(نشریه علوم دانشگاه خوارزمی)

عملگرها و حساب دیفرانسیل روی δ-هوم-ابرجبرهای لی جردن

ولی‌اله خلیلی
دانشگاه اراک، دانشکدهٔ علوم پایه، گروه ریاضی

دریافت ۹۷/۰۳/۰۹ پذیرش ۹۷/۰۹/۰۷

چکیده

در این مقاله، به بررسی و مطالعه نوعی از عملگرهای دیفرانسیل رویδ -هوم-ابرجبرهای لی جردن می‌پردازیم. هم‌چنین، به تعریف نوعی از عملگرهای دیفرانسیل روی مدول‌های این دسته از جبرها می‌پردازیم. سرانجام، مفهوم نوعی از حساب دیفراسیل بر پایه مشتقات روی این دسته از جبرها را بررسی می‌کنیم و مثالی برای محقق‌سازی این مفاهیم می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: هوم-جبرهای لی، هوم-ابرجبرهای لی، مشتقات و نظریه کوهمولوژی روی هوم-ابرجبرهای لی.

مقدمه

در [۱۵]، δ-هوم-ابرجبرهای‌لی جردن[1] به‌عنوان تعمیمی از جبرهای‌لی جردن و ابرجبرهای‌لی جردن معرفی شد. یک δ-ابرجبر لی جردن یک سه‌تایی $(\mathcal{L}, [.,.], \delta)$ است که در آن $\mathcal{L}$ یک ابر فضای برداری و یک نگاشت دوخطی $[.,.]$ زوج که در خواص δ -پاد تقارن جردن و اتحاد δ -ژاکوبی جردن صدق کند (تعریف ۱). اگر $\delta = 1$ باشد، یک ابرجبر لی و اگر $\delta = -1$ باشد، یک ابرجبر لی جردن را به‌دست می‌دهد [۹]، [۱۸].

ساختار هوم-جبرهای لی، ارتباط تنگاتنگی با مباحث فیزیکی و به‌ویژه در جبرهای‌لی از میدان‌های برداری دارد. هوم-جبرهای‌لی به‌وسیلهٔ بسیاری از پژوهش‌گران بررسی شده است [۱۰]، [۱۱]، [۱۶]، [۱۷]، [۲۰]، [۲۱]. در حقیقت یک هوم-جبرلی یک سه‌تایی $(\mathcal{L}, [.,.], \alpha)$ است که $\mathcal{L}$ یک فضای برداری همراه با یک براکت دوخطی شبه متقارن که اتحاد ژاکوبی آن به‌وسیلهٔ یک نگاشت خطی روی $\mathcal{L}$ درگیر شود. حال اگر در یک هوم-جبرلی، خاصیت شبه متقارن براکت با شبه متقارن-جردن جای‌گزین شود آن‌گاه چهارتایی $(\mathcal{L}, [.,.], \delta, \alpha)$ یکδ -هوم-ابرجبرهای‌لی جردن است. بدیهی است که چهارتایی $(\mathcal{L}, [.,.], \delta, id_{\mathcal{L}})$ یکδ-ابرجبر لی جردن است.

در سال ۲۰۱۰، مفهوم هوم-ابرجبرهای لی به‌عنوان تعمیمی ازهوم-جبرهای لی مطرح شد [۱]، [۲]، [۳]. به‌عبارت دیگر، یک هوم-ابرجبر لی متشکل است از یک ابرفضای برداری همراه با یک براکت شبه متقارن زوج که در آن خاصیت اتحاد ابر-ژاکوبی به‌وسیلهٔ یک نگاشت خطی درگیر شود. اخیراً در سال ۲۰۱۷، خانواده‌ای از هوم-ابرجبرهای لی موسوم به δ-هوم-ابرجبرهای لی جردن که مفهوم کلیتری از هوم-ابرجبرهای لی و هوم-جبرهای لی است معرفی شده است [۱۵]. در این مقاله، قصد داریم به نوعی از مفهوم عملگر دیفرانسیل و حساب دیفرانسیل روی این خانواده از جبرها بپردازیم.

مفاهیم متعددی از عملگرهای دیفرانسیل و حساب دیفرانسیل روی جبرهای غیرشرکت‌پذیر وجود دارد [۵]، [۶]،

*نویسنده مسئول v-khalili@araku.ac.ir

1. δ −Hom-Jordan Lie superalgebras

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.13.4]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.191]

[۷]، [۸]. برحسب کاربردهایشان در مباحث فیزیکی و ریاضیات، نوعی از تعریف عملگر دیفرانسیل و مفهوم حساب دیفرانسیل را می‌توان در نظر گرفت. اما نمی‌توان یک تعریف کلاسیک را برای همه جبرهای غیرشرکت‌پذیر فرمول‌بندی کرد. با این وجود، برخی پژوهش‌گران به تعریف نوعی از عملگر دیفرانسیل و مفهوم نوعی از حساب دیفرانسیل روی خانواده‌ای از جبرهای غیرشرکت‌پذیر، نظیر جبرهای لی، ابرجبرهای لی و هوم-جبرهای لی پرداختند [۱۳]، [۱۴]، [۱۹]. به هرحال، نکته‌ای کلیدی وجود دارد که منجر به تعریف عملگر دیفرانسیل روی این جبرها می‌شود، آن نکته این است که، ارتباط تنگاتنگی بین تعریف عمل ضرب در این جبرها با مفهوم مشتقات روی این نوع جبرها وجود دارد. چونδ-هوم-ابرجبرهای لی جردن تعمیمی از جبرهای لی و هوم-جبرهای لی هستند، بنابراین، متعاقب بررسی عملگرها و حساب دیفرانسیل روی هوم-جبرهای لی، ما به بررسی عملگرها و حساب دیفرانسیل روی δ-هوم-ابرجبرهای لی جردن ترغیب شدیم.

در این مقاله، قصد داریم، ابتدا به تعریف یک نوع از عملگر دیفرانسیل از مرتبه دلخواه روی δ-هوم-ابرجبرهای لی جردن بپردازیم. سپس این مفاهیم را روی هوم-مدول‌های این جبرها بررسی کنیم. سرانجام به بررسی مفهوم حساب دیفرانسیل بر پایهٔ مشتقات روی این دسته از جبرها بپردازیم.

در خاتمه این مقدمه، به‌طور اختصار محتوای بخش‌ها در این مقاله را بیان می‌کنیم. در بخش دوم، تعاریف و نتایج اولیه را یادآوری می‌کنیم. بخش سوم، شامل تعریف عملگر دیفرانسیل از مرتبهٔ صفر و مراتب بالاتر روی δ-هوم-ابرجبرهای لی جردن و روی مدول‌های این دسته از جبرها است. در بخش چهارم مفهوم نوعی از حساب دیفرانسیل بر پایهٔ مشتقات از یک δ-هوم-ابرجبر لی جردن به‌کمک هوم –مختلط‌سازی شوالیه-ایلینبرگ[۱] بیان می‌شود. سرانجام در بخش آخرمثالی برای محقق‌سازی این مفاهیم می‌آوریم.

تعاریف اولیه

در سراسر این مقاله، $\mathbb{F}$ را یک میدان با مشخصه صفر و $\mathbb{Z}_2=\{o,1\}$ را یک گروه آبلی جمعی با دو عضو در نظر می‌گیریم. همهٔ فضاهای برداری را روی میدان $\mathbb{F}$ در نظر می‌گیریم و هم‌چنین فرض می‌کنیم $\delta=\pm 1$. برای یک ابرفضای برداری $\mathcal{L}$ که به‌وسیلهٔ $\mathbb{Z}_2-$ مدرج شده است، درجهٔ هر عضو همگن $x\in\mathcal{L}$ را با نماد $|x|$ نشان می‌دهیم.

۱. δ-هوم-ابرجبرهای لی جردن

در زیر به تعریفδ-ابرجبرهای لی جردن و سپس به تعریف δ-هوم-ابرجبرهای لی جردن می‌پردازیم.

تعریف ۱. [۱۸] یکδ-ابرجبر لی جردن ، یک *سه‌تایی*$(\mathcal{L},\ [.,.],\ \delta)$، *متشکل از یک ابرفضای برداری*$\mathbb{Z}_2-$ *مدرج* $\mathcal{L}$ *و یک نگاشت دو خطی زوج*

$$[.,.]:\mathcal{L}\times\mathcal{L}\to\mathcal{L};\left[\mathcal{L}_i,\mathcal{L}_j\right]\subset\mathcal{L}_{i+j},\quad \forall i,j\in\mathbb{Z}_2,$$

موسوم به براکت که در این شرایط صدق کند:

$$[x,y]=-\delta(-1)^{|x||y|}[y,x],\delta=\pm 1,\qquad \forall x,y\in\mathcal{L},$$
$$(-1)^{|x||z|}[x,[y,z]]+(-1)^{|y||x|}[y,[z,x]]+(-1)^{|z||y|}[z,[x,y]]=0,\forall x,y,z\in\mathcal{L}.$$

اگر $\delta=1$ یا ($\delta=-1$) آن‌گاه تعریف فوق یک ابرجبر لی (یا ابرجبر لی جردن) را به‌دست می‌دهد.

تعریف ۲. [۱۵]، یک δ-هوم-ابرجبر لی جردن ، یک *چهارتایی* $(\mathcal{L},[.,.],\ \delta,\ \alpha)$ *است که شامل یک ابرفضای*

1. Chevalley-Eilenberg

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.13.4]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.191]

برداری $\mathbb{Z}_2$*–مدرج* $\mathcal{L}$ *، یک نگاشت دو خطی زوج (موسوم به براکت) و یک نگاشت خطی*

$$\alpha: \mathcal{L} \to \mathcal{L},$$

که در این شرایط صدق کند:

- $[x, y] = -\delta(-1)^{|x||y|}[y, x], \quad \delta = \pm 1, \quad \forall x, y \in \mathcal{L},$
- $(-1)^{|x||z|}[\alpha(x), [y, z]] + (-1)^{|y||x|}[\alpha(y), [z, x]] + (-1)^{|z||y|}[\alpha(z), [x, y]] = 0, \forall x, y, z \in \mathcal{L}.$

اگر $\delta = 1$ آن‌گاه تعریف فوق یک هوم-ابرجبر لی را به‌دست می‌دهد.

تعریف ۳. *فرض کنید* $(\mathcal{L}, [.,.], \ \delta, \ \alpha)$ یک δ-هوم-ابرجبر لی جردن *باشد. اگر نگاشت خطی* α یک همریختی *جبرلی باشد، آن‌گاه* $(\mathcal{L}, [.,.], \ \delta, \ \alpha)$ *را* یک δ-هوم-ابرجبر لی جردن *ضربی نامیم و اگر* α یک خودریختی جبرلی *باشد، آن را* یک δ-هوم-ابرجبر لی جردن *منظم نامیم.*

مثال ۴. مثال‌های متعددی برای ساختن δ-هوم-ابرجبرهای لی جردن وجود دارد (مثال‌های ۲۰۵ و ۲۰۶ از مرجع [۱۵]). در این‌جا، قصد داریم مثالی از یک δ-هوم-ابرجبر لی جردن با بعد ۳ ارایه دهیم، که با یک δ-ابرجبر لی جردن شروع می‌شود. برای این منظور، فرض کنید $\mathcal{L}$ فضای برداری همهٔ ماتریس‌های ۳ × ۳ بدین‌صورت باشد:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall a, b, c \in \phi$$

جایی‌که ϕ یک ابرجبر شرکت‌پذیر است. قرار می‌دهیم:

$$\mathcal{V}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : b \in \phi \right\}, \quad \mathcal{V}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a, c \in \phi \right\} \qquad (۱)$$

در این‌صورت $\mathcal{L} = \mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1$ همراه با براکت زیر

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a' & b' \\ 0 & 0 & c' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] := \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - (-1)^{|a'||c|} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a'c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (۲)$$

یک δ-ابرجبر لی جردن است (مثال ۱۴ مرجع [۱۸]). حال قرار میدهیم:

$$\alpha: \mathcal{L} \to \mathcal{L}, \qquad \alpha := \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

در این‌صورت، با توجه به

$$[\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_0] = [\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1] = [\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_0] = 0, \qquad [\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_1] \subseteq \mathcal{V}_0$$

به‌راحتی می‌توان نشان داد که چهارتایی $(\mathcal{L}, [.,.], \ \delta, \ \alpha)$ یک δ-هوم-ابرجبر لی جردن منظم است.

تعریف ۵. *فرض کنیم* $(\mathcal{L}, [.,.]_{\mathcal{L}}, \ \delta, \ \alpha)$ و $(\mathcal{L}', [.,.]_{\mathcal{L}'}, \ \delta, \ \beta)$ دو δ-هوم-ابرجبرهای لی جردن باشند. یک *نگاشت خطی* $\theta: \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ *را یک ریختار از* δ-هوم-ابرجبرهای لی جردن *گوییم، هرگاه* $\theta \circ \alpha = \beta \circ \theta$*، به‌علاوه*

$$\theta([x, y]_{\mathcal{L}}) = [\theta(x), \theta(y)]_{\mathcal{L}'}, \qquad \forall x, y \in \mathcal{L}.$$

تعریف ۶. *یک زیرفضای* $\mathbb{Z}_2$*–مدرج* $\mathcal{H}$ *از* $\mathcal{L}$ *را یک هوم-زیرجبر از* $(\mathcal{L}, [.,.], \ \delta, \ \alpha)$ *نامیم هرگاه* $\alpha(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{H}$ *و به‌علاوه* $[\mathcal{H}, \mathcal{H}] \subset \mathcal{H}$. *هم‌چنین زیرفضای* $\mathbb{Z}_2$*–مدرج* I *از* $\mathcal{L}$ *را یک هوم-ایده‌آل از* $(\mathcal{L}, \ [.,.], \ \delta, \ \alpha)$ *نامیم هرگاه* $\alpha(I) \subseteq I$ *و به‌علاوه* $[I, \mathcal{L}] \subset I$. *مرکز* $\mathcal{L}$ *را با* $Z(\mathcal{L})$ *نشان می‌دهیم که عبارت است از :*

$$Z(\mathcal{L}) = \{x \in \mathcal{L}: [x, \mathcal{L}] = 0\}.$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.13.4]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.191]

۲. مشتقات روی δ-هوم-ابرجبرهای لی جردن

فرض کنید $(\mathcal{L},\ [.,.],\ \delta,\ \alpha)$ یک δ-هوم-ابرجبر لی جردن ضربی باشد. برای هر عدد صحیح نامنفی k، ترکیب k بار از نگاشت خطی α را با نماد α^k نشا ن می‌دهیم. اگر $(\mathcal{L},\ [.,.],\ \delta,\ \alpha)$ یک δ-هوم-ابرجبر لی جردن منظم باشد، ترکیب k بار نگاشت خطی همگن α^{-1} (معکوس α) را با α^{-k} نشان می‌دهیم.

تعریف ۷. *برای هرعدد صحیح نامنفی k ، نگاشت خطی همگن $D:\mathcal{L}\to\mathcal{L}$ را یک α^k- مشتق از δ-هوم-ابرجبر لی جردن ضربی $(\mathcal{L},\ [.,.],\ \delta,\ \alpha)$ گوییم، هرگاه $D\circ\alpha=\alpha\circ D$ و برای هر $x,y\in\mathcal{L}$ داشته باشیم*

$$D([x,y])=\delta^k[D(x),\alpha^k(y)]+\delta^k(-1)^{|D||x|}[\alpha^k(x),D(y)].$$

برای یک δ-هوم-ابرجبر لی جردن منظم، α^{-k} - مشتق را مشابه می‌توان تعریف کرد. مجموعه همهٔ α^k- مشتقات از یک δ-هوم-ابرجبر لی جردن ضربی $(\mathcal{L},\ [.,.],\ \delta,\ \alpha)$ را با $Der_{\alpha^k}(\mathcal{L})$ نشان می‌دهیم.

برای هرعضو همگن $x\in\mathcal{L}$ که درشرط $\alpha(x)=x$ صدق کند، تعریف می‌کنیم:

$$D_k(x):\mathcal{L}\to\mathcal{L}; D_k(x)(y)=\delta[x,\alpha^k(y)],\qquad \delta^k=1,\quad \forall y\in\mathcal{L}. \tag{۳}$$

بنابر لم ۳.۲ از [۱۵] نگاشت خطی $D_k(x)$ یک α^k- مشتق *از* δ-هوم-ابرجبر لی جردن *ضربی* $(\mathcal{L},\ [.,.],\ \delta,\ \alpha)$ است، که به $\alpha^{k+1}-$ مشتق داخلی موسوم است. مجموعه همهٔ α^k- مشتقات داخلی از یک δ-هوم-ابرجبر لی جردن ضربی $(\mathcal{L},\ [.,.],\ \delta,\ \alpha)$ را با $Inn_{\alpha^k}(\mathcal{L})$ نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر

$$Inn_{\alpha^k}(\mathcal{L})=\{\delta[x,\alpha^{k-1}(.)]:x\in\mathcal{L},\qquad \alpha(x)=x,\ \delta^k=1\}.$$

اکنون برای هر $D\in Der_{\alpha^k}(\mathcal{L})$ و هر $D'\in Der_{\alpha^s}(\mathcal{L})$ جابه‌جاگر $[D,D']$ را به‌صورت متعارف (۴) تعریف می‌کنیم

$$[D,D']=\ D\circ D'-(-1)^{|D||D'|}\ D'\circ D \tag{۴}$$

دراین صورت بنا برلم ۳.۳ از [۱۵] داریم:

$$[D,D']\in Der_{\alpha^{k+s}}(\mathcal{L}).$$

قرار می‌دهیم:

$$\mathrm{Der}(\mathcal{L})=\bigoplus_{k\geq 0}\mathrm{Der}_{\alpha^k}(\mathcal{L}).$$

تذکر ۸. *فرض کنید $(\mathcal{L},\ [.,.],\ \alpha)$ یک هوم-ابرجبر لی ضربی باشد. قرار می‌دهیم:*

$$Der_{\alpha^k}(\mathcal{L})=(Der_{\alpha^k}(\mathcal{L}))_0\oplus(Der_{\alpha^k}(\mathcal{L}))_1,$$

مجموعه همهٔ α^k- مشتقات روی هوم-ابرجبر لی $(\mathcal{L},\ [.,.],\ \alpha)$ و هم‌چنین

$$Der(\mathcal{L})=\bigoplus_{k\geq -1}Der_{\alpha^k}(\mathcal{L}).$$

بنا بر لم ۳.۲ از [۳] برای هر $D\in(Der_{\alpha^k}(\mathcal{L}))_i$ و $D'\in(Der_{\alpha^k}(\mathcal{L}))_j$، جایی‌که $k+s\geq -1, (i,j)\in\mathbb{Z}_2^2$ در این صورت

$$[D,D']\in(Der_{\alpha^{k+s}}(\mathcal{L}))_{|D|+|D'|}.$$

به‌عنوان نتایج مقدماتی، می‌توان این دو گزاره را بیان کرد:

گزارهٔ ۹. *فرض کنید $(\mathcal{L},\ [.,.],\ \delta,\ \alpha)$ یک δ-هوم-ابرجبر لی جردن ضربی باشد. در این صورت دوتایی*

$$(Der(\mathcal{L})=\oplus_{k\geq -1}Der_{\alpha^k}(\mathcal{L}),\ [.,.])\ ،$$

که براکت با رابطهٔ (۴) تعریف می‌شود، یک ابرجبر لی است.

برهان. به گزارهٔ ۲.۵ از مرجع [۳] رجوع شود.

گزارهٔ ۱۰. *فرض کنید $(\mathcal{L},\ [.,.],\ \delta,\ \alpha)$ یک δ-هوم-ابرجبر لی جردن ضربی باشد. در این صورت سه‌تایی*

$(Der(\mathcal{L}),\ [.,.],\ \tilde{\alpha})$، که در آن

$$\tilde{\alpha}: Der(\mathcal{L}) \to Der(\mathcal{L}); \qquad \tilde{\alpha}(D) = \alpha \circ D,$$

یک هوم-ابرجبر لی است.

برهان. به گزاره ۲.۶ از مرجع [۳] رجوع شود.

۳. نمایش‌ها و مدول‌ها

دراین بخش، ابتدا تعریف یک نمایش از یک δ-هوم-ابرجبر لی جردن ضربی را یادآوری می‌کنیم و سپس مفهوم مدول‌ها روی این دسته از جبرها را بیان می‌کنیم. سرانجام، خلاصه‌ای از نظریه کوهمولوژی این دسته از جبرها را معرفی می‌کنیم. این مطالب را خواننده به‌طور مفصل می‌تواند در مرجع [۱۵] ببیند.

تعریف ۱۱. *فرض کنید $(\mathcal{L},\ [.,.],\ \delta,\ \alpha)$ یک δ-هوم-ابرجبر لی جردن ضربی باشد. یک نمایش از $\mathcal{L}$ روی فضای برداری $\mathbb{Z}_2$–مدرج $\mathcal{V}$ متناظر با نگاشت خطی $A \in End(\mathcal{V})$، عبارت است از یک نگاشت خطی*

$$\rho_A: \mathcal{L} \to End(\mathcal{V})$$

که در این شرایط صدق کند:

$$\rho_A(\alpha(x)) \circ A = A \circ \rho_A(x), \qquad \forall x \in \mathcal{L}$$

$$\rho_A([x,y]) \circ A = \rho_A(\alpha(x)) \circ \rho_A(y) - (-1)^{|x||y|}\rho_A(\alpha(y)) \circ \rho_A(x), \quad \forall x,y \in \mathcal{L}$$

تعریف ۱۲. *فرض کنید $(\mathcal{L},\ [.,.],\ \delta,\ \alpha)$ یک δ-هوم-ابرجبر لی جردن ضربی $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1$، یک فضای برداری $\mathbb{Z}_2$–مدرج باشد. فرض کنید $A \in End(\mathcal{V})$. در این صورت سه تایی $(\mathcal{V},\ \cdot,\ A)$ را یک δ-هوم -مدول روی $\mathcal{L}$ گوییم، هرگاه نگاشت دو خطی*

$$\cdot: \mathcal{L} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}, \quad \mathcal{L}_i \cdot \mathcal{V}_j \subset \mathcal{V}_{i+j},$$

وجود داشته باشد که در این شرایط صدق کند:

- $\alpha(x) \cdot A(v) = A(x \cdot v), \forall x \in \mathcal{L}, \qquad \forall v \in \mathcal{V}$
- $[x,y] \cdot A(v) = \alpha(x) \cdot (y \cdot v) - \delta(-1)^{|x||y|}\alpha(y) \cdot (x \cdot v), \quad \forall x,y \in \mathcal{L}, \forall v \in \mathcal{V}$

تذکر ۱۳. *فرض کنید $(\mathcal{L},\ [.,.],\ \delta,\ \alpha)$ یک δ-هوم-ابرجبر لی جردن ضربی باشد و ρ_A یک نمایش از $\mathcal{L}$ روی فضای برداری $\mathbb{Z}_2$–مدرج $\mathcal{V}$ متناظر با نگاشت خطی $A \in End(\mathcal{V})$ باشد. در این صورت نگاشت دو خطی زوج*

$$\cdot: \mathcal{L} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}\ , \qquad x \cdot v = \rho_A(x)(v), \qquad \forall x \in \mathcal{L}, v \in \mathcal{V}.$$

را تعریف می‌کنیم. با محاسبات ساده، می‌توان نشان داد که سه‌تایی $(\mathcal{V},\ \cdot,\ A)$ یک δ -هوم -*مدول* روی $\mathcal{L}$ است. برعکس اگر سه‌تایی $(\mathcal{V},\ \cdot,\ A)$ یک δ-هوم-*مدول* روی $\mathcal{L}$ باشد، نگاشت خطی $\rho_A: \mathcal{L} \to End(\mathcal{V})$ با این ضابطه

$$\rho_A(x)(v) = x \cdot v; \qquad \forall x \in \mathcal{L}, v \in \mathcal{V},$$

یک نمایش از $\mathcal{L}$ روی ابرفضای برداری $\mathcal{V}$ متناظر با $A \in End(\mathcal{V})$ است.

مثال ۱۴. *فرض کنید $(\mathcal{L},\ [.,.],\ \delta,\ \alpha)$ یک δ-هوم-ابرجبر لی جردن ضربی و $\mathcal{V} = \mathbb{R}$ در این صورت بدیهی است که $End(\mathcal{V}) = \mathbb{R}$ و هر $A \in End(\mathcal{V})$ دقیقاً یک عدد حقیقی است که با r نشان می‌دهیم. اکنون نگاشت خطی $\rho: \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ را نگاشت صفر (بدیهی) در نظر می‌گیریم. دراین‌صورت ρ یک نمایش از δ-هوم-ابرجبر لی جردن ضربی $(\mathcal{L},\ [.,.],\ \delta,\ \alpha)$ متناظر با هر عدد حقیقی r است که آن را یک نمایش بدیهی از این جبر می‌نامیم.*

فرض کنید $(\mathcal{L},\ [.,.],\ \delta,\ \alpha)$ یک δ-هوم-ابرجبر لی جردن ضربی باشد. می‌توان $\mathcal{L}$ را به‌عنوان نمایشی روی خودش تحت عمل براکت متناظر با خودریختی α در نظر گرفت. این نمایش که به نمایش الحاقی موسوم است یکتا نیست چنان‌که در تعریف ۱۵ بیان می‌شود.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.13.4]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.191]

تعریف ۱۵. *برای هر عدد صحیح s، نمایش α^s-الحاقی از δ-هوم-ابرجبر لی جردن ضربی $(\mathcal{L},\ [.,.],\ \delta,\alpha)$ که با نماد ad_s نشان می‌دهیم، عبارت است از:*

$$ad_s(x)(y)=\delta[\alpha^s(x),y],\qquad \forall x,y\in\mathcal{L}.$$

بنا بر لم ۲.۶ از [۱۵]، نمایش α^s-*الحاقی* از $\mathcal{L}$ خوش‌تعریف است. به‌عبارت دیگر

$$ad_s(\alpha(x))\circ\alpha=\alpha\circ ad_s(x).$$

هم‌چنین

$$ad_s([x,y])\circ\alpha=ad_s(\alpha(x))\circ ad_s(y)-\delta(-1)^{|x||y|}ad_s(\alpha(y))\circ ad_s(x),\forall x,y\in\mathcal{L}.$$

سرانجام، به اختصار نظریه کوهمولوژی روی δ-هوم-ابرجبر لی جردن ضربی را بیان می‌کنیم:

فرض کنید $(\mathcal{L},\ [.,.],\ \delta,\ \alpha)$ یک δ-هوم-ابرجبر لی جردن *ضربی* و سه‌تایی $(\mathcal{V},\ \cdot,\ A)$ یک δ-هوم-*مدول* روی $\mathcal{L}$ باشد. فرض کنیم $x_1,x_2,\dots,x_k$، k عضو همگن از $\mathcal{L}$ باشند، در این صورت درجه یک عضو از $\wedge^k\mathcal{L}$ مانند $(x_1,x_2,\dots,x_k)$ را با نماد $|(x_1,x_2,\dots,x_k)|$ نشان می‌دهیم.

مجموعهٔ همهٔ $k-$هم‌زنجیرهای روی $\mathcal{L}$ با مقادیر در $\mathcal{V}$ را با نماد $C^k(\mathcal{L};\mathcal{V})$ نشان می‌دهیم و بر حسب تعریف، عبارت است از مجموعهٔ همهٔ نگاشت‌های k-خطی همگن $f:\wedge^k\mathcal{L}\to\mathcal{V}$ با این خاصیت است:

$$f(x_1,\dots,x_i,x_{i+1},\dots,x_k)=-\delta(-1)^{|x_i||x_{i+1}|}f(x_1,\dots,x_{i+1},x_i,\dots,x_k),\ \ 1\le i\le k-1.$$

در حالت خاص برای $k=0$ قرار می‌دهیم $C^0(\mathcal{L},\mathcal{V})=\mathbb{F}$. یک k-هوم-هم رنجیر روی $\mathcal{L}$ با مقادیر در $\mathcal{V}$ یک k-هم زنجیر $f\in C^k(\mathcal{L};\mathcal{V})$ است، به‌طوری‌که f با همریختی α سازگار باشد، به‌عبارت دیگر $f\circ\alpha=A\circ f$.
مجموعهٔ همهٔ k-هوم-هم زنجیرهای روی $\mathcal{L}$ با مقادیر در $\mathcal{V}$ را با نماد $C^k_{\alpha,\ A}(\mathcal{L};\mathcal{V})$ نشان می‌دهیم. پس داریم:

$$C^k_{\alpha,\ A}(\mathcal{L};\ \mathcal{V})=\{f\in C^k(\mathcal{L};\ \mathcal{V}):\qquad f\circ\alpha=A\circ f\}.$$

برای هر عدد صحیح مثبت $k\ge 1$ نگاشت خطی $d^k:C^k_{\alpha,\ A}(\mathcal{L};\mathcal{V})\to C^{k+1}_{\alpha,\ A}(\mathcal{L};\ \mathcal{V})$ با این ضابطه تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}d^k(f)(x_0,\dots,x_k)&=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i+|x_i|(|f|+|x_0|+\cdots+|x_{i-1}|)}\delta^i\alpha^{k-1}(x_i)\cdot f(x_0,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_k)\\&+\sum_{0\le i<j\le k}(-1)^{j+|x_j|(|x_{i+1}+\dots+|x_{j-1}|)}f(\alpha(x_0),\dots\alpha(x_{i-1}),[x_i,x_j],\\&\qquad\alpha(x_{i+1}),\dots,\hat{x}_j,\dots,\alpha(x_k)),\end{aligned}\tag{۵}$$

یک عملگر هم‌مرز است، جایی‌که $f\in C^k_{\alpha,\ A}(\mathcal{L};\ \mathcal{V})$، $|f|$ درجهٔ f، $x_0,x_1,\dots,x_k\in\mathcal{L}$ و نماد $\hat{x}$ به معنای حذف x است. بنا بر لم ۲.۴ از [۱۵]، نگاشت خطی d^k خوش‌تعریف است، یعنی $d^k(f)\circ\alpha=A\circ d^k(f)$.
هم‌چنین بنابر گزاره ۳.۴ از [۱۵]، زوج $(\bigoplus_{k>0}C^k_{\alpha,\ A}(\mathcal{L};\mathcal{V}),\{d^k\}_{k>0})$ یک مجتمع کوهمولوژی است. به‌عبارت دقیق‌تر $d^k\circ d^{k-1}=0$. در این صورت به‌طور معمول مفاهیم هم‌دورها، هم‌مرزها و هم‌چنین فضای کوهمولوژی را می‌توان بدین‌صورت تعریف کرد:

تعریف ۱۶. *فرض کنید* $(\mathcal{L},\ [.,.],\ \delta,\ \alpha)$ یک δ-هوم-ابرجبر لی جردن *ضربی باشد و سه‌تایی* $(\mathcal{V},\ \cdot,\ A)$ یک δ-هوم-*مدول روی* $\mathcal{L}$ *باشد. متناظر با عملگر هم‌مرز* $d^k:C^k_{\alpha,\ A}(\mathcal{L};\ \mathcal{V})\to C^{k+1}_{\alpha,\ A}(\mathcal{L};\ \mathcal{V})$ *که با* رابطهٔ (۵) *تعریف شده است، داریم:*

- فضای k-هوم-هم دورها که با نماد $Z^k(\mathcal{L};\ \mathcal{V})$ نشان می‌دهیم، عبارت است از:

$$Z^k(\mathcal{L};\ \mathcal{V})=\ker d^k=\{f\in C^k(\mathcal{L};\mathcal{V}):d^(f)=0\}$$

- فضای k-هوم-هم مرزها که با نماد $B^k(\mathcal{L};\ \mathcal{V})$ نشان می‌دهیم، عبارت است از:

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.13.4]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.191]

$$B^k(\mathcal{L};\ \mathcal{V}) = Imd^{k-1} = \{d^{k-1}(f): f \in C^{k-1}(\mathcal{L};\mathcal{V})\}$$

- فضای-k -امین کوهمولوژی که با نماد $H^k(\mathcal{L};\ \mathcal{V})$ نشان می‌دهیم، عبارت است از:

$$H^k(\mathcal{L};\ \mathcal{V}) = Z^k(\mathcal{L};\ \mathcal{V})/B^k(\mathcal{L};\ \mathcal{V}).$$

عملگرهای دیفرانسیل

مفهوم عملگرهای دیفرانسیل روی جبرهای شرکت‌ناپذیر را به‌راحتی نمی‌توان به‌عنوان تعمیمی از عملگرهای دیفرانسیل روی جبرهای شرکت‌پذیر در نظر گرفت. ما در این بخش تلاش می‌کنیم تا رده‌ای از عملگرهای دیفرانسیل را روی δ-هوم-ابرجبر لی جردن ضربی، متعاقب تعریف عملگرهای دیفرانسیل روی جبرهای لی که در [۱۹] آمده است، تعریف کنیم.

۱. عملگرهای دیفرانسیل روی δ-هوم-ابرجبرهای لی جردن

فرض کنید $(\mathcal{L},\ [.,.],\ \delta,\ \alpha)$ یک δ-هوم-ابرجبر لی جردن ضربی باشد. یادآوری می‌کنیم که دو تایی $(Der(\mathcal{L}),\ [.,.])$، که براکت با رابطهٔ (۴) تعریف می‌شود، یک ابرجبر لی است (گزارهٔ ۹). مفهوم مشتق درδ-هوم-ابرجبر لی جردن ضربی، ما را راهنمایی می‌کند که به تعریف نوعی از عملگرهای دیفرانسیل روی این دسته از جبرها دست یابیم.

تعریف ۱۷. *برای هر عدد صحیح نامنفی k، یک نگاشت خطی همگن $\varphi: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ را یک α^k-عملگر دیفرانسیل از مرتبهٔ صفر روی $\mathcal{L}$ گوییم، هرگاه $\varphi \circ \alpha = \alpha \circ \varphi$ و به‌علاوه*

$$\varphi([x,y]) = \delta^k[\varphi(x),\alpha^k(y)] = -\delta^k(-1)^{|x||\varphi|}[\alpha^k(x),\varphi(y)],\ \forall x,y \in \mathcal{L}. \qquad (۶)$$

مجموعهٔ همه α^k-عملگرهای دیفرانسیل از مرتبه صفر روی $\mathcal{L}$ را با نماد $Diff^0_{\alpha^k}(\mathcal{L})$ نشان می‌دهیم.

یک عملگر دیفرانسیل از مرتبهٔ صفر رویδ-هوم-ابرجبر لی جردن ضربی $(\mathcal{L},[.,.],\ \delta,\ \alpha)$ را می‌توان به‌عنوان عمل ضرب با تقریب یک اسکالر در نظر گرفت. یعنی

$$\varphi(x) = \lambda x, \qquad \forall x \in \mathcal{L}, \lambda \in \mathbb{F},$$

در این صورت داریم $Diff^0_{\alpha^k}(\mathcal{L}) = \mathbb{F}$.

گزاره ۱۸. *فرض کنیم φ یک α^k- عملگر دیفرانسیل از مرتبهٔ صفر و D یک α^s- مشتق رویδ-هوم-ابرجبر لی جردن ضربی $(\mathcal{L},\ [.,.],\ \delta,\ \alpha)$ باشند. در این صورت* $\varphi \circ D \in Der_{\alpha^{k+s}}(\mathcal{L})$.

برهان. فرض کنیم $\varphi \in Diff^0_{\alpha^k}(\mathcal{L})$ و $D \in Der_{\alpha^s}(\mathcal{L})$. بنا بر تعاریف ۱۷ و ۲۵، برای عناصر همگن دلخواه $x,y \in \mathcal{L}$داریم

$$\begin{aligned}(\varphi \circ D)([x,y]) &= \varphi\big(D([x,y])\big)\\ &= \varphi(\delta^s[D(x),\alpha^s(y)] + \delta^s\big(-1\big)^{|D||x|}[\alpha^s(x),D(y)]\big) \qquad (۷)\\ &= \delta^{s+k}[\varphi \circ D(x),\alpha^{k+s}(y)] - \delta^{s+k}(-1)^{|x|(|D|+|\varphi|)}[\alpha^{k+s}(x),\varphi \circ D(y)].\end{aligned}$$

هم‌چنین داریم

$$\begin{aligned}(\varphi \circ D) \circ \alpha &= \varphi \circ (D \circ \alpha)\\ &= \varphi \circ (\alpha \circ D)\\ &= (\varphi \circ \alpha) \circ D\\ &= (\alpha \circ \varphi) \circ D\\ &= \alpha \circ (\varphi \circ D) \qquad (۸)\end{aligned}$$

سر انجام بنا بر روابط (۷) و (۸)، نتیجه می‌گیریم که $\varphi \circ D \in Der_{\alpha^{k+s}}(\mathcal{L})$.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.13.4]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.191]

قضیه ۱۹. *فرض کنیم φ یک α^k- عملگر دیفرانسیل از مرتبهٔ صفر و D یک α^s- مشتق روی δ-هوم-ابرجبر لی جردن ضربی $(\mathcal{L},\ [.,.],\ \delta,\ \alpha)$ باشند. در این صورت $[\varphi,\ D] \in Diff^0_{\alpha^{k+s}}(\mathcal{L})$.*

برهان. فرض کنیم $\varphi \in Diff^0_{\alpha^k}(\mathcal{L})$ و $D \in Der_{\alpha^s}(\mathcal{L})$. بدیهی است که $\varphi \circ D$ یک نگاشت خطی همگن از درجه $|\varphi| + |D|$ است. اکنون بنا بر تعاریف ۱۷ و ۲۵، برای عناصر همگن دلخواه $x, y \in \mathcal{L}$ داریم

$$\begin{aligned}(\varphi \circ D)([x,y]) &= \varphi(\delta^s[D(x),\alpha^s(y)] + \delta^s(-1)^{|D||x|}[\alpha^s(x),D(y)]) \\ &= \delta^{k+s}[(\varphi \circ D)(x),\alpha^{k+s}(y)] + \delta^s(-1)^{|D||x|}\varphi([\alpha^s(x),D(y)]). \qquad (۹)\end{aligned}$$

از طرف دیگر

$$\begin{aligned}(D \circ \varphi)([x,y]) &= D(\delta^k[\varphi(x),\alpha^k(y)]) \\ &= \delta^{k+s}[(D\circ\varphi)(x),\alpha^{k+s}(y)] + \delta^{k+s}(-1)^{|D|(|x|+|\varphi|)}[(\alpha^s\circ\varphi)(x),(D\circ\alpha^k)(y)] \\ &= \delta^{k+s}[(D\circ\varphi)(x),\alpha^{k+s}(y)] + \delta^{k+s}(-1)^{|D||x|}(-1)^{|D||\varphi|}[(\varphi\circ\alpha^s)(x),(\alpha^k \circ D)(y)] \\ &= \delta^{k+s}[(D\circ\varphi)(x),\alpha^{k+s}(y)] + \delta^s(-1)^{|D||x|}(-1)^{|D||\varphi|}\varphi([\alpha^s(x),D(y)]). \qquad (۱۰)\end{aligned}$$

حال بنا بر تعریف براکت در رابطهٔ (۴) داریم:

$$[\varphi,D]([x,y]) = (\varphi\circ D)([x,y]) - (-1)^{|D||\varphi|}(D\circ\varphi)([x,y]). \qquad (۱۱)$$

اکنون، با جای‌گذاری روابط (۹) و (۱۰) در رابطهٔ (۱۱)، نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned}[\varphi,D]([x,y]) &= \delta^{k+s}[(\varphi\circ D)(x) - (-1)^{|D||\varphi|}(D\circ\varphi)(x),\alpha^{k+s}(y)] \\ &\quad +\delta^s((-1)^{|D||x|} - (-1)^{2|D||\varphi|}(-1)^{|D||x|})\varphi([\alpha^s(x),D(y)]) \\ &= \delta^{k+s}\Big[[\varphi,D](x),\alpha^{k+s}(y)\Big]. \qquad (۱۲)\end{aligned}$$

سرانجام بنابر تعریف ۱۷ از رابطهٔ (۱۲) نتیجه می‌شود که $[\varphi,D] \in Diff^0_{\alpha^{k+s}}(\mathcal{L})$.

با توجه به گزارهٔ ۱۸ و قضیهٔ ۱۹، می‌توان به تعریف عملگرهای دیفرانسیل از مرتبهٔ اول روی یک δ-هوم-ابرجبر لی جردن ضربی $(\mathcal{L},\ [.,.],\ \delta,\ \alpha)$ دست یافت.

تعریف ۲۰. *فرض کنید $(\mathcal{L},\ [.,.],\ \delta,\ \alpha)$ یک δ-هوم-ابرجبر لی جردن ضربی باشد. یک $\alpha^{k+s}-$ عملگر دیفرانسیل از مرتبهٔ اول روی $\mathcal{L}$ عبارت است از مجموع یک α^k- عملگر دیفرانسیل از مرتبهٔ صفر و یک α^s- مشتق روی $\mathcal{L}$.*

تذکر ۲۱. *اگر φ یک α^k- عملگر دیفرانسیل از مرتبهٔ صفر و D یک α^s- مشتق روی $\mathcal{L}$ باشند آن‌گاه بنا بر قضیهٔ ۱۹ $[\varphi,D]$ یک نگاشت خطی همگن از درجهٔ $|\varphi| + |D|$ است و اگر φ و D غیر جابه‌جایی باشند، بنا بر گزارهٔ ۱۸، نگاشت خطی $\varphi \circ D$ یک $\alpha^{k+s}-$ مشتق روی $\mathcal{L}$ است. هم‌چنین، بنا بر قضیهٔ ۱۹، نگاشت خطی همگن $[\varphi,D]$ یک $\alpha^{k+s}-$ عملگر دیفرانسیل از مرتبهٔ صفر است. اکنون بنا بر [۱۱]، عملگر خطی همگن $D\circ\varphi$ یک $\alpha^{k+s}-$عملگر دیفرانسیل از مرتبهٔ اول است.*

سرانجام به تعریف نوعی از عملگرهای دیفرانسیل از مراتب بالاتر روی یک δ-هوم-ابرجبر لی جردن ضربی می‌پردازیم.

تعریف ۲۲. *فرض کنید $(\mathcal{L},\ [.,.],\ \delta,\ \alpha)$ یک δ-هوم-ابرجبر لی جردن ضربی باشد. یک عملگر دیفرانسیل از مرتبهٔ $p > 1$ روی $\mathcal{L}$ عبارتست از ترکیب p عملگر دیفرانسیل از مرتبهٔ اول روی $\mathcal{L}$.*

از تعاریف، گزارهٔ ۱۸ و قضیهٔ ۱۹، دو نتیجهٔ ۲۳ و ۲۴ که خواص عملگرهای دیفرانسیل از مراتب بالاتر را بیان می‌کند، به‌راحتی به‌دست می‌آید.

نتیجهٔ ۲۳. *فرض کنید φ یک α^k- عملگر دیفرانسیل از مرتبهٔ p و φ' یک α^s- عملگر دیفرانسیل از مرتبه q روی $(\mathcal{L},\ [.,.],\ \delta,\ \alpha)$ باشند به‌طوری‌که $p,q > 1$. در این صورت $\varphi\circ\varphi'$ یک $\alpha^{k+s}-$ عملگر دیفرانسیل از مرتبهٔ*

$p+q$ روی $\mathcal{L}$ است.

نتیجهٔ ۲۴. *فرض کنید φ یک α^k- عملگر دیفرانسیل از مرتبهٔ p و φ' یک α^s- عملگر دیفرانسیل از مرتبهٔ q روی $(\mathcal{L},\ [.,.],\ \delta,\ \alpha)$باشند به‌طوری‌که $p>0, p\geq q$. در این صورت $[\varphi,\varphi']$ یک $\alpha^{k+s}-$ عملگر دیفرانسیل از مرتبهٔ q روی $\mathcal{L}$ است.*

۲. عملگرهای دیفرانسیل روی مدول‌ها

در این بخش به بررسی عملگرهای دیفرانسیل روی δ-هوم-مدول‌ها برایδ-هوم-ابرجبرهای لی جردن ضربی می‌پردازیم. برای این منظور فرض کنید $(\mathcal{L},\ [.,.],\ \delta,\ \alpha)$ یک δ-هوم-ابرجبر لی جردن ضربی و سه‌تایی $(\mathcal{V},\ \cdot,\ A)$یک δ -هوم-مدول روی $\mathcal{L}$ باشد .

تعریف ۲۵. *برای هر عدد صحیح نامنفی k, یک نگاشت خطی همگن $\varphi:\mathcal{V}\to\mathcal{V}$ را یک α^k- عملگر دیفرانسیل از مرتبهٔ صفر روی $\mathcal{V}$ گوییم, هرگاه $\varphi\circ A=A\circ\varphi$ و به‌علاوه*

$$\varphi(x\cdot v)=\delta^k(-1)^{|x||\varphi|}\alpha^k(x)\cdot\varphi(v), \forall x\in\mathcal{L}, v\in\mathcal{V}. \tag{۱۳}$$

مجموعه همهٔ α^k- *عملگرهای دیفرانسیل* از مرتبهٔ صفر روی $\mathcal{V}$ را با نماد $Diff^0_{\alpha^k}(\mathcal{V})$ نشان می‌دهیم.

یک عملگر دیفرانسیل از مرتبهٔ صفر رویδ -هوم-مدول‌ها را می‌توان به‌عنوان عمل ضرب با تقریب یک اسکالر در نظر گرفت. یعنی

$$\varphi(v)=\lambda v, \forall v\in\mathcal{V}, \lambda\in\mathbb{F},$$

در این صورت داریم $Diff^0_{\alpha^k}(\mathcal{V})=\mathbb{F}$. چنین عملگرهای دیفرانسیل از مرتبهٔ صفر را به‌وضوح می‌توان برای $\mathcal{V}=\mathbb{R}^3$ به‌عنوان یکδ -هوم-مدول رویδ -هوم-ابرجبر لی جردن ضربی $(\mathcal{L},[.,.],\delta,\alpha)$ که

$$\mathcal{L}=\begin{pmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{pmatrix},\ \ \forall a,b,c\in\mathbb{R},\qquad \alpha:\mathcal{L}\to\mathcal{L}, \alpha:=\begin{pmatrix}\delta&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

مشاهده کرد (مثال ۴ را ببینید).

اکنون با الهام از مفهوم یک مدول روی یک δ-هوم-ابرجبر لی جردن ضربی (تعریف ۱۲ را ببینید)، به تعریف نوعی از عملگرهای دیفرانسیل از مرتبهٔ اول روی هوم-مدول‌ها می‌رسیم.

تعریف ۲۶. یک $\alpha^{k+s}-$ *عملگر دیفرانسیل از مرتبهٔ اول روی*δ -هوم-مدول $\mathcal{V}$ *عبارت است از یک نگاشت خطی همگن* $\Delta:\mathcal{V}\to\mathcal{V}$ *که* $\Delta\circ A=A\circ\Delta$ *و به‌علاوه*

$$\Delta(x\cdot v)=D(x)\cdot A(v)+\varphi(x\cdot v),\quad \forall x\in\mathcal{L}, v\in\mathcal{V}, \tag{۱۴}$$

که در آن φ یک α^k- *عملگر دیفرانسیل* از مرتبهٔ صفر رویδ -هوم-مدول $\mathcal{V}$ و D یک α^s- *مشتق* رویδ-هوم-ابرجبر لی جردن ضربی $(\mathcal{L},\ [.,.],\ \delta,\ \alpha)$ است. مجموعهٔ همهٔ $\alpha^{k+s}-$ عملگرهای دیفرانسیل از مرتبهٔ اول روی δ-هوم-مدول $\mathcal{V}$ را با نماد $Diff^1_{\alpha^{k+s}}(\mathcal{V})$ نشان می‌دهیم.

گزارهٔ ۲۷. *فرض کنید* $(\mathcal{L},\ [.,.],\ \delta,\ \alpha)$ یکδ-هوم-ابرجبر لی جردن *ضربی و سه‌تایی* $(\mathcal{V},\ \cdot,\ A)$ یک δ -هوم-مدول روی $\mathcal{L}$ *باشد. در این صورت برای هر* $x\in\mathcal{L}$ *نگاشت خطی*

$$\Delta_x:\mathcal{V}\to\mathcal{V};\quad \Delta_x(v)=\alpha(x)\cdot v,\qquad v\in\mathcal{V},$$

یک α^1 -عملگر دیفرانسیل از مرتبهٔ اول روی $\mathcal{V}$ است.

برهان. فرض کنید سه‌تایی و سه‌تایی $(\mathcal{V},\ \cdot,\ A)$ یکδ-هوم-مدول روی $\mathcal{L}$ باشد. بنا بر تعریف ۱۲داریم:

$$\alpha(x)\cdot A(v)=A(x)\cdot v,$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.13.4]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.191]

به‌علاوه

$$[x,y]\cdot A(v)=\alpha(x)\cdot(y\cdot v)-\delta(-1)^{|x||y|}\alpha(y)\cdot(x\cdot v). \quad (۱۵)$$

اکنون از رابطهٔ (۱۵) به‌دست می‌آوریم

$$\alpha(x)\cdot(y\cdot v)=[x,y]\cdot A(v)+\delta(-1)^{|x||y|}\alpha(y)\cdot(x\cdot v). \quad (۱۶)$$

بنا بر تعریف ۱۵داریم:

$$ad_0(x):\mathcal{L}\to\mathcal{L}; ad_0(x)(y)=\delta[\alpha^0(x),y]=\delta[x,\alpha^0(y)],\quad \forall y\in\mathcal{L}. \quad (۱۷)$$

بنا بر رابطهٔ (۳) داریم $D_0(x)=ad_0(x)$ که یک α^0- مشتق (یا-α^1 -مشتق داخلی) روی $(\mathcal{L},\ [.,.],\ \delta,\ \alpha)$ است. هم‌چنین با تعریف نگاشت

$$\varphi_x:\mathcal{V}\to\mathcal{V};\qquad \varphi_x(v)=x\cdot v,\qquad \forall v\in\mathcal{V},$$

داریم

$$\varphi_x(y\cdot v)=\delta^1(-1)^{|y||\varphi|}\alpha(y)\cdot\varphi_x(v), \quad (۱۸)$$

که بنا برتعریف ۲۶ نگاشت خطی همگن φ_x یک α^1 -عملگر دیفرانسیل از مرتبهٔ اول روی $\mathcal{V}$ است. اکنون با به‌کار بردن روابط (۱۷) و (۱۸)، اگر رابطهٔ (۱۶) را بازنویسی کنیم, نتیجه می‌گیریم:

$$\Delta_x(y\cdot v)=D_0(x)(y)\cdot A(v)+\varphi_x(y\cdot v)\Delta_x(v). \quad (۱۹)$$

سرانجام, بنا بر تعریف ۲۶ رابطهٔ (۱۹) نشان می‌دهیم که, Δ_x یک $\alpha^{0+1}-$ عملگر دیفرانسیل از مرتبهٔ اول روی δ-هوم-مدول $\mathcal{V}$ است.

مثال ۲۸. *فرض کنید* $(\mathcal{L},[.,.],\delta,\alpha)$ یک δ-هوم-ابرجبر لی جردن *ضربی باشد. در این‌صورت* $\mathcal{L}$ *را به‌عنوان یک* δ-هوم-مدول *روی خودش تحت عمل براکت متناظر با همریختی* α *در نظر می‌گیریم. به‌عبارت دیگر* $\mathcal{L}=\mathcal{V}$ یک δ-هوم-مدول *الحاقی است. بنا بر گزارهٔ ۲۷، هر* α^1 -عملگر دیفرانسیل از مرتبهٔ اول روی $\mathcal{L}$ یک α^1 -عملگر دیفرانسیل از مرتبهٔ اول روی δ-هوم-مدول $\mathcal{V}$ *است* .

تذکر ۲۹. *اگر* $\varphi\in Diff^0_{\alpha^k}(\mathcal{V})$ *و* $\Delta\in Diff^1_{\alpha^s}(\mathcal{V})$ *در این صورت با محاسبات ساده می‌توان نشان داد* $\varphi\circ\Delta\in Diff^1_{\alpha^{k+s}}(\mathcal{V})$. *اگر چه* $[\varphi,\Delta]$ *نمی‌تواند یک عملگر دیفرانسیل از مرتبهٔ صفر روی* δ-هوم-مدول $\mathcal{V}$ *باشد. هم‌چنین براکت دو عملگر دیفرانسیل از مرتبهٔ اول روی*δ-هوم-مدول $\mathcal{V}$ *نیز نمی‌تواند یک عملگر دیفرانسیل از مرتبهٔ اول باشد* .

تعریف ۳۰. *فرض کنید* $\mathcal{V}$ یک δ-هوم-مدول *روی* $\mathcal{L}$ *باشد. یک عملگر دیفرانسیل از مرتبهٔ* $p>1$ *روی* $\mathcal{V}$ *عبارت است از ترکیب* p *عملگر دیفرانسیل از مرتبهٔ اول روی* $\mathcal{V}$.

با توجه به تذکر ۲۹ نتیجهٔ ۳۱ را می‌توان از تعریف ۳۰ به‌دست آورد .

نتیجهٔ ۳۱. *فرض کنید* $\Delta\in Diff^p_{\alpha^k}(\mathcal{V})$ *و* $\Delta'\in Diff^q_{\alpha^s}(\mathcal{V})$. *در این صورت*

$$\Delta\circ\Delta'\in Diff^{p+q}_{\alpha^{k+s}}(\mathcal{V}).$$

حساب دیفرانسیل

در این بخش, قصد داریم به مفهوم نوعی از حساب دیفرانسیل رویδ-هوم-ابرجبر لی جردن ضربی بپردازیم. متعاقب تعریف حساب دیفرانسیل روی جبرهای لی [۱۹] با به‌کاربردن کوهمولوژی روی این دسته از جبرها تلاش می‌کنیم که به تعریف نوعی از حساب دیفرانسیل روی یکδ-هوم-ابرجبر لی جردن ضربی $(\mathcal{L},\ [.,.],\ \delta,\ \alpha)$ دست یابیم.

۱. حساب دیفرانسیل روی δهوم- ابرجبرهای لی جردن ضربی

فرض کنید $(\mathcal{L},\ [.,.],\ \delta,\ \alpha)$ یکδ-هوم-ابرجبر لی جردن ضربی با مرکز $Z(\mathcal{L})$ باشد. بنا بر گزاره ۲۷ سه‌تایی $(Der(\mathcal{L}),\ [.,.],\ \tilde{\alpha})$، که در آن

$$\tilde{\alpha}: Der(\mathcal{L}) \to Der(\mathcal{L}), \qquad \tilde{\alpha}(D) = \alpha \circ D,$$

یک هوم-ابرجبر لی است. اکنون $\mathcal{L}$ را به‌عنوان یک $Der(\mathcal{L})$ -مدول با عمل زیر در نظر می‌گیریم

$$\cdot: Der(\mathcal{L}) \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}, \quad D \cdot x = D(x).$$

بنابراین سه تایی $(\mathcal{L},\ \cdot,\ \tilde{\alpha})$ یک هوم-مدول روی $Der(\mathcal{L})$ متناظر با $\tilde{\alpha}$ است. بنا بر آن‌چه که در بخش ۲ بیان شد، مجموعهٔ همه k -هوم-هم زنجیرهای روی $Der(\mathcal{L})$ با مقادیر در $\mathcal{L}$ که با نماد $C^k_{\tilde{\alpha}}(Der(\mathcal{L}),\ \mathcal{L})$ نشان می‌دهیم، در نظر می‌گیریم. ضابطهٔ عملگر هم مرز

$$d^k: C^k_{\tilde{\alpha}}(Der(\mathcal{L}), \quad \mathcal{L}) \to C^{k+1}_{\tilde{\alpha}}(Der(\mathcal{L}), \quad \mathcal{L}),$$

با رابطهٔ (۵) داده شده است. در این صورت زوج $(\bigoplus_{k\geq 0} C^k_{\tilde{\alpha}}(Der(\mathcal{L}),\mathcal{L}),\ \{d^k\}_{k>0})$ یک مجتمع کوهمولوژی است.

اکنون، به تعریف نوعی از حساب دیفرانسیل روی یکδ-هوم-ابرجبر لی جردن ضربی $(\mathcal{L},\ [.,.],\ \delta,\ \alpha)$ بر پایهٔ مشتقات روی $\mathcal{L}$ می‌پردازیم.

تعریف ۳۲. فرض کنید $(\mathcal{L},\ [.,.],\ \delta,\ \alpha)$ یکδ-هوم-ابرجبر لی جردن ضربی با مرکز $Z(\mathcal{L})$ باشد. مجتمع $(C^k_{\tilde{\alpha}}(Der(\mathcal{L}),\mathcal{L}),\ d^k)$ را به‌عنوان یک $Der(\mathcal{L})$ - مدول در نظر می‌گیریم. در این صورت یک زیرمجتمع از آن که شامل ریختارهای $Z(\mathcal{L})-$ چندخطی باشد، را یک α^k -حساب دیفرانسیل از $\mathcal{L}$ بر پایه α^k- مشتق از $\mathcal{L}$ می‌نامیم.

در این‌جا برای محقق‌سازی و بهتر فهمیدن تعریف ۳۲، به مفهوم حساب دیفرانسیل روی یکδ-هوم-ابرجبر لی جردن ضربی بدون مرکز می‌پردازیم. اگر همهٔ مشتقات $\mathcal{L}$ مشتقات داخلی باشند، یعنی $Der(\mathcal{L}) = Inn(\mathcal{L})$. در این صورت، می‌توان $\mathcal{L}$ را به‌عنوان زیر جبر پایا از $Der(\mathcal{L})$ در نظر گرفت. توجه می‌کنیم که عمل $Der(\mathcal{L})$ روی $\mathcal{L}$ بدین‌صورت تعریف می‌شود

$$\cdot : Der(\mathcal{L}) \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}; \qquad D \cdot x = [D, x].$$

حال مجموعه همهٔ نگاشت های-k -چند خطی شبه متقارن

$$f\colon \wedge^k Der(\mathcal{L}) \to \mathcal{L},$$

یکk -هوم-هم زنجیر با مقادیر در $\mathcal{L}$ روی $(Der(\mathcal{L}),\ [.,.],\widetilde{\alpha})$ را با نماد $C^k_{\tilde{\alpha},ad}(Der(\mathcal{L}),\ \mathcal{L})$ نشان می‌دهیم. دقت می‌کنیم که $C^k_{\tilde{\alpha},ad}(Der(\mathcal{L}),\ \mathcal{L})$ به‌عنوان یک $Der(\mathcal{L})$- مدول تحت عمل براکت متناظر با همریختی $\tilde{\alpha}$ است. در این صورت با قرار دادن $C^0_{\tilde{\alpha},ad}(Der(\mathcal{L}),\mathcal{L}) = \mathcal{L}$ ، هوم-هم‌زنجیر (۲۰) را به‌دست می‌آوریم

$$0 \to \mathcal{L} \xrightarrow{d^0} C^1_{\tilde{\alpha},ad}(Der(\mathcal{L});\mathcal{L}) \xrightarrow{d^1} \dots \xrightarrow{d^{k-1}} C^k_{\tilde{\alpha},ad}(Der(\mathcal{L});\mathcal{L}) \xrightarrow{d^k} \dots, \tag{۲۰}$$

جایی‌که عملگر هوم-هم مرز

$$d^k: C^k_{\tilde{\alpha},ad}(Der(\mathcal{L});\mathcal{L}) \to C^{k+1}_{\tilde{\alpha},ad}(Der(\mathcal{L});\mathcal{L}),$$

با این ضابطه تعریف می‌شود:

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.13.4]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.191]

$$d^k f(D_0,\dots,D_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{i+|D_i|(|f|+|D_0|+\cdots+|D_{i-1}|)}\, \delta^i[\tilde{\alpha}^{k-1}(D_i), f(D_0,\dots,\widehat{D}_i,\dots,D_k)] + \sum_{0\le i<j\le k} (-1)^{j+|D_j|(|D_{i+1}|+\cdots+|D_{j-1}|)} f(\tilde{\alpha}(D_0),\dots\tilde{\alpha}(D_{i-1}),[D_i,D_j],\tilde{\alpha}(D_{i+1}),\dots,\widehat{D}_j,\dots,\tilde{\alpha}(D_k)).$$

در حالت خاص داریم

$$d^0 x(D) = (-1)^{|x||D|}[D,x] = D(x), \qquad \forall x \in C^0_{\tilde{\alpha},ad}(Der(\mathcal{L}),\mathcal{L}) = \mathcal{L}. \tag{۲۱}$$

توجه می‌کنیم که، $D(x) \in Der_{\tilde{\alpha}^k}(\mathcal{L})$. همچنین داریم

$$d^1 f(D_1,D_2) = (-1)^{|f||D_1|}[D_1,f(D_2)] - (-1)^{|D_2|(|f|+|D_1|)}[D_2,f(D_1)] - f([D_1,D_2]). \tag{۲۲}$$

رابطهٔ (۲۲) نشان می‌دهد که، یک ۱-هوم-هم مرز f روی $(Der(\mathcal{L}),\ [.,.],\ \tilde{\alpha})$ در رابطهٔ (۲۳) صدق می‌کند

$$f([D_1,D_2]) = (-1)^{|f||D_1|}[D_1,f(D_2)] - (-1)^{|D_2|(|f|+|D_1|)}[D_2,f(D_1)]. \tag{۲۳}$$

به‌عبارت دقیق‌تر، $f \in C^1_{\tilde{\alpha},ad}(Der(\mathcal{L}),\ \mathcal{L})$ یک- $\tilde{\alpha}^k$ -مشتق از $\mathcal{L}$ با مقادیر در $\mathcal{L}$ است. همچنین رابطهٔ (۲۱) بیان می‌کند که هر ۰– هوم-هم مرز روی $(Der(\mathcal{L}),\ [.,.],\ \tilde{\alpha})$ یک $\tilde{\alpha}^k$– مشتق داخلی به‌صورت $D(x)$ است.

مثال: برای یک ابرجبر لی مفروض$\mathcal{L}$، اغلب در نظر گرفتن یک نگاشت خطی زوج روی $\mathcal{L}$، آن‌را به یک هوم-ابرجبر لی تبدیل می‌کند. چنین روندی را ساختار هوم-ابرجبر لی گوییم. به‌ویژه اگر این نگاشت یک همریختی ابرجبر لی باشد، آنرا ساختار هوم-ابرجبر لی ضربی نامیم. در سال ۲۰۱۳، کایو [۱] و لیو [۲] ثابت کردند که ساختار هوم-ابرجبر لی ضربی، روی خانواده ابرجبر لی ساده با بعد متناهی روی میدان اعداد مختلط، لزوماً یا یک خودریختی بدیهی یا یک خودریختی همانی است [۴]. سپس، در سال ۲۰۱۵ ساختار هوم-ابرجبرهای لی ضربی به‌وسیلهٔ یوآن [۳] و لی‌یو [۴] [۲۲]، با جزییات بیش‌تر روی همه ابرجبرهای لی کلاسیک با بعد متناهی روی میدان اعداد مختلط انجام شد. آنها ثابت کردند که نگاشت‌هایی که چنین ساختار را به‌دست می‌دهند لزوماً مضرب اسکالری از خودریختی همانی است.

در این مثال قصد داریم که حساب دیفرانسیل بر پایهٔ مشتق روی یکδ-هوم-ابرجبر لی ضربی را محاسبه کنیم. برای این منظور ابتدا به ساختن هوم-ابرجبر لی $osp(1,2)$ می‌پردازیم و سپس حساب دیفرانسیل روی آن‌را شرح می‌دهیم.

فرض کنید $osp(1,2) = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{V}_1$، ابر فضای برداری باشد که $\mathcal{V}_0$ توسط ماتریس‌های

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{۲۴}$$

و $\mathcal{V}_1$ به‌وسیلهٔ ماتریس‌های

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{۲۵}$$

تولید شود. ابتدا برای $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ضرب براکت ابرجبر لی را روی عناصر پایه بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$[H,X]_\lambda = 2\lambda^2 X, \qquad [H,Y]_\lambda = \frac{-2}{\lambda^2}Y, \qquad [Y,G]_\lambda = \frac{1}{\lambda}F, \qquad [X,F]_\lambda = \lambda G = [H,G]_\lambda$$

1. Cao
2. Luo
3. Yuan
4. Liu

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.13.4]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.191]

$$[H,F]_\lambda = \frac{-1}{\lambda}F,\qquad [G,F]_\lambda = H,\qquad [G,X]_\lambda = 0 = [Y,F]_\lambda,\qquad [G,G]_\lambda = -2\lambda^2 X,$$
$$[F,F]_\lambda = \frac{2}{\lambda^2}Y.$$

در این صورت زوج $(osp(1,2),\ [.,.]_\lambda)$ یک ابرجبر لی بدون مرکز است. بنابراین همه مشتقات روی این ابرجبر لی داخلی هستند و داریم $Der(osp(1,2)) = osp(1,2)$. اکنون نگاشت خطی

$$\alpha_\lambda: osp(1,2) \to osp(1,2)$$

را با ضابطهٔ (۲۶) در نظر می‌گیریم.

$$\alpha_\lambda(x) = \lambda^2 X,\ \ \alpha_\lambda(Y) = \frac{1}{\lambda^2}Y,\ \ \alpha_\lambda(H) = H,\ \ \alpha_\lambda(F) = \frac{1}{\lambda}F,\ \ \alpha_\lambda(G) = \lambda G. \tag{۲۶}$$

در این صورت سه‌تایی $(osp(1,2),\ [.,.]_\lambda,\ \alpha_\lambda)$ یک هوم-ابرجبر لی است که اگر $\lambda \neq 1$، یک ابرجبر لی نمی‌تواند باشد [۳].

اکنون، فرض می‌کنیم $\mathcal{V} = \mathbb{C}$. به‌عبارت دیگر با تعریف نگاشت

$$\rho: osp(1,2) \to End(\mathcal{V}) = \mathbb{C}$$

یک نمایش بدیهی روی هوم-ابرجبر لی $osp(1,2)$متناظر با $id_\mathbb{C}$ داریم. بنابراین سه‌تایی $(\mathbb{C},\ 0,\ id_\mathbb{C})$ یک هوم-مدول برای $osp(1,2)$است. مجموعه همه $k-$ هم‌زنجیر روی $osp(1,2)$ با مقادیر در $\mathbb{C}$ را با نماد $C^k(osp(1,2),\ \mathbb{C})$ نشان می‌دهیم. پس مجموعه همه $k-$ هوم-هم زنجیرهای روی $osp(1,2)$ با مقادیر مختلط عبارت است از:

$$C^k_{\alpha_\lambda, id_\mathbb{C}}(osp(1,2);\mathbb{C}) = \{f \in C^k(osp(1,2),\mathbb{C}) : f\circ\alpha = f\}.$$

قرار می‌دهیم $C^0_{\alpha_\lambda, id_\mathbb{C}}(osp(1,2);\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. برای هر عدد صحیح مثبت $k \geq 1$ عملگر هم‌مرز

$$d^k: C^k_{\alpha_\lambda, id_\mathbb{C}}(osp(1,2);\mathbb{C}) \to C^{k+1}_{\alpha_\lambda, id_\mathbb{C}}(osp(1,2);\mathbb{C})$$

با ضابطهٔ (۲۷) تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} d^k(f)(x_0,\dots,x_k) &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^{i+|x_i|(|f|+|x_0|+\dots+|x_{i-1}|)}[\alpha_\lambda^{k-1}(x_i), f(x_0,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_k]_\lambda \\ &+ \sum_{0\le i<j\le k} (-1)^{j+|x_j|(|x_{i+1}+\dots+|x_{j-1}|)} f(\alpha_\lambda(x_0),\dots\alpha_\lambda(x_{i-1}),[x_i,x_j]_\lambda, \\ &\qquad \alpha_\lambda(x_{i+1}),\dots,\hat{x}_j,\dots,\alpha_\lambda(x_k)). \end{aligned} \tag{۲۷}$$

جایی‌که $f \in C^k_{\alpha_\lambda, id_\mathbb{C}}(osp(1,2);\ \mathbb{C})$، $|f|$درجهٔ f، $x_0, x_1, \dots, x_k \in\ osp(1,2)$ و نماد $\hat{x}$ به‌معنای حذف x است. بنابراین زوج $(\bigoplus_{k>0} C^k_{\alpha_\lambda, id_\mathbb{C}}(osp(1,2);\mathbb{C}),\ \{d^k\}_{k>0})$ یک مجتمع کوهمولوژی روی هوم-ابرجبر لی $(osp(1,2),[.,.]_\lambda,\ \alpha_\lambda)$است. به عبارت دیگر

$$d^k \circ d^{k-1}(f) = 0,\qquad \forall f \in C^k_{\alpha_\lambda, id_\mathbb{C}}(osp(1,2);\mathbb{C}).$$

بنا بر تعریف ۳۲، حساب دیفرانسیل روی هوم-ابرجبر لی $(osp(1,2),\ [.,.]_\lambda,\ \alpha_\lambda)$عبارت است از زیر هوم-مجتمع

$$0 \to \mathbb{C} \overset{d^0}{\to} C^1_{\alpha_\lambda, id_\mathbb{C}}(osp(1,2);\mathbb{C}) \overset{d^1}{\to}\dots\overset{d^4}{\to} C^5_{\alpha_\lambda, id_\mathbb{C}}(osp(1,2);\mathbb{C}). \tag{۲۸}$$

بنا بر رابطهٔ (۲۱) فضای ۰− هوم-هم‌دورها همان مشتقات داخلی روی هوم-ابرجبر لی $(osp(1,2),\ [.,.]_\lambda,$ $\alpha_\lambda)$است. به‌عبارت دیگر

$$Z^0(osp(1,2);\mathbb{C}) = InnDer(osp(1,2);\mathbb{C}).$$

هم‌چنین، بنا بر رابطهٔ (۲۳) فضای ۱− هوم-هم دورها نیز عبارت است از فضای همه α_λ^k- مشتقات روی هوم-ابرجبر لی $(osp(1,2),\ [.,.]_\lambda,\ \alpha_\lambda)$، به‌عبارت دیگر

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.13.4]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.191]

$$Z^1(osp(1,2);\mathbb{C}) = Der(osp(1,2);\mathbb{C}) = osp(1,2).$$

اکنون فرض کنید $f \in C^2_{\alpha_\lambda, id_{\mathbb{C}}}(osp(1,2);\mathbb{C})$. بنابر ضابطهٔ عملگر ۲−هوم-هم مرز اسکالری، به‌صورت (۲۹) است

$$d^2(f)(D_0,D_1,D_2) = -f([D_1,f(D_2)]_\lambda, \alpha_\lambda(D_2)) + (-1)^{|D_2||D_1|} f([D_0,D_2]_\lambda, \alpha_\lambda(D_1)) + f(\alpha_\lambda(D_0),[D_1,D_2]_\lambda). \quad (۲۹)$$

حال فرض می‌کنیم f یک ۲− هم دور از $(osp(1,2),\ [.,.]_\lambda,\ \alpha_\lambda)$ باشد. در این صورت داریم:

$$f(\alpha_\lambda(D_0),[D_1,D_2]_\lambda) = f([D_1,D_2]_\lambda, \alpha_\lambda(D_2)) - (-1)^{|D_2||D_1|} f([D_0,D_2]_\lambda, \alpha_\lambda(D_1)) \quad (۳۰)$$

با جای‌گزینی سه‌تایی (H,X,F) به‌جای (D_0,D_1,D_2) در رابطهٔ (۳۰) داریم:

$$f(\alpha_\lambda(H),[X,F]_\lambda) = f([H,X)]_\lambda, \alpha_\lambda(F)) + f([H,F]_\lambda, \alpha_\lambda(X)).$$

بنابر تعریف براکت و رابطهٔ (۲۶) داریم:

$$f(H,\lambda G) = f(2\lambda^2 X, \frac{1}{\lambda}F) + f(\frac{-1}{\lambda}F, \lambda^2 X),$$

در نتیجه

$$\lambda f(H,G) = 2\lambda f(X,F) - \lambda f(F,X) = \lambda f(X,F).$$

بنابراین به‌دست می‌آوریم $f(H,G) = f(X,F)$. به‌طور مشابه اگر سه‌تایی‌های زیر را

$$(H,X,Y),(H,X,G),(H,Y,G),(X,Y,F),(X,F,G),(Y,F,G),$$
$$(H,Y,F),\quad (X,Y,G),\quad (H,F,G),\quad (H,F,F),\quad (H,G,G),\quad (X,G,G),$$

همانند بالا اگر به‌جای (D_0,D_1,D_2) در رابطهٔ (۳۰) جای‌گزین کنیم به‌دست می‌آوریم:

$$f(G,X) = 0 = f(F,Y),\quad f(H,F) = f(G,Y),\quad f(X,Y) = f(G,F),$$
$$f(G,G) = f(X,H), f(F,F) = f(Y,H).$$

حال اگر نگاشت خطی $g: osp(1,2) \to \mathbb{C}$ را با این ضابطه تعریف کنیم:

$$g(X) = \frac{1}{2\lambda^2} f(H,X),\qquad g(Y) = \frac{-\lambda^2}{2} f(H,Y),$$
$$g(F) = \frac{1}{\lambda} f(H,G),\qquad g(H) = f(X,Y),$$

در این صورت داریم $g \in C^1(osp(1,2);\mathbb{C})$ و هم‌چنین

$$d^1(g)(D_0,D_1) = (-1)^{|f||D_1|}[D_1,g(D_2)] - (-1)^{|D_2|(|f|+|D_1|)}[D_2,g(D_1)] - g([D_1,D_2]). \quad (۳۱)$$

با جای‌گزاری زوج‌های

$$(H,X),(H,Y),(Y,G),(X,F),(H,G),(H,F),(G,F),(G,X),(Y,F),(G,G),(F,F)$$

به‌جای زوج (D_0,D_1) در رابطهٔ (۳۱) با محاسبات ساده نتیجه می‌گیریم $d^1(g) = f$. به‌عبارت دیگر

$$Z^2(osp(1,2);\mathbb{C}) = Derosp(1,2) = B^2(osp(1,2);\mathbb{C}).$$

به‌طور مشابه می‌توان فضای $k-$ هوم-هم مرزها و $k-$ هوم-هم دورها را برای $k = 3,4,5$ نیز محاسبه کرد .

منابع

1. Ammar F., Ejbehi Z., Makhlouf A., "Cohomology and deformations of hom-algebras", J. Lie Theory, 24 (4) (2011) 813-836.
2. Ammar F., Makhlouf A., "Hom-Lie superalgebras and Hom-Lie admissible superalgebras",

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.13.4]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.191]

J. Algebra 324 (7) (2010) 1513-1528.

3. Ammar F., Makhlouf A., Saadoui M., "Cohomology of Hom-Lie superalgebras and q-deformed Witt superalgebra", Czechoslovak Math. J 63 (138) (3) (2013) 721-761.

4. Cao B., Luo L., "Hom-Lie superalebra structures on finite-dimensional simple Lie superalebras", J. Lie theory, 23 (2013) 1115-1128.

5. Connes A., "Non-commutative geometry", Academic Press (1994).

6. Connes A., "Non-commutative diff geometry", publi, I.H.E.S. 62 (1986) 257.

7. Dubois-Violette M., "Derivations etcalcul differentiel non commutatif", C. R. Acad. Sci. Paris, seris I 307 (1988) 403-408.

8. Dubois-Violette M., "Lectures on graded differential algebras and non-commutative geometry", eds, Y. Maeda and H. Moriyoshi, in Noncommutative Differential-Geometry and its Applications to physics(Klower Acadamic publishers, 2001).

9. Gao W., Chen L., "Algebra of quotients of Jordan Lie algebras", Comm. Algebra 44 (9) (2016) 3788-3795.

10. Hartwing J. T.,, Larsoon D., Silvestrov S., "Quassi-hom-Lie algebras and central extensions and 2-cocycle-like identities", J. Algebra 288(2) (2005) 321-344.

11. Larsoson D., Silvestrov S., "Deformations of Lie algebras using $\sigma-$derivations", J. Algebra 295 (2006) 314-361

12. Jin Q., Li X., "Hom-Lie algebra structures on semi-simple Lie algebras", J. Algebra 319 (2008) 1398-1408.

13. Khalili V., "Defferential calculus on Lie algebras", Ser. Math. Inforum, 31(2) (2015) 299-313.

14. Khalili V., "Defferential operators and defferential calculus on Hom-Lie algebras", To appear in ADM.

15. Ma L., Chen L., Zhao J., "$\delta-$Hom-Jordan Lie superalgebr", Comm. Algebra 46, No. 4 (2017).

16. Makhlouf M., Silvestrov S., "Hom-algebras and Hom-coalgebras structure", J. Algebra. Appl., 9 (4) (2010) 553-589.

17. Makhlouf M., Silvestrov S., "Hom-algebra structure", J. Gen. Lie Theory Appl. 2 (2) (2008) 51-64.

18. Okubo S., Kamiya N., "Jordan Lie superalgebra and Jordan-Lie triple system", J. Algebra 198 (2) (1997) 388-411.

19. Sardanashvily G., "Differential operators on Lie and graded Lie algebras", arXiv:1004.0058VI [Math-Ph] Apr 2010.

20. Sheng Y., "Representations of Hom-Lie algebras", Algebra Represent. Theory 16 (6)

(2012) 1081-1098.

21. Sheng Y., Xiong Z., "On Hom-Lie algebras, Linear and multilinear Algebra", 63, (2015) 2379-2395.

22. Yuau J., Liu W., "Hom-structures on finite-dimensional simple Lie superalebras", J. Math. Phys., 56 (6) (2015) 061702.