

خانواده‌ای از گراف‌های ۱-منظم از ظرفیت چهار و مرتبه خاص

محسن قاسمی

دانشگاه ارومیه، گروه ریاضی،

رضوان ورمزیار

گروه ریاضی، واحد خوی، دانشگاه آزاد اسلامی، خوی، ایران

پذیرش ۹۹/۰۴/۱۸

دریافت ۹۷/۰۳/۲۱

چکیده

یک گراف را ۱-منظم گوئیم هرگاه گروه خودریختی‌های آن به‌صورت منظم روی کمان‌ها عمل کند. در این مقاله گراف‌های ۱-منظم از ظرفیت چهار و مرتبه $11p^2$ که در آن p یک عدد اول است، رده‌بندی شده است. **واژه‌های کلیدی:** گراف‌های S - انتقالی، گراف‌های متقارن، گراف‌های کیلی.

MSC (2010): 20B25, 05C25.

مقدمه

در این مقاله همه گراف‌ها غیرجهت‌دار، متناهی، هم‌بند، بدون طوقه و یال چندگانه در نظر گرفته شده‌اند. برای یک گراف X ، از نمادهای $A(X), E(X), V(X)$ و $\text{Aut}(X)$ برای نشان دادن مجموعه رئوس، یال‌ها، کمان‌ها و گروه خودریختی‌های X استفاده شده است. فرض کنید $u, v \in V(X)$. در این صورت از نماد $\{u, v\}$ برای نشان دادن یال واقع بر رئوس u, v در گراف X استفاده می‌کنیم. گراف X را رأس انتقالی و کمان انتقالی (یا متقارن) گوئیم هرگاه گروه خودریختی‌های آن، $\text{Aut}(X)$ ، به‌صورت انتقالی روی مجموعه رئوس و کمان‌ها عمل کند. هم‌چنین گراف X را ۱-منظم گوئیم هرگاه گروه خودریختی‌های آن به‌صورت منظم روی مجموعه کمان‌ها عمل کند.

واضح است که هر گراف ۱-منظم باید هم‌بند باشد. هم‌چنین یک گراف از ظرفیت دو است، هرگاه یک دور باشد. بنابراین اولین قدم برای رده‌بندی گراف‌های ۱-منظم، گراف‌های مکعبی یا همان گراف‌های منظم از درجه سه است. اولین مثال از گراف‌های ۱-منظم و مکعبی به‌وسیله فروچت ساخته شده است [۱۰]. بعد از آن کارهای تحقیقاتی زیادی در مورد گراف‌های ۱-منظم مکعبی در [۳]، [۵]، [۶]، [۷]، [۸]، انجام شده است. هم‌چنین گراف‌های ۱-منظم و از ظرفیت چهار، مورد توجه قرار گرفته‌اند. به‌عنوان مثال گراف‌های ۱-منظم و از ظرفیت چهار و از مرتبه p در مرجع [۱] رده‌بندی شده‌اند. هم‌چنین یک خانواده نامتناهی از گراف‌های کیلی ۱-منظم و از ظرفیت چهار روی گروه‌های متناوب در مرجع [۲۱] رده‌بندی شده‌اند. گراف‌های کیلی ۱-منظم و از ظرفیت چهار روی گروه‌های آبلی و دوری در مراجع [۲۰]، [۲۶]، [۲۸]، [۳۱]، [۳۲] رده‌بندی شده‌اند. هم‌چنین گراف‌های ۱-منظم از ظرفیت چهار روی گروه‌های دو وجهی در [۲۰]، [۲۶]، [۲۸] رده‌بندی شده‌اند. فرض کنید p, q اعداد اول باشند. باتوجه به [۲]، [۲۴]، [۲۵]، [۲۷]، [۳۱]، [۳۲] هر گراف ۱-منظم از ظرفیت چهار و از مرتبه pq یا p^2 ، یک گراف دوری است. به‌علاوه گراف‌های ۱-منظم از ظرفیت چهار و از مرتبه $2pq, kp^2$ که در آن $3 \leq k \leq 7$ در [۴]، [۱۱]، [۱۲]، [۱۳]، [۱۴]، [۳۴] رده‌بندی شده‌اند. باتوجه به این نتایج، هدف این مقاله رده‌بندی گراف‌های ۱-منظم از ظرفیت چهار و از مرتبه $11p^2$ است.

مقدمات

در این بخش، نمادها، تعاریفها و نتایجی را بیان می‌کنیم که در ادامه برای اثبات قضایا استفاده می‌شود.

فرض کنید X یک گراف باشد. از نماد $d(X)$ برای نشان دادن ظرفیت گراف X استفاده می‌کنیم. همچنین اگر B یک زیرمجموعه از $V(X)$ باشد، از نماد $X[B]$ برای زیرگراف القا شده به وسیله B استفاده می‌کنیم. فرض کنید X یک گراف رأس انتقالی و $G \leq \text{Aut}(X)$ به طوری که G به صورت انتقالی روی $V(X)$ عمل می‌کند. همچنین فرض کنید Σ یک افراز از $V(X)$ باشد که G -پایا است. منظور از گراف خارج قسمتی، X_Σ ، گرافی است که مجموعه رؤس آن Σ است و دو رأس $B, C \in \Sigma$ با یکدیگر مجاور هستند، هرگاه رأسی از B مانند u با رأسی از C مانند v با یکدیگر در گراف اصلی مجاور باشند. فرض کنید N زیرگروه G نرمال باشد و Σ مجموعه مدارهای عمل N روی $V(X)$ باشد. می‌دانیم Σ یک مجموعه N -پایا است. در این حالت از نماد X_N به جای X_Σ استفاده می‌کنیم. برای عدد صحیح و مثبت n ، از نماد $\mathbb{Z}_n$ برای نمایش گروه دوری از مرتبه n از نماد $\mathbb{Z}_n^*$ برای گروه ضربی $\mathbb{Z}_n$ و از نماد D_{2n} برای نمایش گروه دووجهی از مرتبه $2n$ استفاده می‌کنیم. همچنین از نماد G_n برای نمایش دادن یک دور به طول n و از نماد K_n برای نشان دادن گراف کامل از مرتبه n استفاده می‌کنیم. گراف C_n را یک n -دور می‌گوئیم.

فرض کنید G یک گروه جایگشتی روی مجموعه Ω و α عضوی از Ω باشد. از نماد G_α برای نمایش دادن پایدارساز رأس α در G استفاده می‌کنیم. گوئیم گراف G به صورت نیم‌منظم روی Ω عمل می‌کند، هرگاه برای هر α, Ω داشته باشیم $G_\alpha = 1$. گوئیم G به صورت منظم روی Ω عمل می‌کند، هرگاه G روی Ω نیم‌منظم و انتقالی باشد. همچنین g نیم‌منظم است، هرگاه (g) نیم‌منظم باشد.

فرض کنید G یک گروه متناهی و $S \subseteq G$ به طوری که $1 \notin S$ و $S = S^{-1}$. گراف کیلی $X = \text{Cay}(G, S)$ روی گروه G نسبت به S گرافی است که مجموعه رؤس آن اعضای G است و مجموعه یال‌های آن $\{[g, sg] | g \in G, s \in S\}$ است. فرض کنید $x, g \in G$ جایگشت $R(g)$ روی G را به صورت $R(g): x \mapsto xg$ تعریف می‌کنیم. گروه جایگشتی $\{R(g) | g \in G\}$ روی G را نمایش منظم راست^۲ گروه G گوئیم. واضح است که $R(G)$ با G یکرخت است و $R(G)$ زیرگروه منظم $(\text{Aut}(\text{Cay}(G, S)))$ است. همچنین واضح است که X هم‌بند است اگر و فقط اگر $G = \langle S \rangle$. به علاوه $\text{Aut}(G, S) = \{\alpha \in \text{Aut}(G) | S^\alpha = S\}$ یک زیرگروه از $\text{Aut}(\text{Cay}(G, S))$ است. در واقع $\text{Aut}(G, S)$ یک زیرگروه از $\text{Aut}(\text{Cay}(G, S))_1$ است. گراف کیلی $X = \text{Cay}(G, S)$ را نرمال گوئیم، هرگاه $R(G)$ یک زیرگروه نرمال $\text{Aut}(\text{Cay}(G, S))$ باشد. گودسیل در مرجع [۱۷] ثابت کرده است که $\text{Cay}(G, S)$ نرمال است، اگر و فقط اگر $\text{Aut}(\text{Cay}(G, S))_1 = \text{Aut}(G, S)$ (همچنین [۳۳] را ببینید). فرض کنید $\alpha \in \text{Aut}(G)$. در این صورت می‌توان به راحتی نشان داد که $\text{Cay}(G, S)$ نرمال است اگر و فقط اگر $\text{Cay}(G, S^\alpha)$ نرمال باشد.

فرض کنید $u \in V(X)$. در این صورت از نماد $N_X(u)$ برای نشان دادن رؤس مجاور u در X استفاده می‌کنیم. گراف $\tilde{X}$ به همراه یک نگاشت تصویر $p: \tilde{X} \rightarrow X$ را یک پوشش از گراف X گوئیم، اگر یک نگاشت پوشا $p: V(\tilde{X}) \rightarrow V(X)$ وجود داشته باشد، به طوری که $p|_{N_{\tilde{X}}(\tilde{v})}: N_{\tilde{X}}(\tilde{v}) \rightarrow N_X(p(\tilde{v}))$ یک نگاشت یک‌به‌یک و پوشا برای رأس $v \in V(X)$ و $\tilde{v} \in p^{-1}(v)$ پوشش $\tilde{X}$ از X به همراه نگاشت p را یک پوشش منظم یا K -پوشش^۳ گوئیم، هرگاه یک زیرگروه نیم‌منظم K از $\text{Aut}(\tilde{X})$ موجود باشد به طوری که X یکرخت با گراف خارج قسمتی $\tilde{X}/K$ باشد. در

1. Cayley graph
2. Right regular representation
3. K-covering

واقع نگاشت $ph: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/K$ ترکیبی از نگاشت‌های h, p است که در آن $h: X \rightarrow \tilde{X}/K$ (در این مقاله ترکیب توابع از سمت چپ به راست است). اگر K یک گروه دوری یا آبلی مقدماتی باشد آن‌گاه $\tilde{X}$ را پوشش^۱ دوری یا آبلی مقدماتی^۲ از X گویند و اگر $\tilde{X}$ هم‌بند باشد آن‌گاه K را گروه تبدیلات پوششی گوئیم. همچنین اگر X یک پوشش از گراف خارج قسمتی X_N باشد، به‌طوری‌که $N \leq \text{Aut}(X)$ آن‌گاه گوئیم X یک پوشش نرمال از X_N است. یک لایه از یال یا رأس، عبارت است از تصویر معکوس آن یال یا رأس به‌وسیله نگاشت p یک خودریختی از گراف $\tilde{X}$ را حافظ لایه گوئیم، هرگاه یک لایه را به یک لایه تصویر کند. واضح است که هر عضو گروه تبدیلات پوششی، حافظ لایه است. مجموعه همه خودریختی‌ها که حافظ لایه است تشکیل یک گروه می‌دهند که به آن گروه حافظ لایه^۳ گفته می‌شود.

فرض کنید $\tilde{X}$ یک K -پوشش از گراف X به‌همراه نگاشت تصویر p باشد. اگر $\alpha \in \text{Aut}(X)$ و $\tilde{\alpha} \in \text{Aut}(\tilde{X})$ به‌طوری‌که $\tilde{\alpha}p = p\alpha$ ، آن‌گاه گوئیم $\tilde{\alpha}$ یک خیز^۴ از α است و α یک تصویر^۵ از $\tilde{\alpha}$ است. این تعاریف را می‌توان به زیرگروه‌هایی از $\text{Aut}(X)$ که افزایش می‌شوند و زیرگروه‌های تصویر از $\text{Aut}(\tilde{X})$ تعمیم داد. واضح است که خیز و تصویر چنین زیرگروه‌هایی خود زیرگروهی از $\text{Aut}(X)$ و $\text{Aut}(\tilde{X})$ است.

فرض کنید M و N دو گروه باشند، در این‌صورت از نماد $N \rtimes M$ برای نشان دادن ضرب نیم‌مستقیم گروه N به‌وسیله M استفاده می‌کنیم. همچنین برای زیرگروه H از G از نمادهای $C_G(H)$ و $N_G(H)$ برای نشان دادن مرکزساز H در G و نرمال‌ساز H در G استفاده می‌کنیم. واضح است که $C_G(H)$ یک زیرگروه نرمال $N_G(H)$ است. به‌علاوه از نماد G' برای نشان دادن زیرگروه مشتق G استفاده می‌کنیم. درنهایت اگر A, B دو زیرگروه از G باشند، آن‌گاه زیرگروه تولید شده به‌وسیله همه جابه‌جاگرهای $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ را با نماد $[A, B]$ نمایش می‌دهیم.

حکم ۱. [۱۸، فصل I، قضیه ۵.۴] گروه خارج قسمتی $N_G(H)/C_G(H)$ یکرخت با زیرگروهی از $\text{Aut}(H)$ است.

حکم ۲. [۲۹، فصل I، حکم ۴.۴] هر گروه آبلی و انتقالی روی Ω یک گروه منظم است.

برای اثبات نتیجه^۳ به [۱۵، قضیه ۱.۱] مراجعه شود.

حکم ۳. فرض کنید X یک گراف هم‌بند و ۱-منظم از ظرفیت چهار و N یک زیرگروه نرمال از G باشد. در این‌صورت یکی از این شرایط برقرار است:

۱. N به‌صورت انتقالی روی $V(X)$ عمل می‌کند.
۲. X یک گراف دو بخشی است و N به‌صورت انتقالی روی هر بخش عمل می‌کند.
۳. N دارای $r \geq 3$ مدار بر روی $V(X)$ است و گراف خارج قسمتی X_N یک دور به طول r است و G یک گروه خودریختی D_{2r} روی X_N القاء می‌کند.
۴. N دارای $r \geq 5$ مدار بر روی $V(X)$ است و N به‌صورت نیم‌منظم روی $V(X)$ عمل می‌کند. همچنین گراف خارج قسمتی X_N یک گراف G/N -انتقالی، هم‌بند و از ظرفیت چهار است و X یک پوشش G -نرمال از X_N است.

برای اثبات نتیجه^۴ به [۲۹، قضیه ۳.۴] مراجعه شود.

1. Cyclic
2. Rlementary abelian covering
3. Fibre-preserving group
4. Lift
5. Projection

قضیه ۴. فرض کنید p یک عدد اول و P یک $p -$ زیرگروه سیلو از گروه جایگشتی G روی Ω باشد. همچنین فرض کنید $\omega \in \Omega$. اگر p^m طول $G -$ مدار شامل ω را عا کند آن گاه p^m طول $P -$ مدار شامل ω را عا می‌کند. برای بیان نتیجه بعد نیاز به معرفی یک خانواده از گراف‌های با ظرفیت چهار داریم که در [۱۶] برای اولین بار معرفی شده است. گراف $C^{\pm 1}(p; 11p, 1)$ گرافی است که مجموعه رئوس آن $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{11p}$ و مجموعه یال‌های آن $\{(i, j), (i \pm 1, j \pm 1) \mid i \in \mathbb{Z}_p, j \in \mathbb{Z}_{11p}\}$ است. همچنین باتوجه به [۱۶، تعریف ۲.۲] گراف‌های $C^{\pm 1}(p, 11p, 1)$ همگی گراف‌های کیلی روی $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{11p}$ و دارای مجموعه مولد زیر است:

$$\{(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)\}.$$

در اثبات قضیه ۱۱ نیاز به گراف $C^{\pm 1}(p; 11p, 1)$ داریم، که در آن $p \geq 11$ بنا به [۱۶، تعریف ۲.۲] تمامی این گراف‌ها برای $p \geq 11$ ، گراف‌های کیلی نرمال روی $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{11p}$ است.

حکم ۵. [۱۶، قضیه ۱.۱] فرض کنید X یک گراف هم‌بند، $G -$ متقارن و از ظرفیت چهار و مرتبه $11p^2$ باشد. همچنین فرض کنید $N = \mathbb{Z}_p$ زیرگروه نرمال مینیمال از G با مدارهایی از طول p باشند به‌طوری‌که p یک عدد اول فرد است. در نهایت فرض کنید K هسته عمل G روی $V(X_N)$ باشد. اگر $X_N = C_{11p}$ و $K_v \cong \mathbb{Z}_2$ آن گاه X یکرخت با $C^{\pm 1}(p; 11p, 1)$ است.

حکم ۶. [۱۶، قضیه ۲.۱] فرض کنید X یک گراف هم‌بند و $G -$ متقارن از ظرفیت چهار و مرتبه $11p^2$ باشد. همچنین فرض کنید $N = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ زیرگروه نرمال مینیمال از G با مدارهایی از طول p^2 باشند، که در آن p یک عدد اول فرد است. در نهایت فرض کنید K هسته عمل G روی $V(X_N)$ باشد. اگر $X_N \cong C_{11}$ و $K_v \cong \mathbb{Z}_2$ آن گاه X یکرخت با یکی از گراف‌های موجود در [۱۶، لم ۴.۸] است.

فرض کنید A یک گروه باشد به‌طوری‌که روی گروه G عمل می‌کند. همچنین فرض کنید A یا G حل‌پذیر باشند. در این صورت گوئیم عمل A روی G هم‌اول است هرگاه $(|A|, |G|) = 1$. نتیجه زیر را می‌توان در [۱۹، صفحه ۱۸۷] مشاهده کرد.

حکم ۷. فرض کنید A روی G به‌صورت هم‌اول عمل کند. در این صورت $G = [G, A]C_G(A)$.

در نهایت در مثال زیر گراف $G(11p; 2, 2, 2)$ را معرفی می‌کنیم. حالت کلی این گراف در [۲۴] معرفی شده است. **مثال ۸.** فرض کنید 2 یک عامل از $p - 1$ و $H(11, 2)$ زیرگروه منحصربه‌فرد از مرتبه 2 گروه ضربی $\mathbb{Z}_{11}^*$ باشد. فرض کنید $\langle a \rangle = H(11, 2)$ ، $t \in \mathbb{Z}_p^*$ به‌طوری‌که $t \in -H(P, 2)$ و u کوچک‌ترین مضرب مشترک 2 و مرتبه عضو t در $\mathbb{Z}_p^*$ باشد. در نهایت فرض کنید $p \neq 11$. در این صورت $a = -1$ و $t \in \{\pm 1\}$ و $v = 2$ از این‌رو، رأس (i, x) با رأس (j, y) مجاور است هرگاه $j - i \in \{\pm 1\}$ و $y - x \in \{\pm 1\}$. در واقع گراف مورد نظر یکرخت با گراف کیلی $\text{Cay}(\mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_p, \{(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (1, -1)\})$ است که آن را با نماد $X = G(11p; 2, 2, 2)$ نمایش می‌دهیم. به‌علاوه این گراف یک گراف دوری است. همچنین باتوجه به [۲۴] این گراف یک گراف ۱-منظم است.

گراف‌های ۱-منظم از مرتبه $11p^2$

برای اثبات نتیجه اصلی به دو لم ۹ و ۱۰ نیاز داریم:

لم ۹. فرض کنید G یک گروه غیر آبدی از مرتبه p^2q باشد که در آن q, p اعداد اول هستند و $p > 3$. همچنین فرض کنید $p > q$ و G دارای زیرگروه نرمال N از مرتبه p باشد به طوری که G/N یک گروه دوری است. در این صورت G یکرخت با گروه زیر است:

$$\langle x, y, z \mid x^p = y^q = z^p = [x, z] = [y, z] = 1, y^{-1}xy = x^i \rangle,$$

به طوری که (پیمانه p) $i^q \equiv 1$ و $(i, p) = 1$.

برهان: به مرجع [۱۸] مراجعه شود.

لم ۱۰. فرض کنید $p > 11$ یک عدد اول باشد و

$$G = \langle x, y, z \mid x^p = y^{11} = z^p = [x, z] = [y, z] = 1, y^{-1}xy = x^i \rangle,$$

که در آن (پیمانه p) $i^{11} \equiv 1$ و $(i, p) = 1$. در این صورت هیچ گراف کیلی نرمال ۱-منظم از مرتبه $11p^2$ و ظرفیت ۴ وجود ندارد.

برهان: فرض کنید X یک گراف کیلی نرمال ۱-منظم از مرتبه $11p^2$ و ظرفیت ۴ باشد. نشان می‌دهیم که این فرض منجر به تناقض خواهد شد. چون X یک گراف کیلی نرمال و ۱-منظم است، نتیجه می‌گیریم که $A_1 = \text{Aut}(G, S)$ روی S به صورت انتقالی عمل می‌کند و بنابراین تمام اعضای S دارای مرتبه یکسان است. اعضای مرتبه ۱۱ گروه G در زیرگروه تولید شده به وسیله x, y یعنی $\langle x, y \rangle$ و اعضای مرتبه p در $\langle x, z \rangle$ قرار دارند. چون X همبند است از این رو، $G = \langle S \rangle$ و بنابراین S دارای عضوی از مرتبه $11p$ است. از نماد S_{11p} برای نشان دادن عضوهای مرتبه $11p$ گروه G استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$S \subseteq S_{11p} = \{x^s y^t z^j \mid s \in \mathbb{Z}_p, t \in \mathbb{Z}_{11}^*, j \in \mathbb{Z}_p^*\}.$$

فرض کنید $x^s y^t z^j \in S$ که در آن $s \neq 0$ واضح است که $\sigma: x \mapsto x^s, y \mapsto y, z \mapsto z^j$ یک خودریختی از گروه G است. همچنین اگر $y^t z^j \in S$ آن گاه $\sigma: x \mapsto x, y \mapsto y, z \mapsto z^j$ یک خودریختی از گروه G است. بنابراین می‌توان فرض کرد

$$S = \{xy^t z, y^{-t} x^{-1} z^{-1}, x^m y^n z^k, y^{-n} x^{-m} z^{-k}\},$$

به طوری که $k \in \mathbb{Z}_p^*$ و $n \in \mathbb{Z}_{11}^*, m \in \mathbb{Z}_p$ یا

$$S = \{y^t z, y^{-t} z^{-1}, x^m y^n z^k, y^{-n} x^{-m} z^{-k}\},$$

به طوری که $k \in \mathbb{Z}_p^*$ و $n \in \mathbb{Z}_{11}^*, m \neq 0$ ابتدا فرض کنید که

$$S = \{xy^t z, y^{-t} x^{-1} z^{-1}, x^m y^n z^k, y^{-n} x^{-m} z^{-k}\},$$

چون $\text{Aut}(G, S)$ به صورت انتقالی روی S عمل می‌کند، نتیجه می‌گیریم که $\alpha \in \text{Aut}(G, S)$ موجود است به طوری که $(xy^t z)^\alpha = y^{-t} x^{-1} z^{-1}$. بنابراین

$$(xz)^\alpha (y^t)^\alpha = y^{-t} x^{-1} z^{-1} = x^{-it} y^{-t} z^{-1}.$$

از این رو، $(y^t)^\alpha = x^{t_1} y^{t_2}$ به طوری که $t_1 \in \mathbb{Z}_p$ و $t_2 \in \mathbb{Z}_{11}^*$. بنابراین $(xz)^\alpha x^{t_1} y^{t_2} = x^{-it} y^{-t} z^{-1}$. در نتیجه

$$(xz)^\alpha = x^{-it} x^{-t_1 i(t_1 + t_2)} y^{-t - t_2} z^{-1}.$$

چون $o(xz) = p$ داریم $t = -t_2$. بنابراین $(xz)^\alpha = x^{-it - t_1} z^{-1}$. همچنین فرض کنید $z^\alpha = x^{s_1} z^{s_2}$ که در آن $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_p$. بنابراین $x^\alpha = x^{-it - s_1 - t_1} z^{-1 - s_2}$. چون z^α با $(y^t)^\alpha$ جابه‌جا

می‌شود، نتیجه می‌گیریم که $s_1 = 0$ یا $i^{-t_2} = 1$. چون $t_2 \in \mathbb{Z}_{11}^*$ و (پیمانه p) $i^{11} \equiv 1$ نتیجه می‌شود که $i^{-t_2} \neq 1$. بنابراین می‌توان فرض کرد که $s_1 = 0$. در نتیجه $x^\alpha = x^{-i^{t_2-t_1}z^{-1-s_2}}$ ، $(y^t)^\alpha = x^{t_1}y^{-t}$ و $z^\alpha = z^{s_2}$ چون $x^{y^t} = x^{i^t}$ داریم $(x^\alpha)^{y^t} = (x^\alpha)^{i^t}$ و بنابراین $s_2 = -1$ و $(-i^t - t_1)(i^{t_2} - i^t) = 0$. از طرفی چون $t = -t_2$ و $t_2 \in \mathbb{Z}_{11}^*$ داریم $(i^{t_2} - i^t) \neq 0$. بنابراین $(-i^t - t_1) = 0$ و در نتیجه $x^\alpha = 1$ که یک تناقض است. اکنون فرض کنید $S = \{y^t z, y^{-t} z^{-1}, x^m y^n z^k, y^{-n} x^{-m} z^{-k}\}$ به‌طوری‌که $m \neq 0$ چون $\text{Aut}(G, S)$ به‌صورت انتقالی روی S عمل می‌کند پس $\alpha \in \text{Aut}(G, S)$ موجود است به‌طوری‌که $(y^t z)^\alpha = y^{-t} z^{-1}$. بنابراین $(y^t)^\alpha z^\alpha = y^{-t} z^{-1}$. می‌توان فرض کرد $(y^t)^\alpha = x^{t_1} y^{t_2}$ که در آن $t_1 \in \mathbb{Z}p$ و $t_2 \in \mathbb{Z}_{11}^*$. از این‌رو، $(z)^\alpha = y^{-t_2} x^{-t_1} y^{-t} z^{-1} = x^{-i^{t_2}} y^{-t_2-t} z^{-1}$ چون $o(z) = p$ نتیجه می‌گیریم که $t = -t_2$ و بنابراین $z^\alpha = x^{-i^{t_2}} z^{-1}$. به‌علاوه از این‌که z^α با $(y^t)^\alpha$ جابه‌جا می‌شود، نتیجه می‌گیریم $(i^{-t_2} - 1) = 0$ که این یک تناقض است.

قضیه ۱۱ نتیجه اصلی این مقاله است.

قضیه ۱۱. فرض کنید p یک عدد اول باشد. گراف X از مرتبه $11p^2$ و ظرفیت چهار ۱-منظم است اگر و فقط اگر یکی از این حالت‌ها برقرار باشد:

- i. $p \in \{2, 3, 5, 7\}$
- ii. X یک گراف کیلی روی گروه $\langle x, y \mid x^p = y^{11p} = [x, y] = 1 \rangle$ است و مجموعه مولد آن مجموعه $S = \{y, y^{-1}, xy, x^{-1}y^{-1}\}$ است.
- iii. X یک گراف هم‌بند کمان انتقالی دوری با هر مجموعه مولد S است.
- iv. X یکی از گراف‌های موجود در [۴، ۸، ۱۶، ۱۸] است.

برهان: فرض کنید X یک گراف ۱-منظم از مرتبه $11p^2$ باشد. اگر $p \leq 7$ آن‌گاه $|V(X)|$ برابر با یکی از اعداد ۴۴، ۹۹، ۲۷۵ یا ۵۳۹ است. لیست کامل گراف‌های کمان انتقالی از ظرفیت چهار و مرتبه حداکثر ۶۴۰ در [۲۲]، [۲۳] موجود است. با در نظر گرفتن این مراجع و نرم‌افزار magma اثبات قضیه در حالت $p \leq 7$ کامل می‌شود. همچنین اگر $p = 11$ آن‌گاه باتوجه به [۹، قضیه ۱.۴] گراف X یکرخت با $\text{Cay}(\mathbb{Z}_{11^2} \times \mathbb{Z}_{11}, S)$ است، به‌طوری‌که $\langle a \rangle \times \langle b \rangle = \mathbb{Z}_{11^2} \times \mathbb{Z}_{11}$ و $S = \{a, ab, a^{-1}, a^{-1}b^{-1}\}$ این گراف حالت (ii) قضیه را برای $p = 11$ نتیجه می‌دهد.

اکنون فرض کنید $p > 11$ و $A = \text{Aut}(X)$ و همچنین فرض کنید A_v پایدارساز رأس v در A باشد. در نهایت فرض کنید P ، زیرگروه سیلوی A باشد. چون A ۱-منظم است، پس $|A| = 44p^2$. اگر $P \trianglelefteq A$ آن‌گاه A حل‌پذیر خواهد بود. بنابراین فرض کنید $A \not\trianglelefteq P$. بنابه قضایای سیلو $|44(kp+1)|$. بنابراین $k = 1$ ، $p = 43$ و در نتیجه $|A : N_A(P)| = 44$ و از آن‌جا $C_A(P) = N_A(P) = P$ از این‌رو، P یک نرمال P -متمم مانند M دارد. چون $|M| = 44$ نتیجه می‌شود که ۱۱-زیرگروه سیلوی آن که با نماد Q نشان می‌دهیم در A نرمال خواهد بود. از این‌رو، $[P, Q] = 1$ که متناقض با $C_A(P) = P$ است. بنابراین A حل‌پذیر است و P -زیرگروه سیلوی آن نرمال در A است.

ابتدا فرض کنید P یک گروه دوری، X_P گراف خارج قسمتی از گراف X مربوط به مدارهای عمل گروه P باشد و K هسته عمل A روی $V(X_P)$ باشد. بنابه حکم ۴ مدارهای عمل P دارای طول p^2 است. بنابراین $|V(X_P)| = 11$ و $A/K \cong P \leq K$. به صورت کمان انتقالی روی X_P عمل می‌کند.

بنا به حکم ۳ $X_P \cong C_{11}$ و $\frac{A}{K} \cong D_{22}$ و از آنجا $|K| = 2p^2$ یا P به صورت نیم‌منظم روی $V(X)$ عمل می‌کند و گراف خارج قسمتی X_P یک گراف هم‌بند از ظرفیت چهار است، به طوری که G/K روی X_P کمان انتقالی است و X یک پوشش منظم از X_P است. بنا به [۳۰] هیچ گراف هم‌بند کمان انتقالی از مرتبه ۱۱ و ظرفیت چهار وجود ندارد. بنابراین $X_P \cong C_{11}$. چون $A/K \cong D_{22}$ یک گروه غیرآبلی است و A/K یک گروه خارج قسمتی از A/P است، نتیجه می‌گیریم که A/P یک گروه غیرآبلی است. چون K دارای مرتبه $2p^2$ و به صورت صادقانه روی مدارهای از طول p^2 عمل می‌کند، نتیجه می‌گیریم که K به صورت غیرنیم‌منظم روی $V(X)$ عمل می‌کند. بنابراین $K_v \cong \mathbb{Z}_2$ ، که در آن $v \in V(X)$. بنا به حکم ۲، A/C یکریخت با زیرگروهی از $\mathbb{Z}_{p(p-1)}$ است که در آن $C = C_A(P)$. چون A/P غیرآبلی است، نتیجه می‌شود که P یک زیرگروه محض C است. اگر $C \cap K \neq P$ آن‌گاه $C \cap K = K$. اکنون چون P یک گروه آبلی است، نتیجه می‌شود که K یک گروه آبلی است. همچنین K به صورت انتقالی و صادقانه روی مدارها عمل می‌کند که این یک تناقض است. چون K_v یک 2 -زیرگروه سیلوی K است، نتیجه می‌گیریم که K_v زیرگروه مشخصه گروه K است و بنابراین در A نرمال است. بنابراین $K_v = 1$ ، که این نیز یک تناقض است. بنابراین $C \cap K = P$

$$1 \neq C/P = C/C \cap K \cong CK/K \leq A/K \cong D_{22}.$$

اگر $C/P \cong \mathbb{Z}_2$ ، آن‌گاه $|C| = 2p^2$. واضح است که C_v یک گروه آبلی است و $|C_v| \in \{1, 2\}$. اگر $|C_v| = 2$ ، آن‌گاه C_v یک 2 -زیرگروه سیلوی C است و بنابراین C_v یک زیرگروه مشخصه C است. اکنون نرمال بودن C در A ایجاب می‌کند که $C_v \leq A$ و در نتیجه $C_v = 1$ ، که یک تناقض است. حال اگر $|C_v| = 1$ ، آن‌گاه طول مدارهای C برابر $2p^2$ است که یک تناقض است. از این‌رو، $|C/P| \in \{11, 22\}$ و بنابراین C/P دارای زیرگروه مشخصه از مرتبه ۱۱ مانند H/P است. لذا $|H| = 11p^2$ ؛ $H/P \leq A/P$ و در نتیجه $H \leq A$. به علاوه چون $H \leq C = C_A(P)$ ، نتیجه می‌شود که H یک گروه آبلی است. واضح است که $|H_v| \in \{1, 11\}$. اگر $|H_v| = 1$ ، آن‌گاه $|H| = 11p^2$ و بنابراین H به صورت منظم روی $V(X)$ عمل می‌کند. از این‌رو، X یک گراف کیلی روی گروه آبلی با P -زیرگروه سیلوی دوری است. واضح است که این گروه یکریخت با $\mathbb{Z}_{11p^2}$ است به طوری که $p > 11$. همچنین بنا به [۳۲، قضیه ۷.۲] X یک گراف ۱-منظم است. اکنون اگر $|H_v| = 11$ ، آن‌گاه H_v یک 11 -زیرگروه سیلوی H است از این‌رو، H_v یک زیرگروه مشخص H است. در نتیجه H_v یک زیرگروه نرمال A است و از آنجا $H_v = 1$ که یک تناقض است.

اکنون فرض کنید P یک گروه آبلی مقدماتی باشد. ابتدا فرض کنید P یک زیرگروه نرمال مینیمال از گروه A باشد. گراف خارج قسمتی X_P از X مربوط به مدارهای P را در نظر می‌گیریم. فرض کنید K هسته عمل A روی $V(X_P)$ باشد. بنا به حکم ۳۰۲، یا $X_P \cong C_{11}$ و بنابراین $A/K \cong D_{22}$ و در نتیجه $|K| = 2p^2$ یا P به صورت نیم‌منظم روی $V(X)$ عمل می‌کند و گراف خارج قسمتی X_P یک گراف هم‌بند از ظرفیت چهار است به طوری که A/K به صورت کمان انتقالی روی X عمل می‌کند و X یک پوشش منظم از X_P است. بنا به [۳۰] هیچ گراف کمان انتقالی هم‌بند از ظرفیت چهار و مرتبه ۱۱ وجود ندارد. از این‌رو، می‌توان فرض کرد $X_P \cong C_{11}$ و بنابراین $K_v \cong \mathbb{Z}_2$. حال بنا به حکم ۶۰۲، X یکریخت با یکی از گراف‌های موجود در [۱۶، لم ۴.۸] است.

اکنون فرض کنید P زیرگروه نرمال مینیمال A نباشد. در این صورت زیرگروه نرمال مینیمال N از A با $\mathbb{Z}_p$ یکرخت است. فرض کنید X_N گراف خارج قسمتی از X با توجه به مدارهای N باشد. همچنین فرض کنید K هسته عمل A روی $V(X_N)$ باشد. در این صورت $N \leq K$ و A/K روی $V(X_N)$ به صورت انتقالی عمل می‌کند. به علاوه داریم $|V(X_N)| = 11p$. بنا به حکم ۳، X_N یک دور از طول $11p$ است و یا N به صورت نیم‌منظم روی $V(X)$ عمل می‌کند و گراف خارج قسمتی X_N یک گراف هم‌بند و از ظرفیت چهار است و A/N به صورت کمان انتقالی روی X_N عمل می‌کند. توجه شود که در این حالت X یک پوشش منظم از X_N است. اگر $X_N \cong C_{11p}$ ، آن‌گاه $A/K \cong D_{22p}$ و $|K| = 2p$ از این‌رو، $K_v \cong \mathbb{Z}_2$. اکنون بنا به حکم ۵، X یکرخت با $C^{\pm 1}(P; 11p, 1)$ است. همچنین اگر X_N یک گراف هم‌بند از ظرفیت چهار باشد به طوری که A/N به صورت کمان انتقالی روی X/N عمل می‌کند آن‌گاه طبق حکم ۳، X یک پوشش از گراف متقارن از مرتبه $11p$ است. بنا به [۲۴]، $G(11p; 2, 2, 2)$ تنها گراف متقارن از ظرفیت چهار و از مرتبه $11p$ است (مثال ۸). در این حالت زیرگروه ۱-منظم از گروه خودریختی‌های گراف شامل زیرگروه منظم و نرمال یکرخت با $\mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_p$ است. فرض کنید H زیرگروه ۱-منظم از گروه خودریختی‌های گراف X_N باشد. چون X ۱-منظم است از این‌رو، A یک خیزش از H است. همچنین چون H شامل زیرگروه منظم نرمال یکرخت با $\mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_p$ است لذا A نیز شامل یک زیرگروه منظم نرمال است. بنابراین X یک گراف کیلی نرمال از مرتبه $11p^2$ است. چون $A/\mathbb{Z}_p \cong H$ و $\mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_p \leq H$ نتیجه می‌شود که A دارای یک زیرگروه نرمال مانند G است به طوری که $G/\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{11}$. اگر G آبدی باشد آن‌گاه G یکرخت با $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{11p}$ و یا $\mathbb{Z}_{11p^2}$ است. همچنین اگر G غیرآبدی باشند آن‌گاه بنا به لم ۹، G یکرخت با

$$\langle x, y, z \mid x^p = y^{11} = z^p = [x, z] = [y, z] = 1, y^{-1}xy = x^i \rangle,$$

است که در آن (پیمانه p) $i^{11} \equiv 1$ و $(i, p) = 1$. اگر $G \cong \mathbb{Z}_{11p^2}$ آن‌گاه بنا به [۳۱ قضیه ۷] X ۱-منظم است. به علاوه اگر $G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{11p}$ آن‌گاه بنا به [۳۳، حکم ۳۰۳ و مثال ۲۰۳] گراف X یکرخت با $\text{Cay}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{11p}, \{a, a^{-1}, ab, a^{-1}b^{-1}\})$ است. این گراف در قضیه ۱۱ قسمت (ii) آورده شده است. در نهایت در حالت آخر بنا به لم ۱۰، گراف X یک گراف ۱-منظم نیست. اکنون اثبات قضیه کامل است.

منابع

1. Chao C. Y., "On the classification of symmetric graphs with a prime number of vertices", Tran. Amer. Math. Soc. 158 (1971) 247-256.
2. Cheng Y., Oxley J., "On weakly symmetric graphs of order twice a prime", J. Combin. Theory B 42 (1987) 196-211.
3. Conder M., <http://www.math.auckland.ac.nz/Conder/Symmcubic10000list.txt>.
4. Feng Y.-Q., Kutnar K., Marusic D., Zhang C., "Tetravalent one-regular graphs of order $4p^2$ ", Filomat 28:2 (2014) 285-303.
5. Feng Y.-Q., Kwak J. H., "Classifying cubic symmetric graphs of order $10p$ or $10p^2$ ", Science in China A 49 (2006) 300-319.

6. Feng Y.-Q., Kwak J. H., "Cubic symmetric graphs of order twice an odd prime power", J. Austral. Math. Soc. 81 (2006) 153-164.
7. Feng Y.-Q., Kwak J. H., "Cubic symmetric graphs of order a small number times a prime or a prime square", J. Combin. Theory B 97 (2007) 627-646.
8. Feng Y.-Q., Kwak J. H., Wang K. S., "Classifying cubic symmetric graphs of order $8p$ or $8p^2$ ", European J. Combin. 26 (2005) 1033-1052.
9. Feng Y.-Q., Xu M. Y., "Normality of tetravalent Cayley graphs of odd prime-cube order and its application", Acta Mathematica Sinica. English Series, 21 (2005) 903-912.
10. Frucht R., "A one-regular graph of degree three", Canad. J. Math. 4 (1952) 240-247.
11. Ghasemi M., "A classification of tetravalent one-regular graphs of order $3p^2$ ", Colloquium Math. 128:1 (2012) 15-24.
12. Ghasemi M., "An algorithmic-type classification of tetravalent one-regular graphs using computer algebra tools", Fundamenta Informatica 135(3) (2014) 211-228.
13. Ghasemi M., Varmazyar R., "A family of tetravalent one-regular graphs, Ars Combinatoria 134 (2017) 283-293.
14. Ghasemi M., Spiga P., "4-valent one-regular graphs of order $6p^2$ admitting a group of automorphisms acting regularly on arcs", Ars Math Contemp. 9 (2015) 1-18.
15. Gardiner A., Praeger C. E., "On tetravalent symmetric graphs", European. J. Combin. 15 (1994) 375-381.
16. Gardiner A., Praeger C. E., "A characterization of certain families of tetravalent symmetric graphs", European. J. Combin. 15 (1994) 383-397.
17. Godsil C. D., "On the full automorphism group of a graph", Combinatorica 1 (1981) No 3, 243-256.
18. Huppert B., "Endliche Gruppen I", Springer-Verlag, Berlin (1967).
19. Kurzweil H., Stellmacher B., "An itroduction to the theory of finite groups", Erlangen (2003).
20. Kwak J. H., Oh J. M., "One-regular normal Cayley graphs on dihedral groups of valency 4 or 6 with cyclic vertex stabilizer", Acta Math. Sin. Engl. Ser. 22 (2006) 1305-1320.
21. Marusic D., "A family of one-regular graphs of valency 4", European J. Combin. 18 (1997) 59-64.
22. Potocnik P., Spiga P., Verret G., <http://www.matapp.unimib.it/spiga/>.
23. Potocnik P., Spiga P., Verret G., "Cubic vertex-transitive graphs on up to 1280 vertices", [arXiv:1201.5317v1 math.CO].
24. Praeger C. E., Wang R. J., Xu M. Y., "Symmetric graphs of order a product of two distinct primes", J. Combin. Theory Ser. B 58 (1993) 299-318.

25. Praeger C. E., Xu M. Y., "Vertex-primitive graphs of order a product of two distinct primes", J. Combin. Theory Ser. B 59 (1993) 216-45.
26. Wang C. Q., Xu M. Y., "Non-normal one-regular and tetravalent Cayley graphs of dihedral groups D_{2n} ", European J. Combin. 27 (2006) 750-766.
27. Wang R. J., Xu M. Y., "A classification of symmetric graphs of order $3p$ ", J. Combin. Theory B 58 (1993) 197-216.
28. Wang C. Q., Zhou Z. Y., "Tetravalent one-regular normal Cayley graphs of dihedral groups", Acta Math. Sinica Chinese Ser. 49 (2006) 669-678.
29. Wielandt H., "Finite Permutation Groups", Academic Press, New York (1964).
30. Wilson S., Potocnik P., "A Census of edge-transitive tetravalent graphs", <http://jan.ucc.nau.edu/swilson/C4Site/index.html>.
31. Xu M. Y., "A note on one-regular graphs", Chin. Scin. Bull. 45, (2000) 2160-2162.
32. Xu J., Xu M. Y., "Arc-transitive Cayley graphs of valency at most four on Abelian groups", Southeast Asian Bull. Math. 25 (2001) 355-363.
33. Xu M. Y., "Automorphism groups and isomorphisms of Cayley digraphs", Discrete Math. 44 (2001) 1502-1508.
34. Zhou J.-X., Feng Y.-Q., "Tetravalent one-regular graphs of order $2pq$ ", J. Algebraic Combin. 29 (2009) 457-471.