فوق، $(\bar{\mathrm{M}},g)$ که با این توزیع‌ها تشکیل می‌شود، یک منیفلد آماری $n+1$ بعدی با مختصات $\zeta=(\mu^1,\dots,\mu^n,\sigma^2)$ است.

از سوی دیگر، یکی از ساختارهای مهمی که بر روی منیفلدهای با بعد فرد وجود دارد، ساختار تقریبا تماسی[۳] است. با توجه به کاربرد این دسته از منیفلدها در فیزیک و مکانیک، امروزه مطالعات گسترده‌ای بر روی این منیفلدها انجام شده است. اخیرا منیفلدهای آماری که مجهز به ساختار تقریبا تماسی ساساکی باشند در مقالات [۴،۵] مورد مطالعه قرار گرفته و نتایج جالبی حاصل شده است. ما دراین مقاله منیفلدهای آماری که دارای ساختار تقریبا تماسی خاص و دو-هم‌تافته[۴] هستند را معرفی می‌نماییم. سپس به اثبات برخی خواص آن‌ها از جمله انتگرال‌پذیری توزیع افقی و دو-هم‌تافته بودن منیفلد با میدان تانسوری φ^* می‌پردازیم. در ادامه ویژگی زیرمنیفلدهای پایای این دسته از منیفلدها را در شرایطی که میدان برداری ساختاری مماس یا نرمال بر آن‌ها باشد را بررسی می‌نماییم. در پایان نیز دو مثال از این منیفلدها را ارائه می‌دهیم.

۲. منیفلدهای تقریبا تماسی خاص آماری

فرض کنید $(\bar{M},g)$ یک منیفلد ریمانی با التصاق لوی-چویتای[۵]$\hat{\bar{\nabla}}$باشد. مجموعهٔ همهٔ میدان‌های برداری هموار روی $\bar{M}$ رابا $\tau(\bar{M})$ نشان می‌دهیم.

منیفلد ریمانی $(\bar{M},g)$ یک منیفلد آماری [۱] نامیده می‌شود هرگاه مجهز به یک التصاق آفین و آزادتاب$\bar{\nabla}$باشد به طوری‌که برای هر $\mathrm{U},\mathrm{V},\mathrm{W}\in\tau(\bar{M})$

$$(\bar{\nabla}_U g)(V,W)=(\bar{\nabla}_V g)(U,W).\text{(۱)}$$

بر روی منیفلد آماری، التصاق آفین و آزادتاب $\bar{\nabla}^*$وجود دارد که

$$Ug(V,W)=g(\bar{\nabla}_U V,W)+g(V,\bar{\nabla}^* W).\text{(۲)}$$

[3] Almost contact structure
[4] Cosymplectic
[5] Levi-Civita connection

همچنین $\bar{\nabla}=(\bar{\nabla}^*)^*$ و $\bar{\nabla}^*$نیز در (۱) صدق می‌کند[3]. از سازگاری $\hat{\nabla}$ با متر g و رابطه‌ی (۲) ثابت می‌شود که $\hat{\nabla}=\frac{1}{2}(\bar{\nabla}+\bar{\nabla}^*)$. همچنین میدان(۲،۱)-تانسوری K، به صورت $K_U V=\bar{\nabla}_U V-\hat{\nabla}_U V$تعریف می‌شود.

از طرفی یکی از ساختارهای مهم بر روی یک منیفلد ریمانی ساختار تقریبا تماسی است.

اگر میدان (۱،۱)-تانسوری φ، میدان برداری ξ و ۱-فرمی η روی منیفلد $\bar{M}$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\varphi^2=-I+\eta\otimes\xi,\qquad \eta(\xi)=1 \tag{۳}$$

در این صورت $(\bar{M},\varphi,\xi,\eta)$را منیفلد تقریبا تماسی می‌نامند [۷].

تعریف ۱،۲.منیفلد تقریبا تماسی $(\bar{M},\varphi,\xi,\eta)$مجهز به متر ریمانی g که دارای میدان (۱،۱)-تانسوری دیگری مانند φ^* باشد را منیفلد تقریبا تماسی خاص می‌نامیم هرگاه برای هر $U,V\in\tau(\bar{M})$ در شرایط زیر صدق کند

$$g(\varphi U,V)=-g(U,\varphi^* V), \tag{۵}$$

$$g(U,\xi)=\eta(U). \tag{۶}$$

قضیهٔ ۱،۲. بر روی منیفلد تقریبا تماسی خاص$(\bar{M},\varphi,\xi,\eta)$، برای هر $U,V\in\tau(\bar{M})$ روابط زیر برقرار است

$$g(\varphi U,\varphi^* V)=g(U,V)-\eta(U)\eta(V),$$
$$\varphi^{*2}U=-U+\eta(U)\xi.$$

برهان. از آن‌جا که (φ,ξ,η) تقریبا تماسی است در رابطهٔ (۵) با قرار دادن φU به جای Uداریم

$$g(\varphi U,\varphi^* V)=-g(\varphi^2 U,V)=g(U,V)-\eta(U)\eta(V). \tag{۷}$$

با قرار دادن $\varphi^* V$ به جایVدر رابطهٔ (۵) و با استفاده از رابطه‌های (۶) و (۷) نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} g(U,\varphi^{*2}V)&=-g(\varphi U,\varphi^* V)=g(\varphi^2 U,V)=g(-U+\eta(U)\xi,V)\\ &=g(-U,V)+g(U,\xi)\eta(V)=g(U,-V+\eta(V)\xi).\end{aligned}$$

بنابراین $\varphi^{*2}V=-V+\eta(V)\xi$.□

همانند حالت تقریبا تماسی با محاسبهٔ مستقیم می‌توان نشان داد

$$\eta o\varphi^*=0,\qquad \varphi^*(\xi)=0,$$

به‌علاوه میدان (۲،۰)–تانسوری Φنیز روی $\bar{M}$به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Phi(U,V)=g(\varphi U,V).$$

تعریف ۳،۲.منیفلد تقریبا تماسی خاص$(\bar{M},\bar{\nabla},\varphi,\xi,\eta,g)$ که $(\bar{\nabla},g)$ یک ساختار آماری روی $\bar{M}$ است را منیفلد تقریباً تماسی خاص آماری می‌گوییم.

به علاوه منیفلدتقریباتماسی خاص آماری $(\bar{M},\bar{\nabla},\varphi,\xi,\eta,g)$ را یک منیفلد دو- هم‌تافتهٔ آماری گوییم هرگاه

$(\bar{\nabla}_U\varphi)V = 0.$(۸)

با قرار دادن $V=\xi$ در رابطه‌ی بالا و اثر دادن φ روی آن خواهیم داشت

$\bar{\nabla}_U\xi = \eta\left(\bar{\nabla}_U\xi\right)\xi.$(۹)

تعریف ۴٫۲. [۵] منیفلد تقریبا شبه-هرمیتی آماری $(\bar{M},g)$ یک منیفلد آماری با ساختار تقریبا مختلط می‌باشد که دارای میدان (۱،۱)-تانسوری دیگر مانند J^*است و برای هر $U,V\in\tau(\bar{M})$ در روابط زیر صدق می‌کند

$$J^2 = J^{*2} = -I, \qquad g(JU,V) = -g(U,J^*V).$$

اگر $(\bar{\nabla}_U J)V = 0$، آن‌گاه $(\bar{M},\bar{\nabla},J,g)$ را منیفلد شبه-کیلری[۶] آماری می‌نامند.

فرض کنید $(\bar{M},\bar{\nabla},g)$ یک منیفلد آماری و M زیر منیفلدی از آن باشد. متر القایی از $\bar{M}$ روی M را نیز با g نشان می‌دهیم. فرمول گاوس برای التصاق‌های ∇ و ∇^* به صورت زیر بیان می‌شود

$$\bar{\nabla}_U V = \nabla_U V + h(U,V), \tag{۱۰}$$

$$\bar{\nabla}^* V = \nabla^*{}_U V + h^*(U,V), \qquad \forall U,V\in\tau(M) \tag{۱۱}$$

که h و h^* تانسورهای انحناهای غوطه وری و ∇ و∇^*التصاق‌های القایی روی M هستند. با استفاده از خطی و آزاد تاب بودن التصاق‌های آماری $\bar{\nabla}$ و $\bar{\nabla}^*$، یک محاسبهٔ ساده نشان می‌دهد که ∇، ∇^* نیز خطی و آزادتاب بوده و التصاق‌های آماری روی M می‌باشند. علاوه براین ثابت می‌شود h، h^*نیز دو خطی و متقارن هستند [۶].

بردار انحنای میانگین H^* برای پایهٔ متعامد یکهٔ $\{e_i\}_{i=1}^n$روی زیرمنیفلدn-بعدی M به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathrm{H}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h^*(e_i,e_i).$$

هرگاه $H^*=0$ زیرمنیفلدM را شبه مینیمال گویند.

برای هر $Z\in\tau^{\perp}(M)$ و $U\in\tau(M)$ فرمول‌های وینگارتن التصاق‌های $\bar{\nabla}$ و $\bar{\nabla}^*$به صورت زیر است [۶]

$$\bar{\nabla}_U Z = -A^*{}_Z U + \nabla^{\perp}{}_U Z, \tag{۱۲}$$

$$\bar{\nabla}^*{}_U Z = -A_Z U + \nabla^{*\perp}{}_U Z, \tag{۱۳}$$

که‌و A A^* عملگرهای وینگارتن و $\nabla^{*\perp}$و $\nabla^{\perp}$ التصاق‌های نرمال روی M هستند.

---

[6]Kaehler-like manifold

برای هر $Z \in \tau^{\perp}(M)$ و $U,V \in \tau(M)$ ارتباط بین تانسور انحنای غوطه وری وعملگر وینگارتن به صورت زیر است

$$g(A_Z U,V) = g(h(U,V),Z), \qquad g(A^*{}_Z U,V) = g(h^*(U,V),Z). \tag{۱۴}$$

تانسور انحناهای ریمانی وابسته به التصاق‌های آماری $\nabla^{\perp}$ و ∇^* را با $\mathrm{R}^{\perp}$ و R^* نشان می‌دهیم و داریم

$$\mathrm{R}^{\perp}(U,V)W = [\nabla^{\perp}{}_U,\nabla^{\perp}{}_V]W - \nabla^{\perp}{}_{[U,V]}W,$$
$$R^*(U,V)W = [\nabla^*{}_U,\nabla^*{}_V]W - \nabla^*{}_{[U,V]}W.$$

فرض کنید (M,g)زیرمنیفلدی از منیفلد آماری دو- هم‌تافته$(\bar{M},\bar{\nabla},\varphi,\xi,\eta,g)$ است. M را زیرمنیفلد پایا گوییم

هرگاه به ازای هر $U \in \tau(M)$ داشته باشیم$\varphi^*U \in \tau(M)$ و $\varphi U \in \tau(M)$.

اگر برای هر $U \in \tau(M)$ ، φ^*U وφUدر $\tau^{\perp}(M)$ قرار بگیرد، آن‌گاه M را زیرمنیفلد پاد-پایا می‌نامیم.

۳. منیفلد آماری دو– هم‌تافته و زیرمنیفلدهای آن

قضیهٔ ۱،۳. منیفلد $(\bar{M},\bar{\nabla},\varphi,\xi,\eta,g)$ منیفلد دو–هم‌تافتهٔ آماری است اگر و تنها اگر $(\bar{M},\bar{\nabla}^*,\varphi^*,\xi,\eta,g)$ منیفلد دو- هم‌تافتهٔ آماری باشد.

برهان. برای هر $U,V,W \in \tau(\bar{M})$ داریم

$$\begin{aligned} g\big((\bar{\nabla}_W\varphi)U,V\big) &= g(\bar{\nabla}_W\varphi U,V) - g(\varphi\bar{\nabla}_W U,V) \\ &= Wg(\varphi U,V) - g(\varphi U,\bar{\nabla}^*{}_W V) + g(\bar{\nabla}_W U,\varphi^*V) \\ &= Wg(\varphi U,V) + g(U,\varphi^*\bar{\nabla}^*{}_W V) + Wg(U,\varphi^*V) - g(U,\bar{\nabla}^*{}_W\varphi^*V) \\ &= Wg(\varphi U,V) + g(U,\varphi^*\bar{\nabla}^*{}_W V) - Wg(\varphi U,V) - g(U,\bar{\nabla}^*{}_W\varphi^*V) \\ &= -g(U,(\bar{\nabla}^*{}_W\varphi^*)V) \end{aligned}$$

در نتیجه $\bar{\nabla}\varphi = 0$ اگر و فقط اگر $\bar{\nabla}^*\varphi^* = 0$. □

اگر M زیرمنیفلدی پایا از منیفلد دو-هم‌تافتهٔ آماری $(\bar{M},\bar{\nabla},\varphi,\xi,\eta,g)$ باشد به طوری که $\xi \in \tau(M)$، در این صورت می‌توان نوشت $TM = D \oplus \langle\xi\rangle$ که توزیع D متمم متعامد توزیع $\langle\xi\rangle$ است و توزیع افقی نامیده می‌شود.

لم ۲،۳. فرض کنید $(\bar{M},\bar{\nabla},\varphi,\xi,\eta,g)$ منیفلد دو-هم‌تافتهٔ آماری و M زیرمنیفلدی پایا از $\bar{M}$ است. آن‌گاه $\tau^{\perp}(M)$ و توزیع D، تحت φ و φ^* پایا هستند.

برهان. برای هر $V \in \tau(M)$ و $X \in \tau^{\perp}(M)$

$$g(\varphi^*X,V) = -g\big(X,\varphi \quad V\big) = 0,$$

بنابراین $\varphi^* X \in \tau^{\perp}(M)$. همچنین برای هر U مماس بر توزیع D،

$$g(\varphi^* U, \xi) = -g\big(U, \varphi \quad \xi\big) = 0,$$

پس هردو تحت φ^* پایا هستندو با اثبات مشابه نتیجه برای φ نیز حاصل می‌شود. □

گزارهٔ ۳,۳. فرض کنید M زیرمنیفلدی از منیفلد دو– هم‌تافتهٔ آماری $(\bar{M}, \bar{\nabla}, \varphi, \xi, \eta, g)$ و مماس بر میدان برداری ξ باشد. آن‌گاه توزیع افقی D انتگرال‌پذیر است.

برهان. برای هر $U, V \in \Gamma(D)$ با توجه به قضیهٔ ۱,۳، از دوگان رابطهٔ (۹) داریم

$$g([U,V],\xi) = g(\bar{\nabla}_U V, \xi) - g(\bar{\nabla}_V U, \xi) = Ug(V,\xi) - g(V, \bar{\nabla}^*{}_U \xi) - Vg(U,\xi) + g(U, \bar{\nabla}^*{}_V \xi)$$
$$= g(U, \eta(\bar{\nabla}^*{}_V \xi)\xi) - g(V, \eta(\bar{\nabla}^*{}_U \xi)\xi) = 0.$$

در نتیجه $[U,V] \in \Gamma(D)$ و D انتگرال‌پذیر است.□

قضیهٔ ۴,۳. فرض کنید M زیرمنیفلدی پایا از منیفلد دو–هم‌تافتهٔ آماری $(\bar{M}, \bar{\nabla}, \varphi, \xi, \eta, g)$ باشد که مماس بر میدان برداری ξ است. در این صورت M نیز منیفلد آماری دو–هم‌تافته خواهد بود.

برهان. برای هر میدان برداری $U, V \in \tau(M)$، با استفاده از فرمول گاوس به دست می‌آوریم

$$0 = (\bar{\nabla}^*{}_U \varphi)V = \bar{\nabla}^*{}_U \varphi V - \varphi \bar{\nabla}^*{}_U V = \nabla^*{}_U \varphi V + h^*(U, \varphi V) - \varphi\left(\nabla^*{}_U V + h^*(U,V)\right) \qquad (۱۵)$$

در رابطهٔ بالا با توجه به لم ۲,۳ و با مقایسهٔ قسمت‌های مماس و نرمال بر M نتیجه می‌شود

$$h^*(U, \varphi V) = \varphi h^*(U,V), \qquad (۱۶)$$

$$\nabla^*{}_U \varphi V - \varphi \nabla^*{}_U V = (\nabla^*{}_U \varphi)V = 0.$$

در نتیجه M نیز منیفلدی آماری و دو- هم‌تافته است.□

نتیجه۵,۳. در هر زیرمنیفلد پایا از منیفلد دو–هم‌تافتهٔ آماری که مماس بر میدان برداری ساختاری باشد داریم

$$h^*(\xi, \xi) = 0. \qquad (۱۷)$$

برهان. با جایگذاری ξ به جای V در رابطهٔ (۱۶) ملاحظه می‌شود $h^*(U,\xi) = 0$. بنابراین نتیجه برقرار است.□

قضیهٔ ۶,۳. هر زیرمنیفلد پایای یک منیفلد دو–هم‌تافتهٔ آماری که مماس بر ξ باشد، یک منیفلد شبه مینیمال است.

برهان. فرض کنیم M^{2m+1} زیرمنیفلد مورد نظر باشد. با درنظر گرفتن پایهٔ متعامد یکهٔ $\{e_i, \varphi e_i, \xi\}_{i=1}^{m}$ رابطهٔ زیر برقرار است

$$H^* = \frac{1}{2m+1}\{\sum_{i=1}^{m}\left(h^*(e_i,e_i) + h^*(\varphi e_i,\varphi e_i)\right) + h^*(\xi,\xi)\},$$

از طرفی بنابر (۱۶)

$$h^*(\varphi e_i,\varphi e_i) = \varphi^2 h^*\left(e_i,e_i\right) = -h^*(e_i,e_i),$$

رابطهٔ اخیر و (۱۷) نتیجه می‌دهد $H^* = 0$.□

قضیهٔ ۷,۳. فرض کنید M زیرمنیفلدی پایا از منیفلد دو-هم‌تافتهٔ آماری $(\bar{M},\bar{\nabla},\varphi,\xi,\eta,g)$ و مماس بر میدان برداری ξ است. آن‌گاه رابطهٔ زیر برای هر $U,V,W \in \tau(M)$ برقرار است

$$(\nabla_U\Phi)(\varphi V,\varphi^* W) = 2\, g(K_U V,\varphi^* W), \quad (۱۸)$$

که $K_U V = \nabla_U V - {\nabla^*}_U V$.

برهان. ابتدا با استفاده از رابطهٔ (۲) و دوگان رابطهٔ (۹) ثابت می‌کنیم $g(\xi,\nabla_U\varphi^* W) = 0$.

$$g(\xi,\nabla_U\varphi^* W) = Ug(\xi,\varphi^* W) - g({\nabla^*}_U\xi,\varphi^* W) = -Ug(\varphi\xi,W) - \eta({\nabla^*}_U\xi)g(\xi,\varphi^* W) = 0,$$

با استفاده از روابط (۶) و (۷) و تعریف تانسور K داریم

$$\begin{aligned}(\nabla_U\Phi)(\varphi V,\varphi^* W) &= U\Phi(\varphi V,\varphi^* W) - \Phi(\nabla_U\varphi V,\varphi^* W) - \Phi(\varphi V,\nabla_U\varphi^* W)\\ &= Ug(\varphi^2 V,\varphi^* W) - g(\varphi\nabla_U\varphi V,\varphi^* W) - g(\varphi^2 V,\nabla_U\varphi^* W)\\ &= -Ug(V,\varphi^* W) - g(\varphi((\nabla_U\varphi)V) + \varphi\nabla_U V),\varphi^* W) + g(V,\nabla_U\varphi^* W)\\ &\quad - \eta(V)g(\xi,\nabla_U\varphi^* W)\\ &= -Ug(V,\varphi^* W) + g(\nabla_U V,\varphi^* W) - \eta(\nabla_U V)g(\xi,\varphi^* W) + g(V,\nabla_U\varphi^* W)\\ &= -Ug(V,\varphi^* W) + g(\nabla_U V,\varphi^* W) + Ug(V,\varphi^* W) - g({\nabla^*}_U V,\varphi^* W)\\ &= 2\, g(K_U V,\varphi^* W).\end{aligned}$$

قضیهٔ ۸,۳. فرض کنید M زیرمنیفلدی از منیفلد دو– هم‌تافتهٔ آماری $(\bar{M},\bar{\nabla},\varphi,\xi,\eta,g)$ است به طوری که میدان برداری ξ نرمال به M باشد. آن‌گاه برای هر میدان برداری $U,V \in \tau(M)$ روابط زیر برقرار است

$${A^*}_\xi U = 0, \quad {\nabla^\perp}_U\xi = \eta\left(\bar{\nabla}_U\xi\right)\xi. \quad (۱۹)$$

برهان. با توجه به رابطهٔ (۱۲)

$$g(\bar{\nabla}_U\xi,V) = g\left(-{A^*}_\xi U,V\right) + g({\nabla^\perp}_U\xi,V) = -g\left({A^*}_\xi U,V\right),$$

از طرفی بنابر رابطهٔ (۹)داریم

$$g(\bar{\nabla}_U\xi,V) = g(\eta(\bar{\nabla}_U\xi)\xi,V) = 0.$$

دو رابطهٔ بالا حکم قضیه را نتیجه می‌دهد.□

قضیهٔ ۹،۳. فرض کنید $(\bar{M},\bar{\nabla},\varphi,\xi,\eta,g)$منیفلد دو-هم‌تافتهٔ آماری است. اگر M زیرمنیفلدی از $\bar{M}$ و میدان برداری ξ نرمال به M باشد، آن‌گاه

$$R^{\perp}(U,V)\xi=0,\qquad \forall U,V\in\tau(M) \tag{۲۰}$$

برهان. با توجه به تعریف $\mathrm{R}^{\perp}$ و به کمک رابطهٔ (۱۹) ثابت می‌شود که

$$\begin{aligned}R^{\perp}(U,V)\xi&=\nabla^{\perp}{}_U\nabla^{\perp}{}_V\xi-\nabla^{\perp}{}_V\nabla^{\perp}{}_U\xi-\nabla^{\perp}{}_{[U,V]}\xi\\&=\nabla^{\perp}{}_U(\eta(\bar{\nabla}_V\xi)\xi)-\nabla^{\perp}{}_V(\eta(\bar{\nabla}_U\xi)\xi)-\left(\eta\left(\bar{\nabla}_{[U,V]}\xi\right)\xi\right)\\&=\left(U\eta(\bar{\nabla}_V\xi)\right)\xi+\eta(\bar{\nabla}_V\xi)\nabla^{\perp}{}_U\xi-\left(V\eta(\bar{\nabla}_U\xi)\right)\xi-\eta(\bar{\nabla}_U\xi)\nabla^{\perp}{}_V\xi\\&-\left(\eta\left(\bar{\nabla}_{[U,V]}\xi\right)\xi\right)\\&=\left(U\eta(\bar{\nabla}_V\xi)\right)\xi+\eta(\bar{\nabla}_V\xi)\eta(\bar{\nabla}_U\xi)\xi\ -\left(V\eta(\bar{\nabla}_U\xi)\right)\xi-\eta(\bar{\nabla}_U\xi)\eta(\bar{\nabla}_V\xi)\xi\\&-\left(\eta\left(\bar{\nabla}_{[U,V]}\xi\right)\xi\right)=\{\left(U\eta(\bar{\nabla}_V\xi)\right)\xi-\left(V\eta(\bar{\nabla}_U\xi)\right)\xi-\left(\eta\left(\bar{\nabla}_{[U,V]}\xi\right)\xi\right)\\&=g(\bar{R}(U,V)\xi,\xi)\xi=0.\ \square\end{aligned}$$

قضیهٔ ۱۰،۳. فرض کنید M زیرمنیفلدی پایا از منیفلد دو-هم‌تافتهٔ آماری $(\bar{M},\bar{\nabla},\varphi,\xi,\eta,g)$ است. اگر ξ نرمال به M باشد، آن‌گاه M یک منیفلد شبه-کیلری آماری است.

برهان. از آن‌جا که ξ نرمال به M است برای $U\in\tau(M)$ داریم

$$\eta(U)=0,\qquad \varphi^2U=-U.$$

میدان (۱،۱)-تانسوری J و J^*را روی زیرمنیفلد M به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$J=\varphi|_M\,,\qquad J^*=\varphi^*|_M.$$

با یک محاسبهٔ مستقیم ملاحظه می‌شود

$$J^2=J^{*2}=-I,$$
$$g(JU,V)=g(\varphi U,V)=-g(U,\varphi^*V)=g(U,J^*V),\ \ \forall U,V\in\tau(M).$$

پس M یک منیفلد تقریباشبه-هرمیتی آماری است. از آن‌جا که $\bar{M}$ دو–هم‌تافتهٔ آماری است می‌توان نوشت

$$(\nabla_UJ)V=\nabla_UJV-J\nabla_UV=\nabla_U\varphi V-\varphi\nabla_UV=(\nabla_U\varphi)V=0.$$

در نتیجه M منیفلد شبه-کیلری آماری است.□

مثال ۱۱،۳. به عنوان یک مثال بدیهی، با فرض $\varphi=\varphi^*$، منیفلد تقریبا تماسی متری$(\bar{M},\varphi,\xi,\eta,g)$مجهز به التصاق های آماری $\bar{\nabla}$ و $\bar{\nabla}^*$ یک منیفلد تقریباتماسی خاص آماری است.

مثال ۱۲,۳.فرض کنید $\bar{M} = \mathbb{R}^5$ منیفلد ۵-بعدی با مولفه‌های مختصاتی$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ ومتر ریمانی g به صورت زیر است:

$$g = dx^1dx^1 + 2dx^2dx^2 + dx^3dx^3 + 2dx^4dx^4 + dx^5dx^5.$$

اگر$\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ یک پایظ متعامد یکه برای فضای مماس $T_p\bar{M}$ در نقطهٔ $p \in \bar{M}$ باشد، $\varphi\varphi^*$، ξ،و η را به صورت زیر بر روی $\bar{M}$ تعریف می‌کنیم:

$$\varphi(e_1) = -\sqrt{2}e_2, \varphi(e_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}e_1, \varphi(e_3) = -\sqrt{2}e_4, \varphi(e_4) = \frac{1}{\sqrt{2}}e_3, \varphi(e_5) = 0,$$

$$\varphi^*(e_1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \varphi^*(e_2) = \sqrt{2}e_1, \varphi^*(e_3) = -\frac{1}{\sqrt{2}}e_4, \varphi^*(e_4) = \sqrt{2}e_3, \varphi^*(e_5) = 0,$$

$$\xi = e_5, \quad \eta(\ \ ) = g(e_5,).$$

ملاحظه می‌شود که $(\bar{M}, \varphi\ \ , \xi, \eta, g)$ یک منیفلد تقریبا تماسی خاص است. حال به ازای $i, j = 1, \dots, 5$ برای کروشه لی فرض می‌کنیم $[e_i, e_j] = 0$. همچنین التصاق‌های $\bar{\nabla}$ و $\bar{\nabla}^*$ را به صورت زیر تعریف می‌نماییم:

$$\bar{\nabla}_{e_1}e_1 = -\bar{\nabla}_{e_2}e_2 = -e_2,\ \ \bar{\nabla}_{e_1}e_2 = \bar{\nabla}_{e_2}e_1 = -e_1,$$
$$\bar{\nabla}_{e_3}e_3 = -\bar{\nabla}_{e_4}e_4 = -e_4,\ \ \bar{\nabla}_{e_3}e_4 = \bar{\nabla}_{e_4}e_3 = -e_3,$$
$$\bar{\nabla}^*{}_{e_1}e_1 = -\bar{\nabla}^*{}_{e_2}e_2 = e_2,\ \ \bar{\nabla}^*{}_{e_1}e_2 = \bar{\nabla}^*{}_{e_2}e_1 = e_1,$$
$$\bar{\nabla}^*{}_{e_3}e_3 = -\bar{\nabla}^*{}_{e_4}e_4 = e_4,\ \ \bar{\nabla}^*{}_{e_3}e_4 = \bar{\nabla}^*{}_{e_4}e_3 = e_3,$$

و بقیه مولفه‌ها نیز صفر باشند. با محاسبهٔ مستقیم نتیجه می‌شود $(\bar{M}, \bar{\nabla}, \bar{\nabla}^*, g)$منیفلدی آماری است. بنابراین $(\bar{M}, \bar{\nabla}, \varphi, \xi, \eta, g)$ منیفلد تقریبا تماسی خاص آماری است.

حال$M = (u_1, u_2, 0,0,0)$که $u_1 = x_1$ و $u_2 = x_2$ را به عنوان زیرمنیفلد دو بعدی از$\bar{M}$ با متر القایی g در نظر بگیرید. فرض کنید $\{e_1 = \frac{\partial}{\partial u_1}, e_2 = \frac{\partial}{\sqrt{2}\partial u_2}\}$ یک پایهٔ متعامد یکه برای فضای مماس T_pM باشد. در نتیجه

$$\varphi(T_pM) \subset T_pM,\ \ \varphi^*(T_pM) \subset T_pM, \quad \forall p \in M.$$

التصاق های ∇ و ∇^* را به صورت زیر بر روی M در نظر می‌گیریم که از $(\bar{M}, g)$ القاء شده است.

$$\nabla_{e_1}e_1 = -\nabla_{e_2}e_2 = -e_2, \quad \nabla_{e_1}e_2 = \nabla_{e_2}e_1 = -e_1,$$
$$\nabla^*{}_{e_1}e_1 = -\nabla^*{}_{e_2}e_2 = e_2, \quad \nabla^*{}_{e_1}e_2 = \nabla^*{}_{e_2}e_1 = e_1.$$

ملاحظه می‌شود کهM زیرمنیفلد آماری پایا است که میدان برداری ξ نرمال به آن است.

علاوه براین با تعریف $J = \varphi|_M$ و$J^* = \varphi^*|_M$نتیجه می‌شود M منیفلد تقریباشبه-هرمیتی آماریاست.

References

1. Amari S., Nagaoka H., "Methods of information geometry", Transl. Math. Monogr.191., Amer. Math. Soc. (2000).

2. Aydin M.E., Mihai I., "Generalized Wintgen inequality for statistical submanifolds in statistical manifolds of constant curvature", Bull. Math. Sci. 7 (2017) 155-166.

3. Calin O., Udriste C., "Geometric Modeling in Probability and Statistics", Springer, Switzerland, (2014).

4. Furuhata H.,Hasegawa I., Okuyama Y., Sato K., Shahid M.H., "Sasakian statistical manifolds", J. Geom. Phys. 117 (2017) 179-186.

5. Takano K., "Statistical manifolds with almost contact structure and its statistical submersions", J. Geom. 85 (2006) 171-187.

6. Vos P.W., "Fundamental equations for statistical submanifolds with applications to the Bartlett correction", Ann. Inst. Statist. Math.41 (1989) 429-450.

7. Yano K., Kon M., "Structures on manifolds", World Scientific, (1984).