(نشریه علوم دانشگاه خوارزمی)

خانواده‌ای از گراف‌های ۱-منظم از ظرفیت چهار و مرتبهٔ خاص

محسن قاسمی
دانشگاه ارومیه، گروه ریاضی،
رضوان ورمزیار
گروه ریاضی، واحد خوی، دانشگاه آزاد اسلامی، خوی، ایران

دریافت ۹۷/۰۳/۲۱ پذیرش ۹۹/۰۴/۱۸

چکیده

یک گراف را ۱-منظم گوئیم هرگاه گروه خودریختی‌های آن به‌صورت منظم روی کمان‌ها عمل کند. در این مقاله گراف‌های ۱-منظم از ظرفیت چهار و مرتبهٔ $11p^2$ که در آن p یک عدد اول است، رده‌بندی شده است.

واژه‌های کلیدی: گراف‌های s – انتقالی، گراف‌های متقارن، گراف‌های کیلی.

MSC (2010): $20B25, 05C25$.

مقدمه

در این مقاله همهٔ گراف‌ها غیرجهت‌دار، متناهی، هم‌بند، بدون طوقه و یال چندگانه در نظر گرفته شده‌اند. برای یک گراف X، از نمادهای $A(X), E(X), V(X)$ و $\mathrm{Aut(X)}$ برای نشان دادن مجموعه رئوس، یال‌ها، کمان‌ها و گروه خودریختی‌های X استفاده شده است. فرض کنید $u,v \in V(X)$. دراین‌صورت از نماد $\{u,v\}$ برای نشان دادن یال واقع بر رئوس u,v در گراف X استفاده می‌کنیم. گراف X را رأس انتقالی و کمان انتقالی (یا متقارن) گوئیم هرگاه گروه خودریختی‌های آن، $\mathrm{Aut(X)}$، به‌صورت انتقالی روی مجموعه رئوس و کمان‌ها عمل کند. هم‌چنین گراف X را ۱-منظم گوئیم هرگاه گروه خودریختی‌های آن به‌صورت منظم روی مجموعه کمان‌ها عمل کند.

واضح است که هر گراف ۱-منظم باید هم‌بند باشد. هم‌چنین یگ گراف از ظرفیت دو است، هرگاه یک دور باشد. بنابراین اولین قدم برای رده‌بندی گراف‌های ۱-منظم، گراف‌های مکعبی یا همان گراف‌های منظم از درجه سه است. اولین مثال از گراف‌های ۱-منظم و مکعبی به‌وسیلهٔ فروچت ساخته شده است [۱۰]. بعد از آن کارهای تحقیقاتی زیادی در مورد گراف‌های ۱-منظم مکعبی در [۳]، [۵]، [۶]، [۷]، [۸]، انجام شده است. هم‌چنین گراف‌های ۱-منظم و از ظرفیت چهار، مورد توجه قرار گرفته‌اند. به‌عنوان مثال گراف‌های ۱-منظم و از ظرفیت چهار و از مرتبهٔ p در مرجع [۱] رده‌بندی شده‌اند. هم‌چنین یک خانواده نامتناهی از گراف‌های کیلی ۱-منظم و از ظرفیت چهار روی گروه‌های متناوب در مرجع [۲۱] رده‌بندی شده‌اند. گراف‌های کیلی ۱-منظم و از ظرفیت چهار روی گروه‌های آبلی و دوری در مراجع [۲۰]، [۲۶]، [۲۸]، [۳۱]، [۳۲] رده‌بندی شده‌اند. هم‌چنین گراف‌های ۱-منظم از ظرفیت چهار روی گروه‌های دو وجهی در [۲۰]، [۲۶]، [۲۸] رده‌بندی شده‌اند. فرض کنید q , p اعداد اول باشند. باتوجه به [۲]، [۲۴]، [۲۵]، [۲۷]، [۳۱]، [۳۲] هر گراف۱-منظم از ظرفیت چهار و از مرتبهٔ pq یا p^2، یک گراف دوری است. به‌علاوه گراف‌های ۱-منظم از ظرفیت چهار و از مرتبهٔ $2pq, kp^2$ که در آن $3 \le k \le 7$ در [۴]، [۱۱]، [۱۲]، [۱۳]، [۱۴]، [۳۴] رده‌بندی شده‌اند. باتوجه به این نتایج، هدف این مقاله رده‌بندی گراف‌های ۱-منظم از ظرفیت چهار و از مرتبهٔ $11p^2$ است.

*نویسنده مسئول m.ghasemi@urmia.ac.ir

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.7.2]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.661]

مقدمات

در این بخش، نمادها، تعریف‌ها و نتایجی را بیان می‌کنیم که در ادامه برای اثبات قضایا استفاده می‌شود.

فرض کنید X یک گراف باشد. از نماد $d(X)$ برای نشان دادن ظرفیت گراف X استفاده می‌کنیم. هم‌چنین اگر B یک زیرمجموعه از $V(X)$ باشد، از نماد $X[B]$ برای زیرگراف القا شده به‌وسیلهٔ B استفاده می‌کنیم. فرض کنید X یک گراف رأس انتقالی و $G \leq \mathrm{Aut(X)}$ به‌طوری‌که G به‌صورت انتقالی روی $V(X)$ عمل می‌کند. هم‌چنین فرض کنید $\sum$ یک افراز از $V(X)$ باشد که G–پایا است. منظور از گراف خارج قسمتی، X_Σ، گرافی است که مجموعه رئوس آن $\sum$ است و دو رأس $B\ ,C \in \sum$ با یک‌دیگر مجاور هستند، هرگاه رأسی ازB مانند u با رأسی از C مانند v با یک‌دیگر در گراف اصلی مجاور باشند. فرض کنید N زیرگروه G نرمال باشد و $\sum$ مجموعه مدارهای عمل N روی $V(X)$ باشد. می‌دانیم $\sum$ یک مجموعه N–پایا است. در این حالت از نماد X_N به‌جای X_Σ استفاده می‌کنیم. برای عدد صحیح و مثبت n، از نماد $\mathbb{Z}_n$، برای نمایش گروه دوری از مرتبهٔ n، از نماد $\mathbb{Z}_n^*$ برای گروه ضربی $\mathbb{Z}_n$ و از نماد D_{2n} برای نمایش گروه دووجهی از مرتبهٔ $2n$ استفاده می‌کنیم. هم‌چنین از نماد C_n برای نمایش دادن یک دور به‌طول n و از نماد K_n برای نشان دادن گراف کامل از مرتبهٔ n استفاده می‌کنیم. گراف C_n را یک $n-$ دور می‌گوئیم.

فرض کنید G یک گروه جایگشتی روی مجموعه Ω و α عضوی از Ω باشد. از نماد G_α برای نمایش دادن پایدارساز رأس α در G استفاده می‌کنیم. گوییم گراف G به‌صورت نیم‌منظم روی Ω عمل می‌کند، هرگاه برای هر $\alpha \in \Omega$، داشته باشیم $G_\alpha = 1$. گوئیم G به‌صورت منظم روی Ω عمل می‌کند، هرگاه G روی Ω نیم‌منظم و انتقالی باشد. هم‌چنین g نیم‌منظم است، هرگاه $\langle g\rangle$ نیم‌منظم باشد.

فرض کنید G یک گروه متناهی و $S \subseteq G$ به‌طوری‌که $1 \notin S$ و $S = S^{-1}$. گراف کیلی[۱] $X = \mathrm{Cay(G, S)}$ روی گروه G نسبت به S گرافی است که مجموعه رئوس آن اعضای G است و مجموعهٔ یال‌های آن $\{\{g, sg\} | g \in G,\ s \in S\}$ است. فرض کنید $x, g \in G$. جایگشت $R(g)$ روی G را به‌صورت $R(g): x \mapsto xg$ تعریف می‌کنیم. گروه جایگشتی $R(G) = \{R(g) | g \in G)\}$ روی G را نمایش منظم راست[۲] گروه G گوئیم. واضح است که $R(G)$ با G یکریخت است و $R(G)$ زیرگروه منظم $\mathrm{Aut(Cay\ (G, S))}$ است. هم‌چنین واضح است که X هم‌بند است اگر و فقط اگر $G = \langle S\rangle$. به‌علاوه $\mathrm{Aut\ (G, S)} = \{\alpha \in \mathrm{Aut}(G) | S^\alpha = S\}$ یک زیرگروه از $\mathrm{Aut}\big(\mathrm{Cay(G, S)}\big)$ است. در واقع $\mathrm{Aut\ (G, S)}$ یک زیرگروه از $\mathrm{Aut(Cay(G, S))}_1$ است. گراف کیلی $X = \mathrm{Cay(G, S)}$ را نرمال گوئیم، هرگاه $R(G)$ یک زیرگروه نرمال $\mathrm{Aut\ \big(Cay\ (G, S)\big)}$ باشد. گودسیل در مرجع [۱۷] ثابت کرده است که $\mathrm{Cay(G, S)}$ نرمال است، اگر و فقط اگر $\mathrm{Aut}\big(\mathrm{Cay(G, S)}\big)_1 = \mathrm{Aut(G, S)}$ (هم‌چنین [۳۳] را ببینید). فرض کنید $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$. در این‌صورت می‌توان به‌راحتی نشان داد که $\mathrm{Cay\ (G, S)}$ نرمال است اگر و فقط اگر $\mathrm{Cay(G, S^\alpha)}$ نرمال باشد.

فرض کنید $u \in V(X)$. در این‌صورت از نماد $N_{\mathrm{X}}(\mathrm{u})$ برای نشان دادن رئوس مجاور u در X استفاده می‌کنیم. گراف $\tilde{X}$ به‌همراه یک نگاشت تصویر $p: \tilde{X} \to X$ را یک پوشش از گراف X گوئیم، اگر یک نگاشت پوشا $p: V(\tilde{X}) \to V(X)$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که $p|_{N_{\tilde{X}}(\tilde{v})}: N_{\tilde{X}}(\tilde{v}) \to N_{\tilde{X}}(\tilde{v})$ یک نگاشت یک‌به‌یک و پوشا برای رأس $v \in V(X)$ و $\tilde{v} \in p^{-1}(V)$. پوشش $\tilde{X}$ از X به‌همراه نگاشت p را یک پوشش منظم یا K– پوشش[۳] گوئیم، هرگاه یک زیرگروه نیم‌منظم K از $\mathrm{Aut}(\tilde{\mathrm{X}})$ موجود باشد به‌طوری‌که X یکریخت با گراف قسمتی $\tilde{\mathrm{X}}/K$ باشد. در

---

1. Cayley graph
2. Right regular representation
3. K-covering

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.7.2]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.661]

واقع نگاشت $ph:\tilde{X} \to \tilde{X}/K$ ترکیبی از نگاشت‌های h,p است که در آن $h:X \to \tilde{X}/K$ (در این مقاله ترکیب توابع از سمت چپ به راست است). اگر K یک گروه دوری یا آبلی مقدماتی باشد آن‌گاه $\tilde{X}$ را پوشش[۱] دوری یا آبلی مقدماتی[۲] از X گویند و اگر $\tilde{X}$ هم‌بند باشد آن‌گاه K را گروه تبدیلات پوششی گوئیم. هم‌چنین اگر X یک پوشش از گراف خارج قسمتی X_N باشد، به‌طوری‌که $N \trianglelefteq \mathrm{Aut}(X)$ آن‌گاه گوییم X یک پوشش نرمال از X_N است. یک لایه از یال یا رأس، عبارت است از تصویر معکوس آن یال یا رأس به‌وسیلهٔ نگاشت p. یک خودریختی از گراف $\tilde{X}$ را حافظ لایه گوئیم، هرگاه یک لایه را به یک لایه تصویر کند. واضح است که هر عضو گروه تبدیلات پوششی، حافظ لایه است. مجموعهٔ همهٔ خودریختی‌ها که حافظ لایه است تشکیل یک گروه می‌دهند که به آن گروه حافظ لایه[۳] گفته می‌شود.

فرض کنید $\tilde{X}$ یک K–پوشش از گراف X به‌همراه نگاشت تصویر p باشد. اگر $\alpha \in \mathrm{Aut}(X)$ و $\tilde{\alpha} \in \mathrm{Aut}(\tilde{X})$ به‌طوری‌که $\tilde{\alpha}p = p\alpha$، آن‌گاه گوئیم $\tilde{\alpha}$ یک خیز[۴] از α است و α یک تصویر[۵] از $\tilde{\alpha}$ است. این تعاریف را می‌توان به زیرگروه‌هایی از $\mathrm{Aut}(X)$ که افزایش می‌شوند و زیرگروه‌های تصویر از $\mathrm{Aut}(\tilde{X})$ تعمیم داد. واضح است که خیز و تصویر چنین زیرگروه‌هایی خود زیرگروهی از $\mathrm{Aut}(\tilde{X})$ و $\mathrm{Aut}(X)$ است.

فرض کنید M و N دو گروه باشند، در این‌صورت از نماد $N \rtimes M$ برای نشان دادن ضرب نیم‌مستقیم گروه N به‌وسیلهٔ M استفاده می‌کنیم. هم‌چنین برای زیرگروه H از G از نمادهای $C_G(\mathrm{H})$ و $N_G(\mathrm{H})$ برای نشان دادن مرکزساز H در G و نرمال‌ساز H در G استفاده می‌کنیم. واضح است که $C_G(H)$ یک زیرگروه نرمال $N_G(H)$ است. به‌علاوه از نماد G' برای نشان دادن زیرگروه مشتق G استفاده می‌کنیم. درنهایت اگر A,B دو زیرگروه از G باشند، آن‌گاه زیرگروه تولید شده به‌وسیلهٔ همهٔ جابه‌جاگرهای $[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$ را با نماد $[A,B]$ نمایش می‌دهیم .

حکم ۱. [۱۸، فصل I ، قضیهٔ 5.4] گروه خارج قسمتی $N_G(H)/C_G(\mathrm{H})$ یکریخت با زیرگروهی از $\mathrm{Aut}(\mathrm{H})$ است.

حکم ۲. [۲۹، فصلI ، حکم ۴.۴] هر گروه آبلی و انتقالی روی Ω یک گروه منظم است.

برای اثبات نتیجهٔ ۳ به [۱۵، قضیهٔ ۱.۱] مراجعه شود.

حکم ۳. فرض کنید X یک گراف هم‌بند و ۱-منظم از ظرفیت چهار و N یک زیرگروه نرمال از G باشد. در این‌صورت یکی از این شرایط برقرار است:

۱. N به‌صورت انتقالی روی $V(X)$ عمل می‌کند.
۲. X یک گراف دو بخشی است و N به‌صورت انتقالی روی هر بخش عمل می‌کند.
۳. N دارای $r \geq 3$ مدار بر روی $V(X)$ است و گراف خارج قسمتی X_{N} یک دور به طول r است و G یک گروه خودریختی $D_{2\mathrm{r}}$ روی X_{N} القاء می‌کند.
۴. N دارای $r \geq 5$ مدار بر روی $V(X)$ است و N به‌صورت نیم‌منظم روی $V(X)$ عمل می‌کند. هم‌چنین گراف خارج قسمتی X_N یک گراف G/N-انتقالی، هم‌بند و از ظرفیت چهار است و X یک پوشش G – نرمال از X_{N} است.

برای اثبات نتیجهٔ ۴ به [۲۹، قضیهٔ ۳.۴] مراجعه شود.

1. Cyclic
2. Rlementary abelian covering
3. Fibre-preserving group
4. Lift
5. Projection

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.7.2]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.661]

قضیهٔ ۴. فرض کنید p یک عدد اول و P یک $p-$ زیرگروه سیلو از گروه جایگشتی G روی Ω باشد. هم‌چنین فرض کنید $\omega \in \Omega$. اگر p^m طول $G-$ مدار شامل ω را عادکند آن‌گاه p^m طول $P-$ مدار شامل ω را عاد می‌کند.

برای بیان نتیجه بعد نیاز به معرفی یک خانواده از گراف‌های با ظرفیت چهار داریم که در [۱۶] برای اولین بار معرفی شده است. گراف $C^{\pm1}(p;11p,1)$ گرافی است که مجموعه رئوس آن $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{11p}$ و مجموعه یال‌های آن $\left\{(i,j),(i\pm1,j\pm1) \middle| i\in\mathbb{Z}_p, j\in\mathbb{Z}_{11p}\right\}$ است. هم‌چنین باتوجه به [۱۶، تعریف ۲.۲] گراف‌های $C^{\pm1}(p,11p,1)$ همگی گراف‌های کیلی روی $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{11p}$ و دارای مجموعه مولد زیر است:

$$\{(1,1),(-1,1),(-1,-1),(1,-1)\}.$$

در اثبات قضیهٔ ۱۱ نیاز به گراف $C^{\pm1}(p;11p,1)$ داریم، که در آن $p \geq 11$. بنا به [۱۶، تعریف ۲.۲] تمامی این گراف‌ها برای $p \geq 11$، گراف‌های کیلی نرمال روی $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{11p}$ است.

حکم ۵. [۱۶، قضیهٔ ۱.۱] فرض کنید X یک گراف هم‌بند، $G-$ متقارن و از ظرفیت چهار و مرتبهٔ $11p^2$ باشد. هم‌چنین فرض کنید $N=\mathbb{Z}_p$ زیرگروه نرمال مینیال از G با مدارهایی از طول p باشند به‌طوری‌که p یک عدد اول فرد است. در نهایت فرض کنید K هسته عمل G روی $V(X_N)$ باشد. اگر $X_N=C_{11p}$ و $K_v\cong\mathbb{Z}_2$ آن‌گاه X یکریخت با $C^{\pm1}(p;11p,1)$ است.

حکم ۶. [۱۶، قضیهٔ ۲.۱] فرض کنید X یک گراف هم‌بند و $G-$ متقارن از ظرفیت چهار و مرتبهٔ $11p^2$ باشد. هم‌چنین فرض کنید $N=\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p$ زیرگروه نرمال مینیال از G با مدارهایی از طول p^2 باشند، که در آن p یک عدد اول فرد است. در نهایت فرض کنید K هسته عمل G روی $V(X_N)$ باشد. اگر $X_N\cong C_{11}$ و $K_v\cong\mathbb{Z}_2$ آن‌گاه X یکریخت با یکی از گراف‌های موجود در [۱۶، لم ۴.۸] است.

فرض کنید A یک گروه باشد به‌طوری‌که روی گروه G عمل می‌کند. هم‌چنین فرض کنید A یا G حل‌پذیر باشند. در این‌صورت گوئیم عمل A روی G هم‌اول است هرگاه $(|A|,|G|)=1$.

نتیجه زیر را می‌توان در [۱۹، صفحه ۱۸۷] مشاهده کرد.

حکم ۷. فرض کنید A روی G به‌صورت هم‌اول عمل کند. در این‌صورت $G=[G,A]C_G(A)$.

در نهایت در مثال زیر گراف $G(11p;2,2,2)$ را معرفی می‌کنیم. حالت کلی این گراف در [۲۴] معرفی شده است.

مثال ۸. فرض کنید ۲ یک عامل از $p-1$ و $H(11,2)$ زیرگروه منحصربه‌فرد از مرتبهٔ ۲ گروه ضربی $\mathbb{Z}_{11}^*$ باشد. فرض کنید $H(11,2)=\langle a\rangle$, $t\in\mathbb{Z}_p^*$ به‌طوری‌که $t\in -H(P,2)$ و u کوچک‌ترین مضرب مشترک ۲ و مرتبهٔ عضو t در $\mathbb{Z}_p^*$ باشد. درنهایت فرض کنید $p\neq 11$. در این‌صورت $a=-1$, $t\in\{\pm1\}$ و $v=2$. از این‌رو، رأس (i,x) با رأس (j,y) مجاور است هرگاه $j-i\in\{\pm1\}$ و $y-x\in\{\pm1\}$. در واقع گراف مورد نظر یکریخت با گراف کیلی $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_{11}\times\mathbb{Z}_p,\{(1,1),(1,-1),(-1,1),(1-1)\})$ است که آن را با نماد $X=G(11p;2,2,2)$ نمایش می‌دهیم. به‌علاوه این گراف یک گراف دوری است. هم‌چنین باتوجه به [۲۴] این گراف یک گراف ۱-منظم است.

گراف‌های ۱-منظم از مرتبهٔ $11p^2$

برای اثبات نتیجه اصلی به دو لم ۹ و ۱۰ نیاز داریم:

لم ۹. فرض کنید G یک گروه غیر آبلی از مرتبه p^2q باشد که در آن q , p اعداد اول هستند و $p > 3$. هم‌چنین فرض کنید $p > q$ و G دارای زیرگروه نرمال N از مرتبه p باشد به‌طوری‌که G/N یک گروه دوری است. در این‌صورت G یکرخت با گروه زیر است:

$$\langle \mathrm{x,y,z} \mid \mathrm{x^p = y^q = z^p = [x,z] = [y,z] = 1, y^{-1}xy = x^i} \rangle,$$

به‌طوری‌که (پیمانه p) $i^q \equiv 1$ و $(i,p) = 1$.

برهان : به مرجع [۱۸] مراجعه شود.

لم ۱۰. فرض کنید $p > 11$ یک عدد اول باشد و

$$\mathrm{G} = \langle \mathrm{x,y,z} \mid \mathrm{x^P = y^{11} = z^P = [x,z] = [y,z] = 1, y^{-1}xy = x^i} \rangle,$$

که در آن (پیمانهp) $i^{11} \equiv 1$ و $(i,p) = 1$. در این‌صورت هیچ گراف کیلی نرمال ۱-منظم از مرتبهٔ $11p^2$ و ظرفیت ۴ وجود ندارد.

برهان: فرض کنید X یک گراف کیلی نرمال ۱-منظم از مرتبهٔ $11p^2$ و ظرفیت ۴ باشد. نشان می‌دهیم که این فرض منجر به تناقض خواهد شد. چون X یک گراف کیلی نرمال و ۱-منظم است، نتیجه می‌گیریم که $A_1 = \mathrm{Aut(G,S)}$ روی S به‌صورت انتقالی عمل می‌کند و بنابراین تمام اعضای S دارای مرتبه یکسان است. اعضای مرتبهٔ ۱۱ گروه G در زیرگروه تولید شده به‌وسیلهٔ y,x یعنی $\langle x,y \rangle$ و اعضای مرتب p در $\langle x,z \rangle$ قرار دارند. چون X هم‌بند است از این‌رو، $G = \langle S \rangle$ و بنابراین S دارای عضوی از مرتبهٔ $11p$ است. از نماد $S_{11\mathrm{p}}$ برای نشان دادن عضوهای مرتبهٔ $11p$ گروه G استفاده می‌کنیم . بنابراین

$$S \subseteq S_{11p} = \left\{ x^s y^t z^j \,\middle|\, s \in \mathbb{Z}_p, t \in \mathbb{Z}_{11}^*, j \in \mathbb{Z}_P^* \right\}.$$

فرض کنید $x^s\mathrm{y^t t^j} \in \mathrm{S}$ که در آن $s \neq 0$. واضح است که $\sigma: x \mapsto x^s, y \mapsto y, z \mapsto z^j$ یک خودریختی از گروه G است. هم‌چنین اگر $y^t\mathrm{z^j} \in \mathrm{S}$ آن‌گاه $\sigma: x \mapsto x, y \mapsto y, z \mapsto \mathrm{z}^j$ یک خودریختی از گروه G است. بنابراین می‌توان فرض کرد

$$S = \{xy^tz, y^{-t}x^{-1}z^{-1}, x^m y^n z^k, y^{-n}x^{-m}z^{-k}\},$$

به‌طوری‌که $n \in \mathbb{Z}_{11}^*, m \in \mathbb{Z}_p$ و $k \in \mathbb{Z}_p^*$ و یا

$$S = \{y^tz, y^{-t}z^{-1}, x^m y^n z^k, y^{-n}x^{-m}z^{-k}\},$$

به‌طوری‌که $n \in \mathbb{Z}_{11}^*, m \neq 0$ و $k \in \mathbb{Z}_p^*$. ابتدا فرض کنید که

$$S = \{xy^tz, y^{-t}x^{-1}z^{-1}, x^m y^n z^k, y^{-n}x^{-m}z^{-k}\},$$

چون $\mathrm{Aut(G,S)}$ به‌صورت انتقالی روی S عمل می‌کند، نتیجه می‌گیریم که $\alpha \in \mathrm{Aut(G,S)}$ موجود است به‌طوری‌که $(xy^tz)^\alpha = y^{-t}x^{-1}z^{-1}$. بنابراین

$$(xz)^\alpha (y^t)^\alpha = y^{-t}x^{-1}z^{-1} = x^{-i^t}y^{-t}z^{-1}.$$

از این‌رو، $(y^t)^\alpha = x^{t_1}y^{t_2}$ به‌طوری‌که $t_1 \in \mathbb{Z}_p$ و $t_2 \in \mathbb{Z}_{11}^*$. بنابراین $(xz)^\alpha x^{t_1}y^{t_2} = x^{-i^t}y^{-t}z^{-1}$ و در نتیجه

$$(xz)^\alpha = x^{-i^t}x^{-t_1 i^{(t_1+t_2)}}y^{-t-t_2}z^{-1}.$$

چون $o(xz) = p$ داریم $t = -t_2$. بنابراین $(xz)^\alpha = x^{-i^t - t_1}z^{-1}$. هم‌چنین فرض کنید $z^\alpha = x^{s_1}z^{s_2}$ که در آن $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_p$. بنابراین $x^\alpha = x^{-i^t - s_1 - t_1}z^{-1-s_2}$. چون z^α با $(y^t)^\alpha$ جابه‌جا

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.7.2]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.661]

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.7.2]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.661]

می‌شود، نتیجه می‌گیریم که $s_1 = 0$ یا $i^{-t_2} = 1$. چون $t_2 \in \mathbb{Z}_{11}^{*}$ و (پیمانه p) $i^{11} \equiv 1$ نتیجه می‌شود که $i^{-t2} \neq 1$. بنابراین می‌توان فرض کرد که $s_1 = 0$. در نتیجه $(y^t)^\alpha = x^{t_1}y^{-t},\ x^\alpha = x^{-i^t - t_1}z^{-1-s_2}$ و $z^\alpha = z^{s_2}$. چون $x^{y^t} = x^{i^t}$ داریم $(x^\alpha)^{(y^t)^\alpha} = (x^\alpha)^{i^t}$ و بنابراین $s_2 = -1$ و $(-i^t - t_1)(i^{t_2} - i^t) = 0$.
از طرفی چون $\mathrm{t} = -t_2$ و $t_2 \in \mathbb{Z}_{11}^{*}$ داریم $(i^{t2} - i^t) \neq 0$. بنابراین $(-i^t - t_1) = 0$ و در نتیجه $x^\alpha = 1$ که یک تناقض است. اکنون فرض کنید $S = \{y^t z, y^{-t}z^{-1}, x^m y^n z^k, y^{-n}x^{-m}z^{-k}\}$، به‌طوری‌که $m \neq 0$. چون $\mathrm{Aut(G,S)}$ به‌صورت انتقالی روی S عمل می‌کند پس $\alpha \in \mathrm{Aut(G,S)}$ موجود است به‌طوری‌که $(y^t z)^\alpha = y^{-t}z^{-1}$. بنابراین $(y^t)^\alpha z^\alpha = y^{-t}z^{-1}$. می‌توان فرض کرد $(y^t)^\alpha = x^{t_1}y^{t_2}$، که در آن $t_1 \in \mathbb{Z}p$ و $\mathrm{t}_2 \in \mathbb{Z}_{11}^{*}$. از این‌رو، $(z)^\alpha = y^{-t_2}x^{-t_1}y^{-t}z^{-1} = x^{-i^{t_2}}y^{-t_2-t}z^{-1}$. چون $o(z) = p$ نتیجه می‌گیریم که $t = -t_2$ و بنابراین
$z^\alpha = x^{-i^{t_2}}z^{-1}$. به‌علاوه از این‌که z^α با $(y^t)^\alpha$ جابه‌جا می‌شود، نتیجه می‌گیریم $- t_1 i^{t_2}(i^{-t_2} - 1) = 0$ که این یک تناقض است.

قضیهٔ ۱۱ نتیجهٔ اصلی این مقاله است.

قضیهٔ ۱۱. فرض کنید p یک عدد اول باشد. گراف X از مرتبه $11p^2$ و ظرفیت چهار ۱-منظم است اگر و فقط اگر یکی از این حالت‌ها برقرار باشد:

i. $p \in \{2,3,5,7\}$

ii. X یک گراف کیلی روی گروه $\langle x, y \mid x^p = y^{11p} = [x,y] = 1 \rangle$ است و مجموعه مولد آن مجموعه $S = \{y, y^{-1}, xy, x^{-1}y^{-1}\}$ است،

iii. X یک گراف هم‌بند کمان انتقالی دوری با هر مجموعه مولد S است،

iv. X یکی از گراف‌های موجود در [۱۶، لم ۴.۸] است.

برهان : فرض کنید X یک گراف ۱-منظم از مرتبهٔ $11p^2$ باشد. اگر $p \leq 7$ آن‌گاه $|V(X)|$ برابر با یکی از اعداد ۴۴، ۹۹، ۲۷۵ یا ۵۳۹ است. لیست کامل گراف‌های کمان انتقالی از ظرفیت چهار و مرتبهٔ حداکثر ۶۴۰ در [۲۲]، [۲۳] موجود است. با در نظر گرفتن این مراجع و نرم‌افزار magma اثبات قضیه در حالت $p \leq 7$ کامل می‌شود. هم‌چنین اگر $p = 11$ آن‌گاه باتوجه به [۹، قضیهٔ ۱.۴] گراف X یکریخت با $\mathrm{Cay}\left(\mathbb{Z}_{11^2} \times \mathbb{Z}_{11}, \mathrm{S}\right)$ است، به‌طوری‌که $\mathbb{Z}_{11^2} \times \mathbb{Z}_{11} = \langle \mathrm{a} \rangle \times \langle \mathrm{b} \rangle$ و $S = \{a, ab, a^{-1}, a^{-1}b^{-1}\}$. این گراف حالت (ii) قضیهٔ را برای $p = 11$ نتیجه می‌دهد.

اکنون فرض کنید $p > 11$ و $A = \mathrm{Aut(X)}$ و هم‌چنین فرض کنید A_v پایدارساز رأس v در A باشد. در نهایت فرض کنید P، $p-$زیرگروه سیلوی A باشد. چون A ۱-منظم است، پس $|\mathrm{A}| = 44\mathrm{p}^2$. اگر $P \trianglelefteq \mathrm{A}$ آن‌گاه A حل‌پذیر خواهد بود. بنابراین فرض کنید $p \ntrianglelefteq \mathrm{A}$. بنابه قضایای سیلو $44|(kp+1)$. بنابراین $k = 1$, $p = 43$ و در نتیجه $|A{:}\,N_A(P)| = 44$ و از آن‌جا $N_A(P) = C_A(P) = P$. از این‌رو، P یک نرمال P- متمم مانند M دارد. چون $|M| = 44$ نتیجه می‌شود که ۱۱- زیرگروه سیلوی آن که با نماد Q نشان می‌دهیم در A نرمال خواهد بود. از این‌رو، $[P\,, Q\ ] = 1$ که متناقض با $C_A(P) = P$ است. بنابراین A حل‌پذیر است و P − زیرگروه سیلوی آن نرمال در A است.

ابتدا فرض کنید P یک گروه دوری، X_{p} گراف خارج قسمتی از گراف X مربوط به مدارهای عمل گروه P باشد و K هسته عمل A روی $V(X_P)$ باشد. بنابه حکم ۴ مدارهای عمل P دارای طول p^2 است. بنابراین $|V(X_P)| = 11$, $P \leq K$ و A/K به‌صورت کمان انتقالی روی X_P عمل می‌کند.

بنا به حکم ۳ $X_P \cong C_{11}$, $\frac{A}{K} \cong D_{22}$ و از آن‌جا $|K| = 2\mathrm{p}^2$ یا P به‌صورت نیم‌منظم روی $V(X)$ عمل می‌کند و گراف خارج قسمتی X_P یک گراف هم‌بند از ظرفیت چهار است، به‌طوری‌که G/K روی X_P کمان انتقالی است و X یک پوشش منظم از X_P است. بنا به [۳۰] هیچ گراف هم‌بند کمان انتقالی از مرتبهٔ ۱۱ و ظرفیت چهار وجود ندارد. بنابراین $X_{\mathrm{P}} \cong \mathrm{C}_{11}$. چون $A/K \cong \mathrm{D}_{22}$ یک گروه غیرآبلی است و A/K یک گروه خارج قسمتی از A/P است، نتیجه می‌گیریم که A/P یک گروه غیرآبلی است. چون K دارای مرتبهٔ $2\mathrm{p}^2$ و به‌صورت صادقانه روی مدارهای از طول p^2 عمل می‌کند، نتیجه می‌گیریم که K به‌صورت غیرنیم‌منظم روی $V(X)$ عمل می‌کند. بنابراین $K_v \cong \mathbb{Z}_2$، که در آن $v \in V(X)$. بنا به حکم ۲، A/C یکریخت با زیرگروهی از $\mathbb{Z}_{p(p-1)}$ است که در آن $C = C_A(P)$. چون A/P غیرآبلی است، نتیجه می‌شود که P یک زیرگروه محض C است. اگر $C \cap K \neq P$ آن‌گاه $C \cap K = K$. اکنون چون P یک گروه آبلی است، نتیجه می‌شود که K یک گروه آبلی است. هم‌چنین K به‌صورت انتقالی و صادقانه روی مدارها عمل می‌کند که این یک تناقض است. چون K_{v} یک ۲- زیرگروه سیلوی K است، نتیجه می‌گیریم که K_{v} زیرگروه مشخصه گروه K است و بنابراین در A نرمال است. بنابراین $K_{\mathrm{v}} = 1$،که این نیز یک تناقض است. بنابراین $\mathrm{C} \cap \mathrm{K} = \mathrm{P}$ و

$$1 \neq C/P = \mathrm{C}/\mathrm{C} \cap \mathrm{K} \cong \mathrm{CK}/\mathrm{K} \trianglelefteq \mathrm{A}/\mathrm{K} \cong \mathrm{D}_{22}..$$

اگر $C/P \cong \mathbb{Z}_2$، آن‌گاه $|C| = 2p^2$. واضح است که C_{V} یک گروه آبلی است و $|C_v| \in \{1,2\}$. اگر $|C_v| = 2$، آن‌گاه C_v یک ۲-زیرگروه سیلوی C است و بنابراین C_v یک زیرگروه مشخصه C است. اکنون نرمال بودن C در A ایجاب می‌کند که $C_v \trianglelefteq A$ و در نتیجه $C_{\mathrm{V}} = 1$، که یک تناقض است. حال اگر $|C_V| = 1$، آن‌گاه طول مدارهای C برابر $2p^2$ است که یک تناقض است. از این‌رو، $|C/P| \in \{11,22\}$ و بنابراین C/P دارای زیرگروه مشخصه از مرتبهٔ ۱۱ مانند H/P است. لذا $|\mathrm{H}| = 11\mathrm{p}^2$ ؛ $H/P \trianglelefteq A/P$ و در نتیجه $H \trianglelefteq A$. به‌علاوه چون $H \leq C = C_A(P)$ نتیجه می‌شود که H یک گروه آبلی است. واضح است که $|H_V| \in \{1,11\}$. اگر $|H_v| = 1$، آن‌گاه $|H| = 11p^2$ و بنابراین H به‌صورت منظم روی $V(X)$ عمل می‌کند. از این‌رو، X یک گراف کیلی روی گروه آبلی با P-زیرگروه سیلوی دوری است. واضح است که این گروه یکریخت با $\mathbb{Z}_{11p^2}$ است به‌طوری‌که $p > 11$. هم‌چنین بنا به [۳۲، قضیهٔ ۷.۲] X یک گراف ۱-منظم است. اکنون اگر $|H_V| = 11$، آن‌گاه H_{v} یک ۱۱- زیرگروه سیلوی H است از این‌رو، H_v یک زیرگروه مشخص H است. درنتیجه H_{v} یک زیرگروه نرمال A است و از آن‌جا $H_v = 1$ که یک تناقض است.

اکنون فرض کنید P یک گروه آبلی مقدماتی باشد. ابتدا فرض کنید P یک زیرگروه نرمال مینیمال از گروه A باشد. گراف خارج قسمتی X_{P} از X مربوط به مدارهای P را درنظر می‌گیریم. فرض کنید K هسته عمل A روی $V(X_P)$ باشد. بنا به حکم ۳.۲، یا $X_p \cong C_{11}$ و بنابراین $A/K \cong D_{22}$ و در نتیجه $|K| = 2p^2$ و یا P به‌صورت نیم‌منظم روی $V(X)$ عمل می‌کند و گراف خارج قسمتی X_P یک گراف هم‌بند از ظرفیت چهار است به‌طوری‌که A/K به‌صورت کمان انتقالی روی X عمل می‌کند و X یک پوشش منظم از X_{P} است. بنا به [۳۰] هیچ گراف کمان انتقالی هم‌بند از ظرفیت چهار و مرتبهٔ ۱۱ وجود ندارد. از این‌رو، می‌توان فرض کرد $X_{\mathrm{P}} \cong \mathrm{C}_{11}$ و بنابراین $K_v \cong \mathbb{Z}_2$. حال بنا به حکم ۶.۲، X یکریخت با یکی از گراف‌های موجود در [۱۶، لم ۴.۸] است.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.7.2]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.661]

اکنون فرض کنید P زیرگروه نرمال مینیال A نباشد. دراین‌صورت زیرگروه نرمال مینیال N از A با $\mathbb{Z}_p$ یکریخت است. فرض کنید X_N گراف خارج قسمتی از X باتوجه با مدارهای N باشد. هم‌چنین فرض کنید K هسته عمل A روی $V(X_N)$ باشد. دراین‌صورت $N \leq K$ و A/K روی $V(X_N)$ به‌صورت انتقالی عمل می‌کند. به‌علاوه داریم $|V(X_N)| = 11p$. بنا به حکم ۳، X_N یک دور از طول $11p$ است و یا N به‌صورت نیم‌منظم روی $V(X)$ عمل می‌کند و گراف خارج قسمتی X_{N} یک گراف هم‌بند و از ظرفیت چهار است و A/N به‌صورت کمان انتقالی روی X_{N} عمل می‌کند. توجه شود که در این حالت X یک پوشش منظم از X_{N} است. اگر $X_{\mathrm{N}} \cong \mathrm{C}_{11\mathrm{p}}$، آن‌گاه $A/K \cong D_{22p}$ و $|K| = 2_{\mathrm{P}}$. از این‌رو، $K_v \cong \mathbb{Z}_2$. اکنون بنا به حکم ۵، X یکریخت با $C^{\pm 1}(P; 11p, 1)$ است. هم‌چنین اگر X_N یک گراف هم‌بند از ظرفیت چهار باشد به‌طوری‌که A/N به‌صورت کمان انتقالی روی X/N عمل می‌کند آن‌گاه طبق حکم ۳، X یک پوشش از گراف متقارن از مرتبهٔ $11p$ است. بنا به [۲۴]، $G(11p; 2,2,2)$ تنها گراف متقارن از ظرفیت چهار و از مرتبهٔ $11p$ است (مثال ۸). در این حالت زیرگروه ۱-منظم از گروه خودریختی‌های گراف شامل زیرگروه منظم و نرمال یکریخت با $\mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_p$ است. فرض کنید H زیرگروه ۱-منظم از گروه خودریختی‌های گراف X_{N} باشد. چون X ۱-منظم است از این‌رو، A یک خیزش از H است. هم‌چنین چون H شامل زیرگروه منظم نرمال یکریخت با $\mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_p$ است لذا A نیز شامل یک زیرگروه منظم نرمال است. بنابراین X یک گراف کیلی نرمال از مرتبهٔ $11\mathrm{p}^2$ است. چون $A/\mathbb{Z}_p \cong H$ و $\mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_p \trianglelefteq H$ نتیجه می‌شود که A دارای یک زیرگروه نرمال مانند G است به‌طوری‌که $G/\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{11}$. اگر G آبلی باشد آن‌گاه G یکریخت با $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{11p}$ و یا $\mathbb{Z}_{11p^2}$ است. هم‌چنین اگر G غیرآبلی باشند آن‌گاه بنا به لم ۹، G یکریخت با

$$\langle \mathrm{x}, y, z \mid x^P = y^{11} = z^p = [x, \mathrm{z}] = [y, z] = 1, y^{-1}xy = x^i \rangle,$$

است که در آن (پیمانه p) $i^{11} \equiv 1$ و $(i,p) = 1$. اگر $G \cong \mathbb{Z}_{11p^2}$ آن‌گاه بنا به [۳۱ قضیهٔ ۷] X، ۱-منظم است. به‌علاوه اگر $G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{11p}$ آن‌گاه بنا به [۳۳، حکم ۳۰۳ و مثال ۲۰۳] گراف X یکریخت با $\mathrm{Cay}\left(\mathbb{Z}_{\mathrm{p}} \times \mathbb{Z}_{11\mathrm{p}}, \{\mathrm{a}, \mathrm{a}^{-1}, \mathrm{ab}, \mathrm{a}^{-1}\mathrm{b}^{-1}\}\right)$ است. این گراف در قضیهٔ ۱۱ قسمت (ii) آورده شده است . در نهایت در حالت آخر بنا به لم ۱۰، گراف X یک گراف ۱-منظم نیست. اکنون اثبات قضیه کامل است.

منابع

1. Chao C. Y., "On the classification of symmetric graphs with a prime number of vertices", Tran. Amer. Math. Soc. 158 (1971) 247-256.
2. Cheng Y., Oxley J., "On weakly symmetric graphs of order twice a prime", J. Combin. Theory B 42 (1987) 196-211.
3. Conder M., http://www.math.auckland.ac.nz/Conder/Symmcubic10000list.txt.
4. Feng Y.-Q., Kutnar K., Marusic D., Zhang C., "Tetravalent one-regular graphs of order $4p^2$", Filomat 28:2 (2014) 285-303.
5. Feng Y.-Q., Kwak J. H., "Classifying cubic symmetric graphs of order 10p or $10p^2$", Science in China A 49 (2006) 300-319.

6. Feng Y.-Q., Kwak J. H., "Cubic symmetric graphs of order twice an odd prime power", J. Austral. Math. Soc. 81 (2006) 153-164.

7. Feng Y.-Q., Kwak J. H., "Cubic symmetric graphs of order a small number times a prime or a prime square", J. Combin. Theory B 97 (2007) 627-646.

8. Feng Y.-Q., Kwak J. H., Wang K. S., "Classifying cubic symmetric graphs of order 8p or $8p^2$", European J. Combin. 26 (2005) 1033-1052.

9. Feng Y.-Q., Xu M. Y., "Normality of tetravalent Cayley graphs of odd prime-cube order and its application", Acta Mathematica Sinica. English Series, 21 (2005) 903-912.

10. Frucht R., "A one-regular graph of degree three", Canad. J. Math. 4 (1952) 240-247.

11. Ghasemi M., "A classification of tetravalent one-regular graphs of order 3p2", Colloquium Math. 128:1 (2012) 15-24.

12. Ghasemi M., "An algorithmic-type classification of tetravalent one-regular graphs using computer algebra tools", Fundamenta Informatica 135(3) (2014) 211-228.

13. Ghasemi M., Varmazyar R., "A family of tetravalent one-regular graphs, Ars Combinatoria 134 (2017) 283-293.

14. Ghasemi M., Spiga P., "4-valent one-regular graphs of order $6p^2$ admitting a group of automorphisms acting regularly on arcs", Ars Math Contemp. 9 (2015) 1-18.

15. Gardiner A., Praeger C. E., "On tetravalent symmetric graphs", European. J. Combin. 15 (1994) 375-381.

16. Gardiner A., Praeger C. E., "A characterization of certain families of tetravalent symmetric graphs", European. J. Combin. 15 (1994) 383-397.

17. Godsil C. D., "On the full automorphism group of a graph", Combinatorica 1 (1981) No 3, 243-256.

18. Huppert B., "Endliche Gruppen I", Springer-Verlag, Berlin (1967).

19. Kurzweil H., Stellmacher B., "An itroduction to the theory of finite groups", Erlangen (2003).

20. Kwak J. H., Oh J. M., "One-regular normal Cayley graphs on dihedral groups of valency 4 or 6 with cyclic vertex stabilizer", Acta Math. Sin. Engl. Ser. 22 (2006) 1305-1320.

21. Marusic D., "A family of one-regular graphs of valency 4", European J. Combin. 18 (1997) 59-64.

22. Potocnik P., Spiga P., Verret G., http://www.matapp.unimib.it/spiga/.

23. Potocnik P., Spiga P., Verret G., "Cubic vertex-transitive graphs on up to 1280 vertices", [arXiv:1201.5317v1 math.CO].

24. Praeger C. E., Wang R. J., Xu M. Y., "Symmetric graphs of order a product of two distinct primes", J. Combin. Theory Ser. B 58 (1993) 299-318.

25. Praeger C. E., Xu M. Y., "Vertex-primitive graphs of order a product of two distinct primes", J. Combin. Theory Ser. B 59 (1993) 216-45.

26. Wang C. Q., Xu M. Y., "Non-normal one-regular and tetravalent Cayley graphs of dihedral groups D_{2n}", European J. Combin. 27 (2006) 750-766.

27. Wang R. J., Xu M. Y., "A classification of symmetric graphs of order 3p", J. Combin. Theory B 58 (1993) 197-216.

28. Wang C. Q., Zhou Z. Y., "Tetravalent one-regular normal Cayley graphs of dihedral groups", Acta Math. Sinica Chinese Ser. 49 (2006) 669-678.

29. Wielandt H., "Finite Permutation Groups", Academic Press, New York (1964).

30. Wilson S., Potocnik P., "A Census of edge-transitive tetravalent graphs", http://jan.ucc.nau.edu/swilson/C4Site/index.html.

31. Xu M. Y., "A note on one-regular graphs", Chin. Scin. Bull. 45, (2000) 2160-2162.

32. Xu J., Xu M. Y., "Arc-transitive Cayley graphs of valency at most four on Abelian groups", Southest Asian Bull. Math. 25 (2001) 355-363.

33. Xu M. Y., "Automorphism groups and isomorphisms of Cayley digraphs", Discrete Math. 44 (2001) 1502-1508.

34. Zhou J.-X., Feng Y.-Q., "Tetravalent one-regular graphs of order 2pq", J. Algebraic Combin. 29 (2009) 457-471.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.7.2]

[DOI: 10.52547/mmr.6.4.661]