

## حل عددی یک مدل انتگرالی بلک-شولز با استفاده از یک روش جدید مبتنی بر توابع پایه شعاعی و تفاضلات متناهی فشرده

رضا مختاری\*، رحمان اکبری و محمدتقی جهان‌دیده  
دانشگاه صنعتی اصفهان، گروه ریاضی

پذیرش: ۹۷/۱۱/۰۹

دریافت: ۹۷/۰۳/۱۶

### چکیده

در این مقاله یک مدل نمایی حاصل از تغییر معاله دیفرانسیل انتگرالی بلک-شولز که همراه با پرش است را با استفاده از مدل جدیدی مبتنی بر ترکیب توابع پایه شعاعی ( $RBF$ ) و تفاضلات متناهی فشرده مرتبه چهار ( $CFD4$ ) حل و سپس ارزش اختیار معاملات اروپایی و آمریکایی را با استفاده از آن تقریب می‌زنیم. در ضمن آنالیز پایداری این مدل را در ختصات قطبی مورد بررسی قرار خواهیم داد و در انتها جواب‌های عددی حاصل از روش را برای ارزش اختیار معاملات اروپایی و آمریکایی با روش‌های دیگر مقایسه خواهیم نمود.

**واژه‌های کلیدی:** معادله بلک-شولز نمایی با پرش، اختیار معامله اروپایی و آمریکایی، توابع پایه شعاعی، تفاضلات متناهی فشرده.

### مقدمه

تجزیه و تحلیل مسایل مطرح در امور مالی یکی از زمینه‌هایی است که به دلیل کاربرد در تجارت جهانی بیشترین رشد و تغییر را داشته است و در بین این موضوعات تعیین یا تخمین ارزش اختیار معاملات بیش‌ترین توجه را در مباحث مالی به خود اختصاص داده است. طی دهه‌های گذشته انواع مدل‌های ریاضی برای ارزش‌گذاری اختیار معاملات ارائه شده که مهم‌ترین آنها معادله با مشتقات جزئی بلک-شولز است [۱،۲]. یکی از اشکالات در مدل بلک-شولز این است که در ساختن آن حرکت ارزش‌داری بنیادین بدون پرش و به صورت حرکت براونی فرض می‌شود، فرضی که سازگار با مشاهدات تجربی نیست. برای رفع این نقص حرکت ارزش‌داری به صورت حرکت پواسون و یا لوی که دارای پرش هستند فرض می‌شود که تا حد مطلوبی واقعی و با مشاهدات تجربی سازگار است [۳]. هر چند که برای مدلی که با این فرض ساخته می‌شود جواب تحلیلی نیز وجود دارد، این جواب فقط برای شرایط مرزی مربوط به اختیار معاملات اروپایی است و برای شرایط مرزی سایر اختیار معاملات، به ویژه اختیار معاملات آمریکایی، استفاده از روش‌های عددی می‌تواند بسیار کارساز باشد [۴،۵،۶،۷،۸]. در بین روش‌های عددی، روش تفاضلات متناهی به دلیل سادگی در پیاده‌سازی و همچنین مرتبه همگرایی قابل ارتقا، بیشتر از روش‌های دیگر مورد استفاده قرار گرفته است [۹،۱۰]. اما یکی از نقطه ضعف‌های روش‌هایی که تا کنون ارائه شده است، ناپایداری، یا مرتبه همگرایی پایین آنها است. یکی دیگر از ضعف‌های این روش شبکه‌بندی نقاط است که باید ابتدا تمام نقاط در مکان خاصی قرار بگیرند و سپس به حل عددی پرداخته شود. برای رفع این مشکل می‌توان از روش‌های بدون نیاز به شبکه استفاده کرد (مانند استفاده از توابع پایه شعاعی، توابع پایه طیفی و ...).

\* نویسنده مسئول mokhtari@cc.iut.ac.ir

در طی سال‌های گذشته روش تفاضلات متناهی کرانک-نیکلسون و روش توابع پایه شعاعی همیشه در کنار هم برای حل معادلات با مشتقات جزئی مورد استفاده قرار گرفته‌اند [۱۱، ۱۲]. در این مقاله ابتدا روش توابع پایه شعاعی را همراه با روش کرانک-نیکلسون مورد استفاده قرار می‌دهیم و سپس برای بهبود نتایج با همان تعداد نقطه از تفاضلات متناهی فشرده استفاده می‌کنیم. مشاهده خواهیم کرد که این روش پایدار است، همگرایی تا مرتبه ۴ بالا می‌رود و به این ترتیب هر دو نقطه ضعف مدل‌های قبلی را به نحوی مطلوب از بین می‌برد. یکی دیگر از برتری‌های مدل عددی جدید آن است که همراه با تغییر شرایط مرزی برای معادله بلک-شولز (که اختیار معاملات مطرح در بازارهای مالی حال حاضر را مدل‌سازی می‌کنند)، این ویژگی‌ها همچنان پا برجا می‌مانند. همچنین در این روش با همان تعداد نقاط روش RBF نتایج بسیار بهتری نسبت به نتایج قبلی به دست می‌آید.

برای کامل بودن مطالب در این مقاله، ابتدا مدل انتگرالی بلک-شولز انتگرالی تحت حرکت پواسون و جواب تحلیلی به دست آمده برای آن را، که ارزش اختیار معاملات اروپایی را در شرایط خاص بیان می‌کند، مرور می‌کنیم. سپس با چند تغییر متغیر که مدل انتگرالی را به یک معادله دیفرانسیل انتگرالی تبدیل می‌کند، زمینه را برای حل عددی معادله تغییر یافته آماده می‌کنیم و مدل جدیدی را که مبتنی بر تفاضلات متناهی فشرده و توابع پایه شعاعی است، ارائه می‌دهیم. برای حل معادله دیفرانسیل به دست آمده در خصوص ویژگی‌های پایداری، همگرایی و سرعت همگرایی آن دلایل لازم را ارائه می‌دهیم. در انتها نیز به بحث نتایج عددی حاصل و کاربرد آن در تخمین ارزش اختیار معاملات می‌پردازیم.

## پیاده‌سازی و ساختار مدل ارائه‌شده روی معادله بلک-شولز

در این بخش ابتدا مدل بلک-شولز انتگرالی تحت حرکت پواسون را معرفی کرده و در ادامه آن را با استفاده از چند تغییر متغیر به یک معادله دیفرانسیل انتگرالی ساده تبدیل می‌کنیم.

### ارزش دارایی بنیادین تحت فرایند پواسون

ابتدا مدل بلک-شولز همراه با پرش برای تعیین ارزش دارایی بنیادین را به صورت زیر می‌نویسیم

(۱)

$$dS = \sigma(t)SdW + \mu(t)Sdt + (q(t) - 1)SdN,$$

که در آن  $S$  ارزش دارایی بنیادین (ارزش سهام)،  $dS$  و  $dt$  به ترتیب تغییرات نسبت به ارزش دارایی و زمان،  $\sigma \in \mathbb{R}^+$  نوسانات دارایی (انحراف معیار برگشتی سهام) که می‌تواند نسبت به زمان دارای مقداری ثابت و یا دارای حرکتی تصادفی باشد،  $\mu(t) = r(t) - \lambda(t)\kappa(t) - dt$  رانش (نرخ افزایش سالانه)،  $r$  نرخ بهره بدون ریسک سالانه<sup>۱</sup> که دارای رفتاری تصادفی و غیرقابل پیش‌بینی است. ولی می‌توان درباره توزیع آن قضاوت کرد،  $W$  بیانگر حرکت براونی استاندارد (وینر) و  $N$  فرایند پواسون است. در این مدل داریم  $\kappa(t) = E(q(t) - 1)$ ، که  $\kappa(t)$  در بازه  $(-1, \infty)$  قرار دارد و  $q(t) - 1$  تابع تکانه ایجاد جهش در ارزش دارایی از  $S$  به  $Sq(t)$  است. نکته مهم درباره این مدل این است که  $dN=0$  با احتمال  $\lambda dt$  و  $1 - \lambda dt$  با احتمال  $\lambda dt$ ، که در آن  $\lambda$  پارامتر پواسون است که برابر با تعداد رخدادها (اتفاقات) در واحد زمان است.

<sup>1</sup> risk-free interest rate

حال اگر در معادله (۱) حالتی را در نظر بگیریم که  $dN=0$ ، همان فرایند تصادفی با حرکت براونی هندسی رخ می‌دهد که در اصل همان معادله بلک-شولز می‌باشد. حال اگر فرض کنیم که فرایند پواسون رخ دهد، معادله (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت

(۲)

$$\frac{dS}{S} \simeq q(t) - 1,$$

که در این حالت  $q(t) - 1$  تابع تکانه ایجاد جهش در ارزش دارایی از  $S$  به  $Sq(t)$  است. لم ۱ (لم ایتو). فرض کنید  $g \in C^2$ . سپس با احتمال یک، برای همه  $t \geq 0$  داریم:

$$dg(X_t) = \frac{\partial g}{\partial x}(X_t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(X_t)(dX_t)^2,$$

$$g(X_t) - g(X_0) = \int_0^t g'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t g''(X_s) ds$$

که در آن  $dX_t = \sigma(t)dW_t + \mu(t)dt$

فرض کنید  $V(S, t)$  ارزش اختیار معاملات تحت ارزش دارایی  $S$  در هر زمان باشد. با تغییر متغیر در معادله (۱) و با استفاده از لم ایتو ما به یک معادله انتگرالی با مشتقات جزئی (PIDE) دست پیدا می‌کنیم. در نتیجه با در نظر گرفتن

$$v(x, \tau) = V(S, \tau)$$

(۳)

$$v_\tau = \frac{1}{2} \sigma^2 v_{xx} + (r - \lambda \kappa - \frac{1}{2} \sigma^2) v_x + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} v(z, \tau) f(z - x) dz$$

$$-(\lambda + r)v, \quad (\tau, x) \in [0, T] \times (-\infty, \infty),$$

که در آن  $x = \log(S)$  و  $\tau = T - t$  زمان سررسید اختیار معامله می‌باشد. در مدل مرتون<sup>۱</sup> تابع چگالی  $f$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta^2}} e^{-\frac{(x-v)^2}{2\eta^2}}$$

که در آن  $v$  میانگین و  $\eta^2$  واریانس تابع توزیع اندازه پرش می‌باشد. در این مدل می‌توان تابع تکانه پرش را به صورت امید ریاضی و به صورت  $E[q(t)] = \exp(v + \frac{\eta^2}{2})$  نوشت، یعنی  $\kappa(\tau) = E[q(\tau) - 1] = \exp(v + \frac{\eta^2}{2}) - 1$  در معادله (۲) همچنین می‌توان جمله انتگرالی را نیز به صورت مجموع دو جمله انتگرالی دیگر به صورت زیر نوشت:

$$\int_{\mathbb{R}} v(z, \tau) f(z - x) dz = \int_{[-b, b]} v(z, \tau) f(z - x) dz$$

$$+ \int_{\mathbb{R} \setminus [-b, b]} v(z, \tau) f(z - x) dz.$$

حال تابع  $\Phi$  را به صورت  $\Phi(\tau, x, b) = \int_{\mathbb{R} \setminus [-b, b]} v(z, \tau) f(z - x) dz$  تعریف کنیم. این تابع در مدل مرتون به صورت

$$\Phi(\tau, x, b) = S e^{x+v+\frac{\eta^2}{2}} N\left(\frac{x-b+v+\eta^2}{\eta}\right) - K e^{-r\tau} N\left(\frac{x-b+v}{\eta}\right),$$

<sup>1</sup> Merton model

تعریف می‌شود، وقتی که  $N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{x^2}{2}} dx$  و  $K$  قیمت توافقی ذکر شده در قرارداد است. مانند معادله بلک-شولز، در این نوع مدل نیز بازدهی اختیار خرید<sup>۱</sup>  $C_E(S, T)$  و اختیار فروش<sup>۲</sup>  $P_E(S, T)$  اروپایی از دو رابطه زیر به دست می‌آیند

$$C_E(S, T) = \max(S - K, 0), P_E(S, T) = \max(K - S, 0) \quad (۴)$$

و در حالت‌های اضافی  $P_E(\infty, t) = 0$  و  $P_E(0, t) = Ke^{-rt}$ ،  $C_E(\infty, t) = S$ ،  $C_E(0, t) = 0$  همچنین بازدهی اختیار معاملات آمریکایی مانند اروپایی می‌باشد، با این تفاوت که ارزش اختیارات آمریکایی در طول زمان تا تاریخ سررسید می‌تواند اجرا شود به شرط اینکه مقدارش از مقدار اختیار معامله اروپایی بیشتر باشد. یعنی داریم

$$C_A(S, t, K) \geq C_E(S, t, K), \\ P_A(S, t, K) \geq P_E(S, t, K)$$

برای تمام مقادیر  $0 \leq t \leq T$ .

واضح است که برای اختیار معاملات دیگر این شرایط متفاوت خواهند بود.

### تبدیل معادله (۳) به معادله دیفرانسیل انتگرالی

اینک به منظور ساده‌تر کردن معادله (۳) قصد داریم تا از چند تغییر متغیر و قاعده زنجیره‌ای، مدل را به یک مدل دیفرانسیل انتگرالی تبدیل کنیم [۱۳].

فرض کنید

$$\alpha = -\frac{r - \lambda\kappa - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma^2}, \quad \beta = -\frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2 - (\lambda + r)$$

آن‌گاه با قرار دادن این تغییر متغیر و گرفتن مشتقات جزئی زنجیره‌ای و همچنین با استفاده از تغییر متغیرهای

$$u(x, \tau) = e^{-\alpha x - \beta\tau} v(x, \tau), g(x) = e^{\alpha x} f(x)$$

معادله (۳) به ساده‌ترین شکل، به صورت زیر بازنویسی می‌شود که یک معادله دیفرانسیل انتگرالی است:

(۵)

$$u_\tau = \frac{1}{2}\sigma^2 u_{xx} + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} u(z, \tau) g(z - x) dz, (\tau, x) \in [0, T] \times (-\infty, \infty),$$

همچنین شرایط اولیه و مرزی نیز با اعمال این تغییر متغیرها به صورت زیر نوشته می‌شوند (در اینجا فقط شرایط ارزش اختیار معامله خرید را می‌نویسیم و اختیار فروش نیز به طریق مشابه با استفاده از معادله (۴) بازنویسی می‌شود):

(۶)

$$u_C(x, 0) = \max\{e^{-\alpha x}(S_0 e^x - K), 0\}, \\ u(-b, \tau) = 0, u(b, \tau) = e^{-(\alpha b + \beta\tau)}(S_0 e^b - Ke^{-r\tau}).$$

در ادامه دامنه  $\mathbb{R}$  را بدون کاستن از کلیت مسأله به یک دامنه متناهی و متقارن  $[-b, b]$  تبدیل می‌کنیم چون در عمل نمی‌توان ارزش دارایی بنیادین را بی‌نهایت در نظر گرفت.

<sup>۱</sup> Call option

<sup>۲</sup> Put option

### جواب تحلیلی معادله بلک-شولز

می‌توان ثابت کرد که معادله (۳) جوابی دقیق و تحلیلی برای ارزش اختیار معامله خرید اروپایی به صورت زیر دارد [۳]:

$$V(S, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\theta\tau} (\theta\tau)^m}{m!} C_{BS}(\tau, S, K, r_m, \sigma_m),$$

که در آن

$$\theta = \lambda(1 + \kappa), r_m = r - \lambda\kappa + \frac{m \ln(1 + \kappa)}{\tau}, \sigma_m^2 = \sigma^2 + \frac{m\eta^2}{\tau}$$

و  $C_{BS}$  همان جواب معادله بلک-شولز برای اختیار خرید است.

### ساختار مدل CRBF4 برای معادله دیفرانسیل انتگرالی بلک-شولز

در طی سال‌های گذشته روش تفاضلات متناهی کرانک-نیکلسون و روش توابع پایه شعاعی همیشه در کنار هم برای حل معادلات با مشتقات جزئی مورد استفاده قرار گرفته‌اند. ما در این پژوهش ابتدا روش توابع پایه شعاعی را با روش کرانک-نیکلسون استفاده می‌کنیم و سپس برای بهبود نتایج با همان تعداد نقطه از تفاضلات متناهی فشرده به جای روش کرانک-نیکلسون استفاده می‌کنیم. یکی از مزیت‌های این روش در این است که با همان تعداد نقاط روش RBF نتایج بسیار بهتری نسبت به نتایج قبلی به دست می‌آوریم.

به منظور گسسته‌سازی معادله (۵)، ابتدا مقادیر طبیعی  $M, N > 0$  را در نظر می‌گیریم و تعریف می‌کنیم  $h = \frac{2b}{M}$  و  $k = \frac{T}{N}$  نقطه  $(x_i, \tau_n)$  را که در آن  $x_i = -b + ih$  برای  $i=0, 1, \dots, M$  و  $\tau_n = nk$  برای  $n=0, 1, \dots, N$  در نظر می‌گیریم. حال برای ساده‌نویسی قرار می‌دهیم  $u_i^n = u(x_i, \tau_n)$  و نمادگذاری‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

(۷)

$$u_i^{n+1/2} = \frac{u_i^{n+1} + u_i^n}{2}, \partial_\tau u_i^{n+1} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k}, \delta_x^2 u_i^n = u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n.$$

برای قسمت انتگرالی معادله (۵) ابتدا از دستور انتگرال‌گیری دوزنقه‌ای روی بازه  $[-b, b]$  و روی نقاط  $x_i, i = 1, \dots, M-1$  که دارای مرتبه  $O(h^2)$  است استفاده می‌کنیم. پس داریم:

(۸)

$$\begin{aligned} \Gamma_i^n &= \int_{-\infty}^{\infty} u(z, \tau_n) g(z - x_i) dz \\ &\approx \frac{\square}{2} [u_1^n g_{i1} + 2u_2^n g_{i2} + 2u_3^n g_{i3} + \dots + u_{M-2}^n g_{iM-2} + u_{M-1}^n g_{iM-1}] \\ &+ O(\square^2) + \Phi(\tau_n, x_i, b). \end{aligned}$$

حال معادله (۵) با استفاده از روابط فوق و روش کرانک-نیکلسون در نقطه  $(x_i, \tau_n)$  به شکل زیر گسسته می‌شود

(۹)

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{k} = \sigma^2 \frac{u_{xx}^{n+1} + u_{xx}^n}{4} + \lambda \frac{\Gamma^{n+1} + \Gamma^n}{2}.$$

اینک نقاط  $x_i$  را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که  $x_i, i = 1, \dots, M - 1$  نقاط داخل شبکه و  $x_i, i = 0, M$  نقاط مرزی باشند. برای این نقاط، تقریب (درونیایی) زیر را تعریف می‌کنیم:

(۱۰)

$$u(x, \tau_n) = u^n(x) \simeq \sum_{j=0}^M \ell_j^n \phi_j(x),$$

که در آن  $\ell_j^n$  ضرایب مجهول و  $\phi_j(x) = \varphi(\|x - x_j\|)$  تابع  $\varphi(x)$  به توابع پایه شعاعی معروف هستند که برخی از آنها را در جدول ۱ آورده‌ایم که در آن  $\varepsilon$  پارامتر شکلی است. که تا کنون مقدار بهینه‌ای برای این پارامتر تعیین نشده است ولی در برخی موارد می‌توان حدودی مطلوب برای آن تعیین کرد [۱۴، ۱۵]. همچنین  $\|\cdot\|$  نرم اقلیدسی است.

جدول ۱: برخی از توابع پایه شعاعی معروف

$\varphi(r) = \sqrt{\varepsilon^2 + r^2}$	چند مربعی (MQ)
$\varphi(r) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + r^2}}$	چند مربعی معکوس (IMQ)
$\varphi(r) = \frac{1}{\varepsilon^2 + r^2}$	مربعی معکوس (IQ)
$\varphi(r) = e^{-(\varepsilon r)^2}$	گوسی (GA)
$\varphi(r) = r^{2m} \ln(r)$	اسپلاین صفحه نازک (TPS)

تقریب (۱۰) در نقاط  $x_i$  به صورت زیر نوشته می‌شود

$$u^n(x_i) \simeq \sum_{j=0}^M \ell_j^n \phi_j(x_i), \quad i = 0, \dots, M,$$

که می‌توان آن را به صورت ماتریسی زیر نوشت:

(۱۱)

$$u^n = C \ell^n,$$

که در آن

$$C = [\phi_j(x_i): i = 0, \dots, M, j = 0, \dots, M]_{(M+1) \times (M+1)}, \ell^n = [\ell_0^n, \dots, \ell_M^n]^T.$$

در نقاط داخلی ( $C_d$ ) و مرزی ( $C_b$ ) تقسیم می‌کنیم، در نتیجه داریم:

$$C = C_d + C_b,$$

که در آن

$$C_d = [\phi_j(x_i): i = 1, \dots, M - 1, j = 0, \dots, M \text{ and } 0 \text{ elsewhere}]_{(M+1) \times (M+1)},$$

$$C_b = [\phi_j(x_i): i = 0, M, j = 0, M \text{ and } 0 \text{ elsewhere}]_{(M+1) \times (M+1)}.$$

حال با جایگذاری تقریب (۱۰) در معادله (۹) و در نقاط  $x_i, i = 1, \dots, M - 1$  به معادله زیر می‌رسیم:

(۱۲)

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^M \ell_j^{n+1} \phi_j(x_i) - \frac{\sigma^2 k}{4} \sum_{j=0}^M \ell_j^{n+1} \phi_j''(x_i) - \frac{\lambda k}{4} \sum_{j=0}^M \ell_j^{n+1} g_{ij} \phi_j(x_i) \\ & = \sum_{j=0}^M \ell_j^n \phi_j(x_i) + \frac{\sigma^2 k}{4} \sum_{j=0}^M \ell_j^n \phi_j''(x_i) + \frac{\lambda k}{4} \sum_{j=0}^M \ell_j^n g_{ij} \phi_j(x_i) \end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned}\phi_j'(x) &= \frac{d}{dx} \phi_j(x) \Big|_{x=x_i}, \\ \phi_j''(x) &= \frac{d^2}{dx^2} \phi_j(x) \Big|_{x=x_i}.\end{aligned}$$

همچنین برای شرایط مرزی داریم:

$$\sum_{j=0}^M \ell_j^{n+1} \phi_j(x_0) = 0, \quad \sum_{j=0}^M \ell_j^{n+1} \phi_j(x_M) = e^{-(ab+\beta\tau_{n+1})} (S_0 e^b - K e^{-r\tau_{n+1}}).$$

رابطه (۱۲) به صورت یک دستگاه با تعداد  $M + 1$  مجهول  $\ell_j^{n+1}$  تشکیل شده است که می‌توان آن را به صورت ماتریسی

(۱۳)

$$\begin{aligned}M \ell^{n+1} &= R, \\ M &= C - \frac{\sigma^2 k}{4} C_{d2} - \frac{\lambda k}{4} G C_d, \\ R &= \left( C_d + \frac{\sigma^2 k}{4} C_{d2} + \frac{\lambda k}{4} G C_d \right) \ell^n + D^{n+1} + k \lambda \Phi^n,\end{aligned}$$

نوشت که در آن

$$\begin{aligned}C_{d2} &= [\phi_j''(x_i): i = 1, \dots, M-1, j = 0, \dots, M \text{ and } 0 \text{ elsewhere}]_{(M+1) \times (M+1)}, \\ G &= \begin{bmatrix} g_{ij}, j = 1, M \\ 2g_{ij}, j = 2, 3, \dots, M-1 \end{bmatrix} \\ D^{n+1} &= [0, 0, \dots, 0, e^{-(ab+\beta\tau_{n+1})} (S_0 e^b - K e^{-r\tau_{n+1}})], \\ \Phi^n &= [\Phi(\tau_n, x_0, b), \Phi(\tau_n, x_1, b), \dots, \Phi(\tau_n, x_M, b)].\end{aligned}$$

حال برای به دست آوردن طرح  $CRBF4$ ، باید هم به جای قاعده انتگرال گیری ذوزنقه‌ای از روش انتگرال گیری سیمپسون و هم از طرح تفاضلات متناهی فشرده به جای روش کرانک-نیکلسون استفاده شود.

در ابتدا برای به دست آوردن روش  $RBF$  با مرتبه چهار باید برای جمله  $u_{xx}$  به صورت زیر عمل کنیم

$$\begin{aligned}(u_{xx})^{n+1/2} &= D^2 u^{n+1/2} \simeq \frac{1}{\square^2} (\delta_x^2) u^{n+1/2} + O(\square^2) \\ &\simeq \frac{1}{\square^2} \delta_x^2 u^{n+1/2} - \frac{\square^2}{12} u_{xxxx}^{n+1/2} + O(\square^4) \\ &= \frac{1}{\square^2} \delta_x^2 u^{n+1/2} - \frac{\square^2}{12} (D^2 u)_{xx}^{n+1/2} + O(\square^4)\end{aligned}$$

در نتیجه داریم:

(۱۴)

$$D^2 u^{n+1/2} \simeq \frac{1}{\square^2} \frac{\delta_x^2}{1 + \frac{1}{12} \delta_x^2} u^{n+1/2} + O(\square^4) \simeq \frac{D^2}{1 + \frac{\square^2}{12} D^2} u^{n+1/2} + O(\square^4).$$

با قرار دادن رابطه (۱۴) در معادله (۹) داریم

$$(15) \quad \frac{u^{n+1} - u^n}{k} + \frac{\square^2}{12} \frac{u_{xx}^{n+1} - u_{xx}^n}{k} = \sigma^2 \frac{u_{xx}^{n+1} + u_{xx}^n}{4} + \lambda \frac{\Gamma^{n+1} + \Gamma^n}{2} + \lambda \square^2 \frac{\Gamma_{xx}^{n+1} + \Gamma_{xx}^n}{24}.$$

با استفاده از تقریب (۱۴) معادله (۱۵) را می‌توان به صورت ماتریسی زیر نوشت:

$$(16) \quad \begin{aligned} M \ell^{n+1} &= R, \\ M &= C + \left( \frac{\square^2}{12} - \frac{\sigma^2 k}{4} \right) C_{d2} - \frac{\lambda k \square^3}{72} G C_{d2} - \frac{\square \lambda k}{6} G C_d, \\ R &= \left( C_d + \left( \frac{\square^2}{12} + \frac{\sigma^2 k}{4} \right) C_{d2} + \frac{\lambda k \square^3}{72} G C_{d2} + \frac{\square \lambda k}{6} G C_d \right) \ell^n + D^{n+1} + k \lambda \Phi^n, \end{aligned}$$

که در آن تمام ماتریس‌ها مانند قبل است. به جز ماتریس  $G$  که با استفاده از قاعده انتگرال‌گیری سیمپسون به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$G = \begin{bmatrix} g_{ij}, j = 1, M \\ 4g_{ij}, j = 2, 4, \dots \\ 2g_{ij}, j = 3, 5, \dots \end{bmatrix}.$$

حال در ادامه الگوریتم روش  $CRBF4$  را توصیف می‌کنیم.

### الگوریتم روش $CRBF4$

- (۱) ابتدا پارامترهای  $M$ ،  $N$  و  $T$  را مشخص می‌کنیم.
- (۲) قرار می‌دهیم  $n=0$ .
- (۳) با استفاده از شرط اولیه رابطه (۷) مقدار  $u^n$  را به دست می‌آوریم.
- (۴) دستگاه خطی  $C \ell^n = u^n$  را حل می‌کنیم.
- (۵) ماتریس‌های  $M$  و  $R$  را محاسبه می‌کنیم.
- (۶) قرار می‌دهیم  $n = n + 1$ .
- (۷) با استفاده از معادله (۱۶) مقادیر مجهول  $\ell^n$  را به دست می‌آوریم.
- (۸) مقدار تقریبی  $u^n$  را با استفاده از دستگاه معادلات (۱۱) محاسبه می‌کنیم.
- (۹) اگر  $nk < T$  به مرحله (۵) الگوریتم می‌رویم و در غیر این صورت برنامه پایان می‌پذیرد.

### بررسی پایداری روش $CRBF4$

در این بخش روش همگرایی قطبی که توسط مارتل برای روش RBF مطرح شده است را به منظور بررسی همگرایی دستگاه معادلات (۱۶) مورد استفاده قرار می‌دهیم [۱۶].

می‌دانیم که فاصله اقلیدسی را می‌توان روی دایره واحد به صورت قطبی زیر نوشت

$$\|x_i - x_j\|_2^2 = 2 - 2 \cos(\theta_i - \theta_j),$$



که در آن  $\theta_j$  جزء زاویه‌ای نقاط  $x_j$  می‌باشند. برای سادگی می‌توان معادله (۱۳) را بدون کاستن از کلیت مسأله به صورت قطبی زیر نوشت

(۱۷)

$$u(x) = \sum_{j=1}^M \ell_j \phi(1 - \cos(\theta - \theta_j)),$$

که در آن  $\phi(1 - \cos(\theta - \theta_j)) = \Phi(\|x_i - x_j\|_2)$

حال فرض کنید  $\Phi$  یک تابع پایه شعاعی باشد. ما به دنبال راه حلی برای حل معادله (۵) به صورت زیر هستیم

(۱۸)

$$u(\theta, t) = \sum_{j=1}^M \ell_j(t) \phi(1 - \cos(\theta - \theta_j)),$$

به طور خودکار می‌توان دریافت که اگر معادله (۱۸) را در معادله (۵) قرار دهیم نتیجه می‌شود که:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^M \ell'_j(t) \phi(1 - \cos(\theta - \theta_j)) \\ & - \frac{\sigma^2}{2} \sum_{j=1}^M \ell_j(t) \cos(\theta - \theta_j) \phi'(1 - \cos(\theta - \theta_j)) \\ & - \frac{\sigma^2}{2} \sum_{j=1}^M \ell_j(t) \sin^2(\theta - \theta_j) \phi''(1 - \cos(\theta - \theta_j)) \\ & - \lambda \sum_{j=1}^M \ell_j(t) g_{ij} \phi(1 - \cos(\theta - \theta_j)) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

اینک معادله (۱۹) را دقیقاً در هر نقطه  $\theta_i$  می‌نویسیم. در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^M \ell'_j(t) \phi(1 - \cos(\theta_i - \theta_j)) \\ & - \frac{\sigma^2}{2} \sum_{j=1}^M \ell_j(t) \cos(\theta_i - \theta_j) \phi'(1 - \cos(\theta_i - \theta_j)) \\ & - \frac{\sigma^2}{2} \sum_{j=1}^M \ell_j(t) \sin^2(\theta_i - \theta_j) \phi''(1 - \cos(\theta_i - \theta_j)) \\ & - \lambda \sum_{j=1}^M \ell_j(t) g_{ij} \phi(1 - \cos(\theta_i - \theta_j)) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

برای هر مقدار  $1 \leq i \leq M$  معادله (۲۰) را به صورت ماتریسی زیر می‌نویسیم

(۲۱)

$$A\ell'(t) - B\ell(t) - C\ell(t) - D\ell(t) = 0,$$

که در آن

$$\begin{aligned} A &= [a_{ij}] \equiv [\phi(1 - \cos(\theta_i - \theta_j))], \\ B &= [b_{ij}] \equiv \frac{\sigma^r}{\nu} [\cos(\theta_i - \theta_j) \phi'(1 - \cos(\theta_i - \theta_j))], \\ C &= [c_{ij}] \equiv \frac{\sigma^r}{\nu} [\sin^r(\theta_i - \theta_j) \phi''(1 - \cos(\theta_i - \theta_j))], \\ D &= [d_{ij}] \equiv \lambda [g_{ij} \phi(1 - \cos(\theta_i - \theta_j))], \\ \ell(t) &\equiv \ell_1(t), \ell_2(t), \dots, \ell_M(t)^T. \end{aligned} \quad (22)$$

اگر فرض کنیم

$$u(t) \equiv (u_1(t), u_2(t), \dots, u_M(t))^T,$$

سپس از رابطه (۱۰) داریم:

$$u(t) = A\ell(t)$$

با جایگذاری رابطه فوق در معادله (۲۱) داریم

$$(23)$$

$$u(t) = Eu(t)$$

که در آن  $E \equiv (B + C + D)A^{-1}$

ما به طور ضمنی قبول می‌کنیم که ماتریس  $A$  معکوس‌پذیر است. حال برای یک گام زمانی  $k > 0$  معادله (۲۳) را با استفاده از یک روش عددی مانند  $F_k$  روی زمان جداسازی می‌کنیم؛ در نتیجه داریم

$$(24)$$

$$u^{n+1} = F_k(E)u^n.$$

رابطه (۲۴) را لکس-پایدار<sup>۱</sup> گوییم هرگاه

$$(25)$$

$$\|F_k(E)^n\| \leq l,$$

برای برخی ثابت‌های  $l$  و برای همه مقادیر  $n \geq 0$  اگر  $E$  یک ماتریس نرمال باشد، برای پایداری روش کافیست که نشان دهیم مقادیر ویژه آن در دامنه پایداری روش  $F_k$  قرار دارد.

اگر قرار دهیم  $\theta_j = 2\pi j/M$  برای  $1 \leq j \leq M$ ، سپس (۲۲) به صورت زیر بازنویسی می‌شود

<sup>1</sup> Lax-stable

$$A = [a_{ij}] \equiv \phi(1 - \cos(\nu\pi(i-j)/M)), \quad (26)$$

$$B = [b_{ij}] \equiv \frac{\sigma^{\nu}}{\nu} \left[ \cos(\nu\pi(i-j)/M) \phi' (1 - \cos(\nu\pi(i-j)/M)) \right], \quad (27)$$

$$C = [c_{ij}] \equiv \frac{\sigma^{\nu}}{\nu} \left[ \sin^{\nu}(\nu\pi(i-j)/M) \phi'' (1 - \cos(\nu\pi(i-j)/M)) \right]. \quad (28)$$

$$D = [d_{ij}] \equiv \lambda \left[ g_{ij} \phi(\nu\pi(i-j)/M) \right], \quad (29)$$

برای بررسی بیشتر به لم‌های زیر احتیاج داریم:

لم ۲. ماتریس‌های  $A, B, C$  و  $D$  جابه‌جا پذیر هستند (به طور مثال  $AB = BA$ ).

لم ۳. ماتریس‌های  $BA^{-1}$  و  $CA^{-1}$  و  $DA^{-1}$  پاد-الحاقی<sup>۱</sup> هستند

برهان: با توجه به معادله (۲۵)، ماتریس  $A$  خودالحاق<sup>۲</sup> (هرمیتی) است و با توجه به معادلات (۲۷) و (۲۸) و (۲۹) ماتریس‌های  $B$  و  $C$  و  $D$  پاد-الحاقی هستند. علاوه بر آن با توجه به لم ۱، چون ماتریس‌های  $A, B, C$  و  $D$  جابه‌جاپذیر هستند در نتیجه ماتریس‌های  $A^{-1}, B, C$  و  $D$  نیز جابه‌جاپذیرند. در نتیجه

$$\begin{aligned} (BA^{-1})^* &= -A^{-1}B = -BA^{-1}, \\ (CA^{-1})^* &= -A^{-1}C = -CA^{-1}, \\ (DA^{-1})^* &= -A^{-1}D = -DA^{-1} \end{aligned}$$

که در آن (\*) نشان دهنده ترانپوز مجزوم است.

با استفاده از لم‌های ۱ و ۲ می‌توان قضیه زیر را نتیجه گرفت.

قضیه ۱. رابطه (۲۴) لکس-پایدار است.

برهان: با استفاده از لم ۲ ماتریس  $E$  پاد-الحاقی و در نتیجه نرمال است. چون ماتریس  $E$  نرمال است پس مقادیر ویژه آن موهومی محض هستند. پس شرط کافی برای این که معادله (۲۴) لکس-پایدار باشد این است که مقادیر ویژه ماتریس  $E$  در محدوده پایداری روش  $F_k$  قرار داشته باشد. حال  $F_k$  را روش عددی تفاضلات متناهی فشرده مرتبه چهار (CFD4) در نظر می‌گیریم. حال می‌توان مقادیر  $k$  را به گونه‌ای انتخاب کرد که شرط برقرار باشد. چون  $F_k$  یک روش عددی بدون قید و شرط پایدار است در نتیجه دامنه پایداری آن تمام محور موهومی را در بر می‌گیرد و قضیه اثبات می‌شود. با توجه به بحث فوق، مقدار جواب عددی  $u^n$  به ازای زمانهای بالا (مقادیر کوچک  $k$ ) کراندار است، پس در نتیجه روش مقاله بدون قید و شرط پایدار است.

## نتایج عددی

در این بخش اختیار معامله اروپایی و آمریکایی را در حالت خرید برای ارزیابی دقت مدل  $CRBF4$  مورد بررسی قرار می‌دهیم. همچنین این مدل را با روش‌های عددی دیگر و جواب دقیق مقایسه می‌کنیم. خطای روش را با استفاده از نرم‌های زیر اندازه‌گیری می‌کنیم:

$$\begin{aligned} L_R = RMS &= \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M |U_{app}(x_i, t) - U_{exact}(x_i, t)|}, \\ L_{\infty} &= \|U_{app} - U_{exact}\|_{\infty} \end{aligned}$$

<sup>1</sup> skew-adjoint

<sup>2</sup> self-adjoint

همچنین تمام مثال‌ها را با تابع پایه شعاعی چند مربعی معکوس ( $IMQ$ ) انجام می‌دهیم.

## ارزش اختیار معامله اروپایی

چون اختیار معامله اروپایی دارای جواب تحلیلی هستند پس می‌توان با جواب تقریبی مقایسه و دقت روش را بررسی کرد. پس در ابتدا روش را برای به‌دست آوردن ارزش اختیار معاملات اروپایی به کار می‌گیریم. در ادامه مقادیر زیر را برای متغیرهای معادله (۱) در نظر می‌گیریم:

$$\sigma = 0/15, T = 0/25, r = 0/05, \eta = 0/45, \nu = -0/9, \lambda = 0/1$$

همان‌طور که در جدول ۲ مشاهده می‌کنید، روش  $CRBF4$  را با روش تفاضلات متناهی  $(FD)[17]$  و  $RBF$  و جواب دقیق معادله (۵) برای ارزش اختیار خرید اروپایی برای مقادیر مختلف  $S_0$  و  $K = 100$  مقایسه می‌کنیم. نتایج به دست آمده از این جدول نشان‌دهنده دقت بالای روش در مقایسه با دیگر روش‌هاست. در این جدول روش  $CRBF4$  را با پارامتر شکلی  $\varepsilon = 0/104, 0/09, 0/103$  و روش  $RBF$  را با پارامتر شکلی  $\varepsilon = 0/1, 0/09, 0/1$  به ترتیب برای مقادیر  $S_0 = 90, 100, 110$  به کار بسته‌ایم.

جدول ۲: مقایسه جواب دقیق و جواب عددی برای ارزش گذاری اختیار خرید اروپایی با مقادیر  $N = 25, M = 128, K = 100$  و در

بازه  $[-1/5, 1/5]$

جواب دقیق	$CRBF4$	$RBF$	$FD[17]$	$S_0$
0/527638	0/527638	0/527040	0/525183	۹۰
4/391246	4/391268	4/396741	4/355963	۱۰۰
12/643406	12/643406	12/655104	12/635554	۱۱۰
	$L_\infty$			
	$5/3170 \times 10^{-8}$	$5/9848 \times 10^{-4}$	0/00245	۹۰
	$2/1975 \times 10^{-5}$	$2/4723 \times 10^{-4}$	0/03528	۱۰۰
	$4/6662 \times 10^{-7}$	$4/0250 \times 10^{-4}$	0/00785	۱۱۰

در جدول ۳، دو روش  $CRBF4$  و  $FD$  را به گونه‌ای با هم مقایسه کرده‌ایم که هر دو تقریباً نتایج و خطاهای یکسانی بدهند تا معلوم شود کدام روش در زمان کمتر و با تعداد گام‌های مکانی و زمانی کمتر به خطای داده شده می‌رسد. مشاهدات نشان می‌دهد که روش  $CRBF4$  در زمان کمتر و با تعداد نقاط بسیار پایین‌تر همان خطایی که روش  $FD$  می‌دهد را اجرا می‌کند.

جدول ۳: مقایسه دو روش  $CRBF4$  و  $FD$  از نظر زمان اجرای برنامه

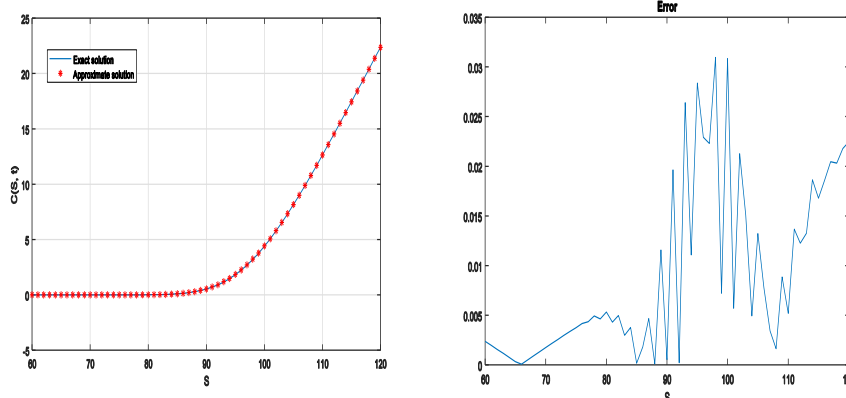
$CRBF4$			$FD[17]$			$S_0$
زمان اجرا (ثانیه)	$L_\infty(CRBF4)$	$N = 25M = 128$	زمان اجرا (ثانیه)	$L_\infty(FD)$	$N = 800M = 4096$	
0/511	$5/3170 \times 10^{-8}$	0/527638	263	$2/9828 \times 10^{-6}$	0/527636	90
0/519	$2/1975 \times 10^{-5}$	4/391268	268	$3/4878 \times 10^{-5}$	4/391211	100
0/524	$4/6662 \times 10^{-7}$	12/643406	260	$8/1425 \times 10^{-6}$	12/643398	110

به خاطر این که در روش توابع پایه شعاعی عدد حالت<sup>۱</sup> ماتریسی که در روش از آن استفاده می‌شود دارای اهمیت است، پس در جدول ۴ عدد حالت ماتریس  $M$  را مورد بررسی قرار می‌دهیم. نتایج جدول ۴ نشان می‌دهد که عدد حالت در نزدیکی پارامتر شکلی  $\varepsilon$  دارای پایدار است. که نشان‌دهنده مطلوب بودن پارامتر شکلی است.

جدول ۴: عدد حالت ماتریس  $M$ 

$\varepsilon$	عدد حالت ماتریس $M$	RMS
0/101	$2/2627 \times 10^6$	$6/3904 \times 10^{-4}$
0/102	$2/5859 \times 10^6$	$1/3814 \times 10^{-3}$
0/103	$2/9621 \times 10^6$	$4/0465 \times 10^{-4}$
0/104	$3/3889 \times 10^6$	$5/3170 \times 10^{-8}$
0/105	$3/8772 \times 10^6$	$1/1527 \times 10^{-3}$
0/106	$4/5358 \times 10^6$	$5/3845 \times 10^{-4}$
0/107	$4/4358 \times 10^6$	$3/5152 \times 10^{-4}$
0/108	$5/0747 \times 10^6$	$4/6475 \times 10^{-6}$
0/109	$5/8054 \times 10^6$	$8/2737 \times 10^{-6}$
0/11	$6/6412 \times 10^6$	$6/9594 \times 10^{-5}$

در شکل ۱ نمودار جواب دقیق و جواب عددی به‌دست آمده از مدل، همچنین نمودار خطا را با یکدیگر مقایسه کرده‌ایم که نشان‌دهنده مناسب بودن مدل است.



شکل ۱. نمودار جواب دقیق و جواب عددی برای ارزش‌گذاری اختیار خرید اروپایی (چپ) و نمودار خطا (راست) با مقادیر  $M = N = 25$  و  $K = 100, 128$  در بازه  $[60, 120]$

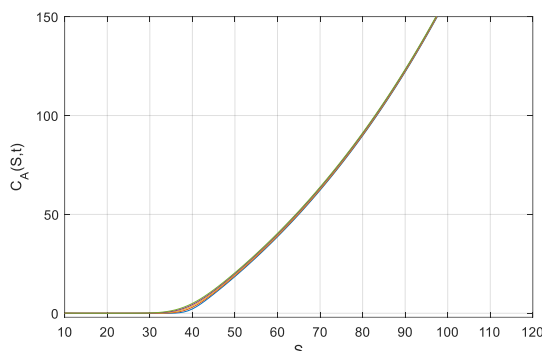
## ارزش اختیار معامله آمریکایی

همان‌طور که گفته شد ارزش اختیار معامله آمریکایی از ارزش اختیار معامله اروپایی می‌تواند بیشتر باشد، چون در طول قرارداد تا زمان سررسید دارنده آن می‌تواند در صورت بالا بودن ارزش قرارداد آن را بفروشد، بخرد و یا اگر تا آخر زمان انقضا ارزش آن بالاتر از بازدهی نرفت در نهایت به همان اندازه مقدار ارزش قرارداد اروپایی به فروش برساند و یا خریداری کند.

<sup>1</sup>condition number

در ادامه چند نمودار را با استفاده از روش  $CRBF4$  نشان خواهیم داد تا مطالب فوق را به صورت شهودی نیز مورد بررسی قرار دهیم.

در شکل ۲ ارزش اختیار خرید آمریکایی را در طول زمان  $[0,0/25]$  برای مقادیر  $S_0 = 90$  و  $K = 100$  مشاهده می‌کنیم.



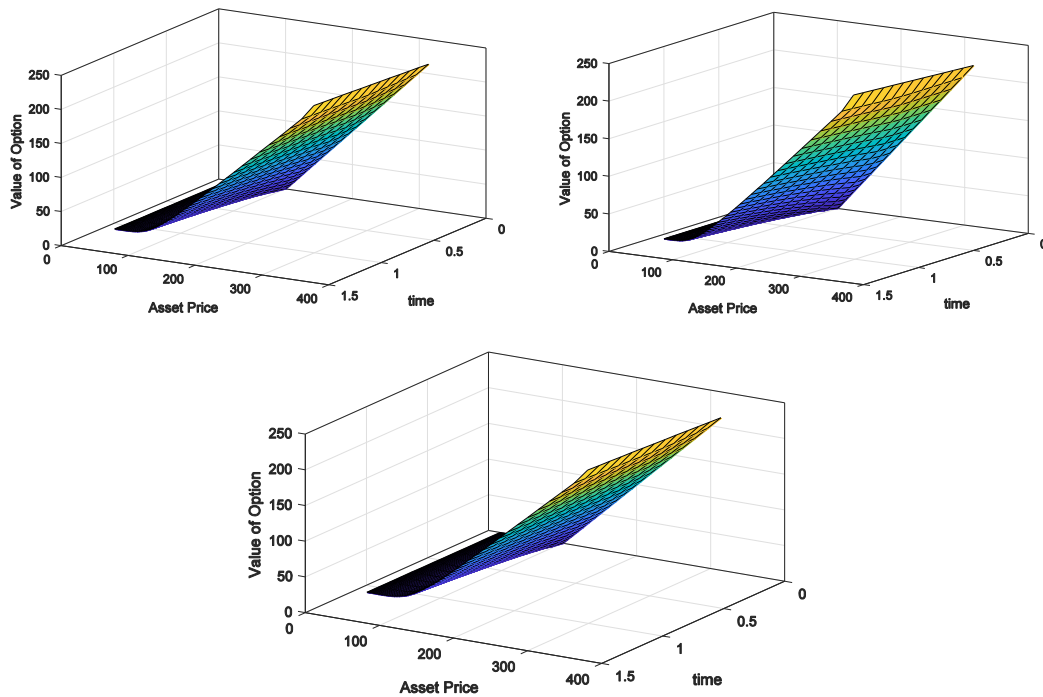
شکل ۲. نمودار جواب‌های عددی به دست آمده برای ارزش‌گذاری اختیار خرید آمریکایی با مقادیر  $M = 128K = 100, N = 25$  و در بازه  $[10,120]$  و بازه زمانی  $[0,0/25]$

برای درک بهتر اختیار معامله آمریکایی و تفاوت آن با اختیارات اروپایی، در شکل ۳ ارزش اختیار فروش معامله آمریکایی را در طول زمان  $[0,1]$  برای مقادیر

$$\sigma = 0/15, r = 0/1, \eta = 0/45, \nu = -0/9, K = 100, S_0 = 70$$

به طور سه بعدی برای مقادیر مختلف  $\lambda = 0/3, 0/5, 0/7$  رسم کرده‌ایم که نشان دهنده این نکته است. که ارزش اختیار معاملات آمریکایی در زمان‌های سررسید، بیشتر یا مساوی با ارزش اختیارات اروپایی است.

همان‌گونه که در این بخش مشاهده شد، روش  $CRBF4$  برای محاسبه ارزش اختیار معاملات اروپایی و آمریکایی از دیگر روش‌های ذکر شده نتایج بهتری ارائه می‌کند که نشان از برتری این تکنیک نسبت به روش‌های تفاضلات متناهی و توابع پایه شعاعی دارد که توانسته است نتایج این دو روش را به طور مطلوبی بهبود ببخشد. در ضمن این مثال‌ها، نرخ همگرایی روش، پایداری آن در زمان‌های بالا و همچنین پایداری عدد حالت ماتریس  $M$  در نزدیکی پارامتر شکلی را به خوبی نمایش دادند. به دلیل این که برای مثال‌های دیگر می‌بایست بحث‌های مفصل‌تری در زمینه ریاضیات مالی را ارائه کنیم، به همین جهت از آوردن مثال‌های دیگر اجتناب کرده و آنها را به مقالات دیگر موکول می‌کنیم.



شکل ۳. نمودار جواب عددی برای ارزش گذاری اختیار فروش آمریکایی برای مقادیر  $\lambda = 0/3$  (بالا)،  $\lambda = 0/5$  (وسط) و  $\lambda = 0/7$  (پایین) و تعداد گام‌های مکانی  $M = 50$  و زمانی  $N = 10$ .

## References

1. Merton R.C., "Theory of rational option pricing", J. Bell. Econ., 4 (1973) 141–183.
2. Scholes M. and Black, "The pricing of options and corporate liabilities", J. Pol. Econ., 81 (1973) 637–659.
3. Merton R.C., "Option pricing when the underlying stocks are discontinuous", J. Financ. Econ., 5 (1976) 125–144.
4. Cortos J.C., Sala R., Jodar L. and Sevilla-Peris R., "A new direct method for solving the Black-Scholes equation", Applied Mathematics Letters, 18 (2005).
5. Jodar L., Company R., Gonzalez A.L., "Numerical solution of modified Black-Scholes equation pricing stock options with discrete dividend", Mathematical and Computer Modelling, 44 (2006).
6. Seydel R., "Tools for computational finance", Berlin, Springer, (2004).

7. Tavella D., Randall C., "Pricing financial instruments: The finite difference method", New York, Wiley, (2000).
8. Wang S., "A novel fitted finite volume method for the Black-Scholes equation governing option pricing", IAM J. Numer. Anal., 24 (2004) 699–720.
9. Mitchell A.R., Griffiths D.F., "The finite difference method in partial differential equations", John Wiley & Sons Ltd., (1990).
10. Akbari R., Mokhtari R., "A new compact finite difference method for solving the generalized long wave equation", Numerical Functional Analysis and Optimization, 35 (2014) 133–152.
11. Ron T.L., Chan, Hubber S., "A Numerical Study of Radial Basis Function Based Methods for Options Pricing under the One Dimension Jump-diffusion Model", Applied Mathematical Finance, 00 (2011) 1-27.
12. Goto, Z. Fei, S. Kan and E. Kita, Options valuation by using radial basis function approximation, Eng. Anal. Bound. Elem., 31 (2007), 836-843.
13. O.*Uğur*, An introduction to computational finance, Series in Quantitative Finance, Vol. 1 (2008).
14. Golbabai A., Mohebianfar E., Rabiei H., "On the role of shape parameter in approximating the Eigenvalues of fredholm integral equations: an RBF-Simpson approach", Appl. Math. Inf. Sci., (2012), In Press.
15. Huang C.S., Lee C.F., Cheng A.D., "Error estimate, optimal shape factor, and high precision computation of multiquadric collocation method", Eng. Anal. Bound. Elem., 31 (2007), 614-623.
16. Martel J.M., Platt R.B., "Stability of radial basis function methods for convection problems on the circle and sphere", Journal of Scientific Computing, 69 (2016), 487-505.
17. Kwon Y.H, Lee Y.H, "A Second-Order Tridiagonal Method for American Options under Jump Diffusion Models", SIAM J. Scientific Computing, 33 (2011) 1860-1872.