(نشریه علوم دانشگاه خوارزمی)

رابطۀ الحاقی بین خود-تابعگون‌های Hom و تانسور رستۀ (دو-) مدول‌های جبرهای هم-مدولی روی یک جبر شبه-هاپف

سعید باقری
دانشگاه ملایر، دانشکدۀ علوم ریاضی

دریافت ۹۷/۰۳/۲۵ پذیرش ۹۷/۱۱/۰۸

چکیده

فرض کنید H یک جبر شبه-هوپف[۱] روی حلقه جابه‌جایی k و A یک جبر هم-مدولی[۲] روی H باشد. در این مقاله نشان می‌دهیم که گرچه رسته دو-مدول‌ها، ${}_A\mathbb{M}_A$، لزوماً یک رستۀ تکوارا ی[۳] نیست، با این وجود هم-عمل[۴] عمل رستۀ ${}_H\mathbb{M}_H$ روی ${}_A\mathbb{M}_A$ را باعث شده و از این رهگذر نسخه‌های مناسبی از خود-تابعگون[۵]های تانسور و A Hom از رستۀ ${}_A\mathbb{M}_A$ را معرفی کرده و الحاقی بین این خود-تابعگون‌ها را توصیف می‌کنیم. هم‌چنین یکه[۶]ها و هم-یکه[۷]های وابسته به آنها را صریحاً محاسبه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: جبر (شبه-) هوپف، جبر هم- مدولی، رسته تکواره‌ای، عمل یک رسته تکواره‌ای.

مقدمه

روی حلقه جابه‌جایی k، ضرب تانسوری هر دو k–مدول خود یک k–مدول بوده است و برای هر سه k–مدول V، M و N نگاشت طبیعی

$$a_{V,M,N} : (V\otimes M)\otimes N \to V\otimes(M\otimes N),\quad (v\otimes m)\otimes n \mapsto v\otimes(m\otimes n),$$

یک‌ریختی k–مدول‌هاست. بنابراین رسته $\mathbb{M}_k$ شامل همۀ k–مدول‌ها یک رستۀ تکواره‌ای است. هم‌چنین از نظریه مقدماتی مدول‌ها می‌دانیم که زوج $(V\otimes_k -, \mathrm{Hom}_k(V,-))$ از خود-تابعگون‌های $\mathbb{M}_k$ یک زوج الحاقی بوده است و یکه و هم-یکه متناظر با آن بدین‌صورت طبیعی هستند:

$$\eta_M : M \to \mathrm{Hom}_k(V, V\otimes_k M),\qquad m\mapsto [v\mapsto v\otimes m],$$
$$\varepsilon_M : V\otimes \mathrm{Hom}_k(V,M)\to M,\qquad v\otimes f\mapsto f(v).$$

برای دو-جبر[۸] $(H,\mu,\iota,\Delta,\varepsilon)$ روی حلقه جابه‌جایی k، بازای هر دو H-مدول چپ $M,N\in {}_H\mathbb{M}$ حاصل‌ضرب تانسوری $M\otimes_K N$ نیز یک H–مدول چپ است. عمل حلقه H روی این ضرب تانسوری برای هر $h\in H$، $m\in M$ و $n\in N$ به‌صورت $h.(m\otimes n)=\Delta(h).(m\otimes n)$ تعریف می‌شود. از این طریق رستۀ ${}_H\mathbb{M}$ شامل همۀ H–مدول‌های چپ به یک رستۀ تکواره‌ای تبدیل می‌شود.

*نویسنده مسئول s.bagheri@malayeru.ac.ir

1. Quasi- Hopf algebra
2. Comodule algebra
3. Monoidal category
4. Coaction
5. Endofunctor
6. Unit
7. Counit
8. Bialgebra

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.3.10.3]
[DOI: 10.52547/mmr.6.3.347]

شرط شرکت‌پذیری[1] این رسته تکواره‌ای مستقیماً از هم-شرکت‌پذیری[2] هم-ضرب[3] Δ نتیجه می‌شود. در واقع برای H– مدول‌های چپ V , M و N نگاشت k–یکریختی طبیعی

$$a-\{V,M,N\{(V\otimes_k M)\otimes_k N\to V\otimes_k(M\otimes_k N)$$

H- خطی نیز هست. با توجه به نمادگذاری منسوب به سویدلر[4]، این بدان معنا است که برای هر $h\in H$ ،$v\in V$، $m\in M$ و $n\in N$ داریم:

$$h.((v\otimes m)\otimes n)=(h_{11}v\otimes h_{12}m)\otimes h_2 n=h_1 v\otimes(h_{21}m\otimes h_{22}n)=h.(v\otimes(m\otimes n)).$$

برابری میانی مذکور همان خاصیت هم-شرکت‌پذیری هم-ضرب Δ است.

علاوه بر این، برای یک دو-جبر H روی k، حلقه درون‌ریختی‌های $End_k(H)$ دارای ساختار k–جبری دومی است که عمل ضرب آن همان ضرب پیچشی[5] $*$ است. عضو $S\in End_K(H)$ را یک **آنتی‌پود**[6] می‌نامند، اگر وارون ضربی نگاشت همانی نسبت به عمل ضرب پیچشی $*$ باشد. یعنی $id*S=\iota\circ\varepsilon=S*id$.

دو-جبر H را یک **جبر هوپف** می‌نامند اگر دارای یک آنتی پود باشد.

موضوع اصلی این مقاله درباره جبرهای شبه-هوپف است که به‌عنوان تعمیمی از جبرهای هوپف به‌وسیلهٔ وی.جی. درینفلد [۱۰] معرفی شده است. درواقع یک جبر شبه-هوپف همه ویژگی‌های یک جبر هوپف به جز هم-شرکت‌پذیری هم-ضرب را دارا بوده است و در آن عدم هم-شرکت‌پذیری شبه-دو-جبر H با یک ۳-هم-دور[7] $\phi\in H\otimes H\otimes H$ به گونه‌ای کنترل می‌شود که رسته (دو-) مدول‌ها روی H هم‌چنان یک رسته تکواره‌ای باقی بماند. بنابراین در این حالت نگاشت $a_{V,M,N}$ تعریف شده در بالا دیگر لزوماً H–خطی نیست و بسیاری از نتایج درباره جبرهای هوپف را لزوماً نمی‌توان مستقیماً به وضعیت جدید تعمیم داد. مثلاً در این حالت جبر پیچشی $(End_K(H),*)$ لزوماً شرکت‌پذیر نیست. یک راه برای کنترل منطقی این مشکلات آن است که شرط شرکت‌پذیری بدیهی $a_{V,M,N}$ در رستهٔ H– مدول‌ها با یک شرط شرکت‌پذیری نابدیهی جای‌گزین شود. هم‌چنین در [۱۰] به‌عنوان تعمیم مفهوم آنتی‌پود، مفهوم شبه-آنتی‌پود[8] معرفی شد. از آن‌جاکه رستهٔ (دو-) مدول‌ها روی یک جبر شبه-هوپف یک رسته تکواره‌ای است، تابعگون‌های تانسور را می‌توان به‌عنوان خود-تابعگون‌هایی روی این رسته‌ها در نظر گرفت. در [۴] انواعی از تابعگون‌های تانسوری $-\otimes_k V$ و $V\otimes_k -$ را به‌عنوان خود-تابعگون‌های رسته‌های ${}_H\mathbb{M}$، $\mathbb{M}_H$ یا ${}_H\mathbb{M}_H$ بررسی کرده‌ایم.

جبرهای هم- مدولی چپ و راست روی یک شبه-دو-جبر H، به‌عنوان تعمیمی از شبه-دو-جبرها به‌وسیلهٔ اف. هاوسر و اف. نیل [۱۱]، معرفی شدند. برخلاف رستهٔ (دو-) مدول‌ها روی یک جبر شبه-هوپف H که تکواره‌ای دوگانه-بسته[9] است [۳]، [۵]، [۱۳]. حتی با افزودن برخی شرایط متناهی بودن تکواره‌ای صلب[10] است [۲]، [۵]، [۲۹]. رستهٔ (دو-) مدول‌ها روی یک جبر هم-مدولی لزوماً تکواره‌ای نیست. با اینحال هم-عمل H روی این جبرها امکان وجود یک عمل از یک رسته تکواره‌ای روی این رسته‌ها را فراهم کرده و از این طریق خود-تابعگون‌های تانسور روی این رسته‌ها

1. Associativity constraint
2. Coassociativity
3. Comultiplication
4. M.E. Sweedler
5. Convolution product
6. Antipode
7. 3-cocycle
8. Quasi-antipode
9. Biclosed monoidal
10. Rigid monoidal

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.3.10.3]
[DOI: 10.52547/mmr.6.3.347]

تعریف می‌شوند. در این مقاله انواعی از تابعگون‌های تانسوری مانند $V \otimes_k -$ و $- \otimes_k V$ را به‌عنوان خود-تابعگون‌های رسته‌های (دو-) مدول‌های یک جبر هم-مدولی چپ یا راست روی یک جبر شبه–هوپف H را بررسی می‌کنیم.

در بخش ۲ برخی مفاهیم مقدماتی از نظریه رسته‌ها و درباره جبرهای (شبه-) هوپف و نیز برخی نتایج اخیر در خصوص ارتباط بین تابعگون‌های Hom و تانسور روی رسته (دو-) مدول‌های یک جبر شبه-هوپف را بررسی می‌کنیم. نتایج اصلی‌تر این مقاله در بخش ۳ آورده شده‌اند. در این بخش برای یک جبر هم-مدولی چپ یا راست با توصیف عمل یک رستهٔ تکواره‌ای خاص روی رسته (دو-) مدول‌های جبر هم-مدولی، تابعگون‌های تانسور روی این رسته‌ها تعریف نموده و الحاقی راست هر یک از این تابعگون‌های تانسوری را بر حسب نوع مشخصی از تابعگون Hom بیان می‌کنیم و یکه‌ها و هم-یکه‌های وابسته به هر زوج الحاقی را صریحاً مشخص می‌کنیم.

مفاهیم مقدماتی‌تر درباره رسته‌ها و جبرهای (شبه-) هوپف

در این بخش برخی نتایج و تعاریف مورد نیاز در این مقاله را یادآوری می‌کنیم. برای اطلاعات تکمیلی، در بارهٔ نظریه مدول‌ها به [۲] و [۲۱]، در بارهٔ جبرهای هوپف به [۱]، [۹]، [۱۴]، [۱۶] و [۲۰] و در بارهٔ نظریه رسته‌ها به [۶]، [۷]، [۸]، [۱۵]، [۱۷] و [۱۹] مراجعه شود.

در سراسر این مقاله همواره فرض می‌کنیم که k حلقه‌ای جابه‌جایی و یکدار است و همه (دو-) جبرها و جبرهای هاپف روی حلقه زمینه k تعریف می‌شوند. هم‌چنین همه علائم Hom و $\otimes$بدون اندیس به‌ترتیب Hom_k و $\otimes_K$ خواهند بود. بازای هر دو k–مدول M و N، مجموعه همه k–هم‌ریختی‌ها از M به N را با علامت $Hom_k(M,N)$ نشان می‌دهیم و قرار می‌دهیم: $End_k(M):=Hom_k(M,M)$.

۱. زوج الحاقی[1] از تابعگون‌ها: زوج (L,R) شامل تابعگون‌های $L:\mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ و $R:\mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{A}$ بین رسته‌های $\mathbb{A}$ و $\mathbb{B}$ را یک **زوج الحاقی** گوییم هرگاه یک یکریختی طبیعی مانند:

$$\Omega: Mor_{\mathbb{B}}(L(-),-) \longrightarrow Mor_{\mathbb{A}}(-,R(-)),$$

وجود داشته باشد. به‌عبارت معادل، تبدیلات طبیعی یکه و هم- یکه

$$\varepsilon: LR \to id_{\mathbb{B}}, \quad \text{و} \quad \eta: id_{\mathbb{A}} \longrightarrow RL,$$

وجود داشته باشند به‌طوری‌که در برابری‌های مثلثی زیر صدق کنند

$$\varepsilon L \circ L\eta = 1_L, \qquad R\varepsilon \circ \eta R = 1_R$$

۲. رسته‌های تکواره‌ای: رسته $\mathbb{A}$ را یک **رسته تکواره‌ای** می‌نامیم هرگاه یک تابعگون دو متغیره مانند $-\otimes-:\mathbb{A}\times\mathbb{A}\to\mathbb{A}$ و یک شیء همانی مانند E و یکریختی‌های طبیعی

$$a:(-\otimes-)\otimes-\to-\otimes(-\otimes-) \qquad \text{(شرط شرکت‌پذیری)}$$

$$\rho:-\otimes E\to id \quad \text{و} \quad \lambda:E\otimes-\to id \qquad \text{(یکه‌های چپ و راست)}$$

وجود داشته باشند به‌طوری‌که برای هر چهار شیء X، Y، Z و W در رسته $\mathbb{A}$:

$$(id_W \otimes a\_\{X,E,Y\}) \circ a_{W(X\otimes Y),Z} \circ (a\_\{W,X,Y\} \otimes idz) = a_{W,X,Y\otimes Z} \circ a_{W\otimes X,Y,Z},$$

$$(id_X \otimes \lambda_Y) \circ a\_\{X,E,Y\} = \rho_X \otimes id_Y.$$

1. Adjoint pair of functors

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.3.10.3]
[DOI: 10.52547/mmr.6.3.347]

به‌عبارت دیگر نمودارهای زیر جابه‌جایی باشند:

$$\begin{tikzcd}
{[(W\otimes X)\otimes Y]\otimes Z} \arrow[r, "a_{W,X,Y}\otimes id_Z"] \arrow[dd, "a_{W\otimes X,Y,Z}"'] & {[W\otimes(X\otimes Y)]\otimes Z} \arrow[dr, "a_{W,(X\otimes Y),Z}"] & \\
& & W\otimes[(X\otimes Y)\otimes Z] \arrow[dl, "id_W\otimes a_{X,Y,Z}"] \\
(W\otimes X)\otimes(Y\otimes Z) \arrow[r, "a_{W,X,Y\otimes Z}"'] & W\otimes[X\otimes(Y\otimes Z)], &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(X\otimes E)\otimes Y \arrow[r, "a_{X,E,Y}"] \arrow[dr, "\rho_X\otimes id_Y"'] & X\otimes(E\otimes Y) \arrow[d, "id_X\otimes\lambda_Y"] \\
& X\otimes Y.
\end{tikzcd}$$

رسته تکواره‌ای $(\mathbb{A}, \otimes, E, a, \lambda, \rho)$ یک **رسته تکواره‌ای دوگانه-بسته** نامیده می‌شود، هرگاه برای هر شیء X در رسته $\mathbb{A}$ هر دو تابعگون $-\otimes X:\mathbb{A}\to\mathbb{A}$ و $X\otimes -:\mathbb{A}\to\mathbb{A}$ دارای تابعگون الحاقی راست باشند (برای اطلاعات بیش‌تر به [۱۴] و [۱۵] مراجعه کنید).

در صورتی که بیم ابهام نباشد رسته تکواره‌ای $(\mathbb{A}, \otimes, E, a, \lambda, \rho)$ را گاهی با علامت $(\mathbb{A}, \otimes, E)$ و یا فقط با $\mathbb{A}$ نشان می‌دهیم.

حال مفهوم عمل یک رسته تکواره‌ای روی یک رسته دلخواه را تعریف می‌کنیم (برای جزییات بیش‌تر به [۱۷]، [۱۸] و [۱۹] مراجعه کنید).

۳. عمل یک رسته تکواره‌ای بر یک رسته دلخواه: فرض کنید $(\mathbb{A}, \otimes, E, a, \lambda, \rho)$ یک رسته تکواره‌ای باشد. یک$\mathbb{A}$ **-رسته راست** عبارت است از یک چهارتایی مانند $(D,\Diamond,\Psi,r)$ که در آن D یک رسته، $\Diamond: D\times\mathbb{A}\to D$ یک تابعگون و

$$\Psi:(-\Diamond-)\Diamond-\to-\Diamond(-\otimes-) \quad \text{و} \quad r:-\Diamond E\to id$$

یکریختی‌های طبیعی به‌گونه‌ای باشند که بازای هر شیء $M\in D$ و اشیاء $X,Y,Z\in\mathbb{A}$ داشته باشیم:

$$(id_M\Diamond a_{X,Y,Z})\circ\Psi_{M,X\otimes Y,Z}\circ(\Psi_{M,X,Y}\Diamond id) = \Psi_{M,X,Y\otimes Z}\circ\Psi_{M\Diamond X,Y,Z}, \qquad (۱)$$

$$(id_M\Diamond\lambda_X)\circ\Psi_{M,E,X} = r_M\Diamond id \qquad (۲)$$

برقراری برابری‌های فوق با جابه‌جایی بودن این نمودارهای هم‌ارزند:

$$\begin{tikzcd}
{[(M\diamond X)\diamond Y]\diamond Z} \arrow[r, "\Psi_{M\diamond X,Y,Z}"] \arrow[dd, "\Psi_{M,X,Y}\diamond id"'] & (M\diamond X)\diamond(Y\otimes Z) \arrow[dr, "\Psi_{M,X,Y\otimes Z}"] & \\
& & M\diamond[X\otimes(Y\otimes Z)] \\
{[M\diamond(X\otimes Y)]\diamond Z} \arrow[r, "\Psi_{M,(X\otimes Y),Z}"'] & M\diamond[(X\otimes Y)\otimes Z], \arrow[ur, "id\diamond a_{X,Y,Z}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(M\diamond E)\diamond X \arrow[r, "\Psi_{M,E,X}"] \arrow[d, "r_M\diamond id"'] & M\diamond(E\otimes X) \arrow[d, "id\diamond\lambda_X"] \\
M\diamond X \arrow[r, "id_{M\diamond X}"'] & M\diamond X.
\end{tikzcd}$$

برای هر $\mathbb{A}$-رسته راست $(D,\Diamond,\Psi,r)$ و هر شیء $X\in\mathbb{A}$ یک خود-تابعگون مانند $-\Diamond X: D\to D, \quad M\mapsto M\Diamond X$ به‌دست می‌آید.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.3.10.3]
[DOI: 10.52547/mmr.6.3.347]

به‌طور مشابه یک $\mathbb{A}$ **-رستهٔ چپ** $(D,\Diamond',\Psi',l)$ شامل یک رسته مانند D، یک تابعگون دو متغیره $\Diamond'$: $\mathbb{A}\times D\to D$ به‌همراه یکریختی‌های طبیعی

$$l:E\Diamond'-\to \mathrm{id} \quad \text{و} \quad \Psi':(-\otimes-)\Diamond'-\to-\Diamond'(-\Diamond'-)$$

است به‌گونه‌ای که برای هر شیء M در D و اشیاء X,Y,Z در $\mathbb{A}$ داشته باشیم:

$$\Psi'_{X,Y,(Z\Diamond'M)}\circ\Psi'_{(X\otimes Y),Z,M}=(\mathrm{id}_X\Diamond'\Psi'_{Y,Z,M})\circ\Psi'_{X,(Y\otimes Z),M}\circ(a_{X,Y,Z}\Diamond'\mathrm{id}_M)$$

$$(\mathrm{id}_X\Diamond'M)\circ(\rho_X\Diamond'\mathrm{id})=(\mathrm{id}\Diamond'l_M)\circ\Psi'_{X,E,M}.$$

برای هر $\mathbb{A}$ -رستهٔ چپ $(D,\Diamond',\Psi',l)$ و هر شیء $X\in\mathbb{A}$ به‌راحتی می‌توان خود-تابعگون

$$X\Diamond'-:D\to D,\qquad M\mapsto X\Diamond'M$$

را به‌دست آورد.

۴. شبه دو- جبرها: چهارتایی $(H,\Delta,\varepsilon,\phi)$ را یک **شبه دو-جبر** می‌نامیم اگر H یک k-جبر شرکت‌پذیر و یکدار و ϕ یک عضو وارون‌پذیر در $H\otimes H\otimes H$، به‌گونه‌ای باشد که هم-ضرب $\Delta:H\to H\otimes H$ و هم-یکه $\varepsilon:H\to k$ هم‌ریختی جبرها بوده است و برای هر عضو $h\in H$ داشته باشیم:

$$(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)\circ\Delta(h)=h\otimes 1,\qquad (\varepsilon\otimes\mathrm{id})\circ\Delta(h)=1\otimes h, \tag{۳}$$

$$(\mathrm{id}\otimes\Delta)\circ\Delta(h)=\phi.(\Delta\otimes\mathrm{id})\circ\Delta(h).\phi^{-1}, \tag{۴}$$

$$(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\Delta)(\phi)(\Delta\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})(\phi)=(1\otimes\phi)(\mathrm{id}\otimes\Delta\otimes\mathrm{id})(\phi)(\phi\otimes 1), \tag{۵}$$

$$(\mathrm{id}\otimes\varepsilon\otimes\mathrm{id})(\phi)=1\otimes 1. \tag{6}$$

عضو ϕ را **شرکت‌پذیر ساز درینفلد**[۱] می‌نامیم. برابری (۳) همان شرط هم-یکه برای جبرهای هوپف است. تساوی (۴) در واقع تعمیمی از شرط هم-شرکت‌پذیری H است که به‌کمک مزدوج گیری با عضو $\phi\in H\otimes H\otimes H$ بیان شده است. هم‌چنین برابری (۵) درواقع شرط ۳-هم دور روی ϕ است.

مؤلفه‌های تانسوری ϕ را با حروف بزرگ و مؤلفه‌های تانسوری ϕ^{-1} را با حروف کوچک نشان می‌دهیم:

$$\phi=\sum X^{۱}\otimes X^{۲}\otimes X^{۳} \quad \text{و} \quad \phi^{-۱}=\sum x^{۱}\otimes x^{۲}\otimes x^{۳}$$

چنان‌که از نظریه جبرهای هوپف می‌دانیم رسته (هم-) مدول‌ها روی یک دو-جبر یک رسته تکواره‌ای است. شرط شرکت‌پذیری در این رسته مشابه حالت کلاسیک تعریف می‌شود. برای رسته مدول‌ها روی یک شبه-دو-جبر نیز با کمی تفاوت خاصیت مشابهی وجود دارد:

برای هر شبه- دو جبر $(H,\Delta,\varepsilon,\phi)$ رسته‌های ${}_H\mathbb{M}_H$ و $\mathbb{M}_H$ به‌همراه ضرب تانسوری $-\otimes k$ رسته‌های تکواره‌ای هستند. با این وجود شرط شرکت‌پذیری برای H-مدول‌های $M,N,L\in{}_H\mathbb{M}$ بدین‌صورت است:

$$a_{M,N,L}:(M\otimes_k N)\otimes_k L\to M\otimes_k(N\otimes_k L),$$

$$a_{M,N,L}((m\otimes n)\otimes\iota)=\phi.(m\otimes(n\otimes\iota)).$$

در رسته $\mathbb{M}_H$ شرط شرکت‌پذیری برای مدول‌های راست $M,N,L\in\mathbb{M}_H$ عبارت است از:

$$a'_{M,N,L}:(M\otimes_k N)\otimes_k L\to M\otimes_k(N\otimes_k L),$$

$$a'_{M,N,L}((m\otimes n)\otimes\iota)=(m\otimes(n\otimes\iota)).\phi^{-1},$$

1. Drinfeld reassociator

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.3.10.3]
[DOI: 10.52547/mmr.6.3.347]

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.3.10.3]
[DOI: 10.52547/mmr.6.3.347]

با ترکیب دو شرط شرکت پذیری در رسته های H -مدول های چپ و راست شرط شرکت پذیری برای (H,H)- دو-مدول ها به صورت زیر بدست می آید:

$$a''_{M,N,L} : (M \otimes_k N) \otimes_k L \to M \otimes_k (N \otimes_k L),$$

$$a''_{M,N,L}((m \otimes n) \otimes l) = \phi.(m \otimes (n \otimes l)).\phi^{-1}$$

۵. جبرهای شبه هوپف [۱۰] و [۱۴]: یک **شبه-آنتی پود** (S, α, β) برای یک شبه-دو-جبر H یک پاد-درون‌ریختی مانند $S{:}H\to H$ واعضای $\alpha, \beta \in H$ را شامل می شود به‌گونه‌ای که برای هر عضو دلخواه $h \in H$ در این برابری‌ها صدق کنند:

$$\Sigma_h h_1 \beta S(h_2) = \varepsilon(h)\beta, \quad \Sigma_h S(h_1)\alpha h_2 = \varepsilon(h)\alpha, \qquad (۷)$$

$$\sum X^1 \beta S(X^2)\alpha X_3 = 1, \qquad (۸) \qquad \sum S(x^1)\alpha x^2 \beta x^3 = 1,$$

یک **جبر شبه-هوپف** عبارت است از یک شبه-دوجبر H به‌همراه یک شبه-آنتی پود (S, α, β).

از تعریف شبه-آنتی پود و ویژگی‌های هم-یکه ε به‌سادگی می‌توان نتیجه گرفت:

$$\varepsilon(\alpha)\varepsilon(\beta)=1, \qquad \varepsilon \circ S=\varepsilon.$$

هنگامی که بخواهیم بر همهٔ مشخصات یک جبر شبه-هوپف مانند H تاکید کنیم آن را به‌صورت $(H, \Delta, \varepsilon, \emptyset, S, \alpha, \beta)$ نشان می‌دهیم.

برای هر جبر هوپف مانند H، آنتی پود S یک پاد-درونریختی هم-جبرهاست، یعنی

$$(S\otimes S)\circ\Delta^{cop}=\Delta\circ S.$$

که درآن برای هر $h\in H$، $\Delta(h) = \Sigma_h h_1 \otimes h_2$ همان نمادگذاری سویدلر است و $\Delta^{cop}(h) = \Sigma_h h_2 \otimes h_1$.

$$h_2 \otimes \ (h)= \ h_1 ,\Delta^{cop}(h) = \Sigma h_2 \otimes h_1.$$

هم‌چنین در این حالت ارتباط بین آنتی پود و هم-ضرب Δ برای هر $h \in H$ از برابری (۹) پیروی می‌کند:

$$\Sigma_h h_1 \otimes h_2 S(h_3)=h\otimes 1, \qquad (۹)$$

(برای مثال می‌توان [۲۰، *صفحهٔ* ۷۹] را مشاهده کرد).

اگر $(H, \Delta, \varepsilon, \emptyset, S, \alpha, \beta)$ یک جبر شبه-هوپف باشد، هم-ضرب Δ هم-شرکت‌پذیر نیست و (H, Δ, ε) دارای ساختار هم-جبر نیست. با این حال برابری‌هایی شبیه برابری (۹) را می‌توان برای جبرهای شبه-هوپف نیز اثبات کرد. برای این کار اف. هاوسر و اف. نیل در [۱۱] اعضای زیر از $H\otimes H$ را تعریف کردند.

$$p_L = \sum p_L^1 \otimes p_L^2 = \sum X^2 S^{-1}(X^1\beta) \otimes X^3, \qquad (۱۰)$$

$$q_L = \sum q_L^1 \otimes q_L^2 = \sum S(x^1)\alpha x^2 \otimes x^3, \qquad (۱۱)$$

$$p_R = \sum p_R^1 \otimes p_R^2 = \sum x^1 \otimes x^2 \beta S(x^3), \qquad (۱۲)$$

$$q_R = \sum q_R^1 \otimes q_R^2 = \sum X^1 \otimes S^{-1}(\alpha X^3)X^2, \qquad (۱۳)$$

آنها با به‌کاربردن این اعضا و ویژگی‌های شبه-آنتی پود در [۱۱] شکل‌های تعمیم یافته‌ای از برابری (۹) برای جبرهای شبه-هوپف را ارائه کردند [۴].

در [۹]، [۱۵] نشان داده شده است که رابطه‌ای مشابه رابطۀ الحاقی کلاسیک بین تابعگون‌های Hom و تانسور در رستۀ ${}_H\mathbb{M}$ را نیز می‌توان برای رستۀ تکواره‌ای ${}_H\mathbb{M}$ شامل همه مدول‌های چپ روی جبر هوپف H نیز بیان کرد. یکه‌ها و هم-یکه‌های این الحاقی‌ها به‌طور صوری همان یکه‌ها و هم-یکه‌ها در حالت کلاسیک هستند. در [۴] تعمیمی از این روابط الحاقی برای رسته مدول‌ها روی یک جبر شبه-هوپف ارائه شده است. در این حالت تعمیم یافته اخیر، به دلیل نبود هم-شرکت‌پذیری هم-ضرب، یکه‌ها و هم-یکه‌ها با حالت کلاسیک تفاوت داشته و به ناورداهای جبر شبه-هوپف H وابسته هستند.

چنان‌که در ۴ ذکر شد، رسته دو-مدول‌های ${}_H\mathbb{M}_H$ روی یک شبه-دو جبر $(H,\Delta,\varepsilon,\emptyset)$ یک رستۀ تکواره‌ای بوده است و برای هر $M,N\in {}_H\mathbb{M}_H$ داریم $M\otimes_k N\in {}_H\mathbb{M}_H$ که ساختار دو-مدولی حاصل ضرب تانسوری به‌طور قطری از طریق هم-ضرب Δ تعریف می‌شود.

به‌علاوه اگر H یک جبر شبه-هوپف با شبه-آنتی پود (S,α,β) باشد، آن‌گاه برای هر دو شیء $M,N\in {}_H\mathbb{M}_H$ یک ساختار (H,H)-دو مدولی روی $Hom_k(M,N)$ داریم که به‌صورت (۱۴) تعریف می‌شود:

$$(h.f.h')(m)=\sum h_1.\Big[f\Big(S(h_2).m.S^{-1}(h'_2)\Big)\Big].h'_1 \tag{۱۴}$$

با پیروی از نمادگذاری [۳.۴، ۱۰]، $Hom_k(M,N)$ با این ساختار دو-مدولی را با علامت ${}^sHom_k^t(M,N)$ نشان می‌دهیم. بدین‌ترتیب رابطۀ الحاقی زیر بین تابعگون‌های Hom و تانسور به‌دست می‌آید:

قضیۀ ۶. [۳.۴، ۱۱]. فرض کنید H یک جبر شبه-هوپف با شبه آنتی-پود (S,α,β) باشد و $M,N,V\in {}_H\mathbb{M}_H$ در این صورت یک یک‌ریختی طبیعی مانند

$$\varphi: {}_HHom_H(M\otimes_k^b V,N)\to {}_HHom_H(M,{}^sHom_k^t(V,N)),$$
$$f\mapsto\{m\mapsto[\mathrm{v}\mapsto f\,(p_R.(m\otimes v).q_R)]\},$$

وجود دارد. وارون این یک‌ریختی نگاشت φ' با این ضابطه است:

$$g\mapsto\{m\otimes v\mapsto\sum q_R^1.\Big[g(m)\Big(S(q_R^2)v.S^{-1}(p_R^2)\Big)\Big].p_R^1$$

که در آن $q_R=\sum q_R^1\otimes q_R^2$ و $p_R=\sum p_R^1\otimes p_R^2$ در (۱۲) و (۱۳) تعریف شده‌اند. این بدان معنا است که زوج زیر از تابعگون‌ها

$$-\otimes_k^b \mathrm{V}: {}_H\mathbb{M}_H\to {}_H\mathbb{M}_H,\qquad {}^s\mathrm{Hom}_k^t(\mathrm{V},-): {}_H\mathbb{M}_H\to {}_H\mathbb{M}_H,$$

یک زوج الحاقی تشکیل داده و یکه و هم-یکه این زوج الحاقی در رسته ${}_H\mathbb{M}_H$ بدین‌صورت داده می‌شوند:

$$\eta_M: M\to {}^sHom_k^t(V,M\otimes_k V),\qquad m\mapsto[\upsilon\mapsto p_R.(m\otimes\upsilon).q_R],$$
$$\varepsilon_M: {}^sHom_k^t(V,M)\otimes V\to M,\quad f\otimes\upsilon\mapsto\sum q_R^1.[f(S(q_R^2).\upsilon S^{-1}(p_R^2))].p_R^1.$$

چنان‌که در [۴، ۱۰. ۳ و ۱۱. ۳] می‌توان دید، برای هر زوج $M,N\in {}_H\mathbb{M}_H$ به دو روش می‌توان k-مدول $Hom_k(M,N)$ را به یک ساختار H- مدولی چپ یا راست مجهز کرد. بنابراین علاوه بر ساختار داده شده در قضیۀ ۶ . برای هر دو *(H,H)*-دو-مدول M و N می‌توان روی $Hom_k\ (M,N)$ ساختار *(H,H)*-دو-مدولی دیگری به‌صورت (۱۵) تعریف کرد:

$$(h.f.h')(m):=\sum h_2.[f(S^{-1}(h_1).m.S(h'_1))].h'_2, \tag{۱۵}$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.3.10.3]
[DOI: 10.52547/mmr.6.3.347]

که در آن $h, h' \in H$، $m \in M$ و $f \in Hom_k(M,N)$. در این حالت k- مدول (M,N) Hom_k با این ساختار را با علامت ${}^tHom_k^s(M,N)$ نشان داده و در این حالت داریم:

قضیهٔ ۷. [۴، ۳.۱۲]. فرض کنید H یک جبر شبه-هوپف با شبه-آنتی پود (S,α,β) باشد و $M,N,V \in {}_H\mathbb{M}_H$ در این صورت یک یک‌ریختی طبیعی

$$ {}_HHom_H(V \otimes_k^b M.N) \xrightarrow{\psi} {}_HHom_H(M, {}^tHom_k^s(V.N)). $$
$$ f \mapsto \{m \mapsto [\upsilon \mapsto f(p_L.(\upsilon \otimes m).q_L)]\}, $$

وجود داشته و وارون آن ψ' با این ضابطه است:

$$ g \mapsto \{\upsilon \otimes m \mapsto \sum q_L^2.[g(m)(S^{-1}(q_L^1).\nu.S(p_L^1)].p_L^2, $$

که در آن $p_L = \sum p_L^1 \otimes p_L^2$ و $q_L = \sum q_L^1 \otimes q_L^2$ در (۱۰) و (۱۱) تعریف شده‌اند. این بدان معنا است که زوج

$$ V \otimes^b - : {}_H\mathbb{M}_H \longrightarrow {}_H\mathbb{M}_H, \quad {}^t\mathrm{Hom}^s(V,-) : {}_H\mathbb{M}_H \longrightarrow {}_H\mathbb{M}_H, $$

از تابعگون‌ها یک زوج الحاقی است و یکه و هم-یکه این الحاقی در رستهٔ ${}_H\mathbb{M}_H$ بدین‌صورت تعریف می‌شوند:

$$ \eta_M : M \to {}^tHom_k^s(V, V \otimes_k M), \quad m \mapsto [\upsilon \mapsto p_L.(\upsilon \otimes m).q_L], $$
$$ \varepsilon_M : V \otimes {}^tHom_k^s(V,M) \to M, \quad \upsilon \otimes g \mapsto \sum q_L^2.[g(S^{-1}(q_L^1).\upsilon.S(p_L^1))].p_L^2 $$

روی یک-شبه-دو-جبر H، یک جبر H-مدولی چپ (راست) به‌صورت یک جبر در رستهٔ تکواره‌ای H-مدول‌های چپ (راست) تعریف می‌شود. با توجه به وجود نداشتن خاصیت هم-شرکت‌پذیری هم-ضرب در شبه-دو-جبر H، مشابه این تعریف (به زبان رسته‌ای) برای معرفی جبرهای هم-مدولی امکان‌پذیر نیست. اف. هاوسر و اف. نیل در [۱۱] تعریفی صوری از مفهوم جبر هم-مدولی روی شبه-دو-جبر H ارائه دادند که آن‌را می‌توان تعمیمی از مفهوم شبه-دو-جبر تلقی کرد:

۸. جبرهای هم-مدولی: فرض کنید $(H,\Delta,\varepsilon,\emptyset)$ یک شبه-دو-جبر باشد. جبر شرکت‌پذیر و یکدار B را یک **جبر هم-مدولی چپ** روی H می‌نامند اگر یک هم‌ریختی k-جبرها مانند $\lambda : B \to H \otimes B$ و عضوی وارون‌پذیر مانند $\phi_\lambda \in H \otimes H \otimes B$ وجود داشته باشند به‌گونه‌ای که:

$$ (id \otimes \lambda)(\lambda(b)).\phi_\lambda = \phi_\lambda.(\Delta \otimes id)(\lambda(b)) \quad \forall b \in B, \qquad (L1) $$

$$ (1_H \otimes \phi_\lambda).(id \otimes \Delta \otimes id)(\phi_\lambda).(\phi \otimes 1_B) = (id \otimes id \otimes \lambda)(\phi_\lambda).(\Delta \otimes id \otimes id)(\phi_\lambda), \qquad (L2) $$

$$ (\varepsilon \otimes id) \circ \lambda = id_B, \qquad (L3) $$

$$ (id \otimes \varepsilon \otimes id)(\phi_\lambda) = 1_H \otimes 1_B. \qquad (L4) $$

برای هر جبر هم-مدولی چپ مانند: (B,λ,ϕ_λ) روی یک شبه-دو-جبر H داریم:

$$ (\varepsilon \otimes id \otimes id)(\phi_\lambda) = 1_H \otimes 1_B $$

به‌طور مشابه یک **جبر هم-مدولی راست** روی H عبارت است از یک جبر شرکت‌پذیر و یکدار مانند A، به‌همراه یک هم‌ریختی k- جبرها مانند $\rho: A \to A \otimes H$ و عضوی وارون‌پذیر مانند $\phi_\rho \in A \otimes H \otimes H$ به‌گونه‌ای‌که در این شرایط صدق کنند:

$$\phi_\rho.(\rho \otimes id_H) \circ \rho(a) = (id_H \otimes \Delta) \circ \rho(a).\phi_\rho \quad \forall a \in A. \tag{R1}$$

$$(1_A \otimes \phi).(id \otimes \Delta \otimes id)(\phi_p).(\phi_\rho \otimes 1_H) = (id \otimes id \otimes \Delta)(\phi_\rho).(\rho \otimes id \otimes id)(\phi_\rho) \tag{R2}$$

$$(id_A \otimes \varepsilon) \circ \rho = id_A \tag{R3}$$

$$(id_A \otimes \varepsilon \otimes id_H)(\phi_\rho) = 1_A \otimes 1_H. \tag{R4}$$

اگر (A, ρ, ϕ_ρ) یک جبر هم-مدولی راست روی شبه-دو-جبر H باشد، آن‌گاه با استفاده از ویژگی‌های مذکور داریم:

$$(id \otimes id \otimes \varepsilon)(\phi_\rho) = 1_A \otimes 1_H$$

به‌طور مشابه با نمادهای به‌کار رفته برای شرکت‌پذیرساز $\emptyset$ از یک شبه-دو-جبر H، برای نمایش مؤلفه‌های $\phi_\rho (\phi_\lambda)$ از حروف بزرگ و برای نمایش مؤلفه‌های $\phi_\rho^{-1} (\phi_\lambda^{-1})$ از حروف کوچک استفاده می‌کنیم. به‌عبارت دیگر داریم:

$$\phi_\rho = \sum X_\rho^1 \otimes X_\rho^2 \otimes X_\rho^3, \qquad \phi_\rho^{-1} = \sum x_\rho^1 \otimes x_\rho^2 \otimes x_\rho^3,$$

$$\phi_\lambda = \sum X_\lambda^1 \otimes X_\lambda^2 \otimes X_\lambda^3, \qquad \phi_\lambda^{-1} = \sum x_\lambda^1 \otimes x_\lambda^2 \otimes x_\lambda^3,$$

برای هر جبر هم-مدولی راست روی یک شبه-دو-جبر H، اف. هاوسر و اف. نیل در [۱۱] اعضای $p_\rho, q_\rho \in A \otimes H$ را بدین‌صورت تعریف کردند:

$$p_\rho = \sum p_\rho^1 \otimes p_\rho^2 = \sum x_\rho^1 \otimes x_\rho^2 \beta S(x_\rho^3) \tag{۱۶}$$

$$q_\rho = \sum q_\rho^1 \otimes q_\rho^2 = \sum X_\rho^1 \otimes S^{-1}(\alpha X_\rho^3) X_\rho^2 \tag{۱۷}$$

با توجه به لم ۱,۹ از [۱۱]، برای هر عضو $a \in A$ داریم:

$$\sum \rho(a_{(0)}).p_\rho.[1_A \otimes S(a_{(1)})] = p_\rho.[a \otimes 1_H], \tag{۱۸}$$

$$\sum [1_A \otimes S^{-1}(a_{(1)})].q_\rho.\ \rho(a_{(0)}) = [a \otimes 1_H].q_\rho \tag{۱۹}$$

هم‌چنین

$$\sum \rho(q_\rho^1).p_\rho.[1_A \otimes S(q_\rho^2)] = 1_A \otimes 1_H, \tag{۲۰}$$

$$\sum [1_A \otimes S^{-1}(p_\rho^2)].q_\rho.\ \rho(p_\rho^1) = 1_A \otimes 1_H \tag{۲۱}$$

به‌علاوه برای هر جبر هم-مدولی چپ روی شبه-دو-جبر H مانند B، اعضای $p_\lambda, q_\lambda \in H \otimes B$ به‌صورت (۲۲) و (۲۳) تعریف می شوند:

$$p_\lambda = \sum p_\lambda^1 \otimes p_\lambda^2 = \sum X_\lambda^2 S^{-1}(X_\lambda^2 \beta) \otimes X_\lambda^3, \tag{۲۲}$$

$$q_\lambda = \sum q_\lambda^1 \otimes q_\lambda^2 = \sum S(x_\lambda^1)\alpha x_\lambda^2 \otimes x_\lambda^3 \tag{۲۳}$$

برای هر عضو $b \in B$ این برابری‌های برقرارند:

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.3.10.3]

[DOI: 10.52547/mmr.6.3.347]

$$\sum\lambda(b_{(0)}).p_{\lambda}.[S^{-1}(b_{(-1)})\otimes 1_B] = p_{\lambda}.[1_H\otimes b], \qquad (۲۴)$$

$$\sum[S(b_{(-1)})\otimes 1_B].q_{\lambda}.\ \lambda(b_{(0)}) = [1_H\otimes b].q_{\lambda}. \qquad (۲۵)$$

هم‌چنین

$$\sum[S(b_{(-1)})\otimes 1_B].q_{\lambda}.\ \lambda(b_{(0)}) = [1_H\otimes b].q_{\lambda}. \qquad (۲۶)$$

و نیز

$$\sum[S(p_{\lambda}{}^{1})\otimes 1_B].q_{\lambda}.\ \lambda(p_{\lambda}{}^{2}) = 1_H\otimes 1_B. \qquad (۲۷)$$

رابطهٔ بین تابعگون‌های *Hom* و تانسور برای جبرهای هم-مدولی

فرض کنید H یک جبر شبه-هوپف و $(B,\lambda,\emptyset_\lambda)$ یک جبر هم-مدولی چپ روی H باشد. در [۵] ذکر شد که هم عمل چپ $\lambda:B\to H\otimes B$ (با ضابطهٔ $\lambda(b)=\sum b_{(-1)}\otimes b_{(0)}$) یک عمل چپ از ردهٔ تکواره‌ای ${}_H\mathbb{M}$ روی ردهٔ ${}_B\mathbb{M}$ شامل B- مدول های چپ بدین‌صورت معرفی می‌کند:

$$-\Diamond-:\ {}_H\mathbb{M}\times{}_B\mathbb{M}\to{}_B\mathbb{M},\qquad (V,N)\to V\Diamond N:=V\otimes N$$

که در آن V یک H-مدول چپ، N یک B-مدول چپ و ساختار B-مدولی $V\otimes N$ به‌ازای هر $\upsilon\in V$ ، $b\in B$ و $n\in N$ بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$b.(\upsilon\otimes n)=\sum b_{(-1)}.\upsilon\otimes b_{(0)}.n=\lambda(b).(\upsilon\otimes n),$$

حاصل ضرب تانسوری $V\otimes_k N$ به‌همراه ساختار B-مدولی مذکور را با علامت $V\otimes_k^{b'} N$ نشان می‌دهیم.

با این روش برای هر H- مدول چپ V، خود تابعگون

$$V\otimes-:\ {}_B\mathbb{M}\to{}_B\mathbb{M},\qquad N\mapsto V\otimes_k^{b'} N$$

به‌دست می‌آید.

هم‌چنین یک ساختار B- مدولی چپ روی $Hom_k(V,N)$ بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$(b.f)(\upsilon)=\sum b_{(0)}.f(S^{-1}(b_{(-1)}).\upsilon),$$

که در آن $b\in B$ ، $\upsilon\in V$ و $f\in Hom_k(V,N)$.

در این صورت k-مدول $Hom_k(V,N)$ با ساختار B-مدولی چپ مذکور را با علامت ${}^{t'}Hom_k(V,N)$ نشان می‌دهیم.

قضیهٔ ۹. [۵. قضیهٔ ۲.۳]. فرض کنید H یک جبر شبه-هوپف با شبه آنتی-پود (S,α,β) و $(B,\lambda,\emptyset_\lambda)$ یک جبر هم-مدولی چپ باشد، $M,N\in{}_B\mathbb{M}, V\in{}_H\mathbb{M}$. در این صورت یک یک‌ریختی طبیعی

$$\theta:{}_B Hom(V\otimes_k^{b'} M,N)\to{}_B Hom(M,{}^{t'}Hom_k(V,N)),$$
$$f\mapsto\{m\mapsto\{v\mapsto f(p_\lambda.(v\otimes m))\}\},$$

وجود دارد که ضابطهٔ تابع وارون θ' از آن بدین‌صورت است:

$$g\mapsto\{\upsilon\otimes m\mapsto\sum q_\lambda^2.[g(m)(S^{-1}(q_\lambda^1).\upsilon)]\}$$

که $p_\lambda=\sum p_\lambda^1\otimes p_\lambda^2$ و $q_\lambda=\sum q_\lambda^1\otimes q_\lambda^2$ اعضایی از $H\otimes B$ هستند که در (۲۲) و (۲۳) تعریف شده‌اند.

به‌عبارت دیگر زوج

$$V\otimes_k^{b'} - : {}_B\mathbb{M} \to {}_B\mathbb{M}, \qquad {}^{t'}Hom_k(V,-)\, {}_B\mathbb{M} \to {}_B\mathbb{M}$$

یک زوج الحاقی از تابعگون‌ها است و یکه و هم-یکه این زوج بدین‌صورت به‌دست می‌آیند:

$$\eta'_M : M \to {}^{t'}Hom_k(V, V\otimes_k M), \quad m \mapsto [\upsilon \mapsto p_\lambda.(\upsilon\otimes m)],$$

$$\varepsilon'_M : V\otimes {}^{t'}Hom_k(V,M) \to M, \quad \upsilon\otimes f \mapsto \sum q_\lambda^2[f(S^{-1}(q_\lambda^1).\upsilon)].$$

برهان. اثبات این حکم در حالت کلی‌تر (برای دو-مدول‌ها) در قضیهٔ ۱۰ می‌آید.

برای یک جبر هم-مدولی چپ $(B,\lambda,\emptyset_\lambda)$ روی شبه-دو-جبر H هم-عمل چپ $\lambda{:}B\to H\otimes B$ یک عمل چپ از رستهٔ تکواره‌ای ${}_H\mathbb{M}_H$ روی رستهٔ ${}_B\mathbb{M}_B$ شامل همهٔ (B,B)- دو-مدول ها بدین‌صورت معرفی می‌کند:

$$-\lozenge- : {}_H\mathbb{M}_H \times {}_B\mathbb{M}_B \to {}_B\mathbb{M}_B, \qquad (V,N) \mapsto V\lozenge N := V\otimes^{b'} N,$$

که $N\in {}_B\mathbb{M}_B$ ، $V\in {}_H\mathbb{M}_H$ و ساختار (B,B)-دو-مدولی $V\otimes^{b'} N$ را برای هر $\upsilon\in V$ ، $b,a\in B$ و $n\in N$ بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$b.(\upsilon\otimes n).a := \sum b_{(-1)}.\upsilon.a_{(-1)}\otimes b_{(0)}.n.a_{(0)} = \lambda(b).(\upsilon\otimes n).\lambda(a),$$

k-مدول $V\otimes_k^{b'} N$ را با ساختار $(B,B)-$دو مدولی مذکور را با علامت $V\otimes_k^{b'} N$ نشان می‌دهیم. از این طریق وجود هر (H,H)-دو مدول مانند V به‌وجود یک خود-تابعگون

$$V\otimes_k^{b'} - : {}_B\mathbb{M}_B \to {}_B\mathbb{M}_B, \qquad N \mapsto V\otimes_k^{b'} N$$

منجر می‌شود. هم‌چنین اگر H یک شبه-دو جبر با شبه آنتی پود (S,α,β) باشد، یک ساختار $(B,B)-$دو-مدولی روی $Hom_k(V,N)$ بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$(b.f.a)(\upsilon) = \sum b_{(0)}.[f(S^{-1}(b_{(-1)}).\upsilon.S(a_{(-1)}))].a_{(0)}$$

که $b,a\in B$ ، $\upsilon\in V$ و $f\in Hom_k(V,N)$. در این صورت k-مدول $Hom_k(V,N)$ به‌همراه ساختار $(B,B)-$دو-مدولی مذکور را با علامت ${}^{t'}Hom_k(V,N)$ نشان می‌دهیم.

قضیهٔ ۱۰. فرض کنید H یک جبر شبه-هوپف با شبه-آنتی پود (S,α,β) و (B,λ,ϕ_λ) یک جبر هم-مدولی چپ باشد، $V\in {}_H\mathbb{M}_H$ و $M,N\in {}_B\mathbb{M}_B$ ، در این صورت نگاشت

$$\theta: {}_B Hom_B(V\otimes_k^{b'} M, N) \to {}_B Hom_B(M, {}^{t'}Hom_k^{s'}(V,N)),$$

$$f \mapsto \{m \mapsto [\upsilon \mapsto f(p_\lambda.(\upsilon\otimes m).q_\lambda)]\}$$

یک یکریختی است که ضابطهٔ تابع وارون θ' از آن بدین‌صورت است:

$$g \mapsto \{\upsilon\otimes m \mapsto \sum q_\lambda^2.[g(m)(S^{-1}(q_\lambda^1).\upsilon.S(p_\lambda^1))]p_\lambda^2$$

که $p_\lambda = \sum p_\lambda^1\otimes p_\lambda^2$ و $q_\lambda = \sum q_\lambda^1\otimes q_\lambda^2$ در (۲۲) و (۲۳) تعریف شده‌اند.

به‌عبارت دیگر زوج

$$V\otimes_k^{b'} - : {}_B\mathbb{M}_B \to {}_B\mathbb{M}_B, \qquad {}^{t'}Hom_k^{s'}(V,-) : {}_B\mathbb{M}_B \to {}_B\mathbb{M}_B$$

یک زوج الحاقی از تابعگون‌ها است که یکه آن به‌صورت

$$\eta'_M : M \to {}^{t'}Hom_k^{s'}(V, V\otimes_k M), \;\; m\mapsto [\upsilon \mapsto p_\lambda.(\upsilon\otimes m).q_\lambda]$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.3.10.3]

[DOI: 10.52547/mmr.6.3.347]

و هم-یکه آن بدین‌صورت به‌دست می‌آید.

$$\varepsilon'_M : V \otimes {}^{t'}Hom_k^{s'}(V,M) \to M, \quad \upsilon \otimes f \mapsto \sum q_\lambda^2.[f(S^{-1}(p_\lambda^1).\upsilon.S(p_\lambda^1))].p_\lambda^2$$

برهان. برای هر $f \in {}_B Hom_B(V \otimes_k^b M, N)$ نشان می‌دهیم که $\theta(f)$ یک نگاشت (B,B)–دو خطی است. برای هر $b,a \in B$، $m \in M$ و $\upsilon \in V$ داریم:

$$\begin{aligned}[\theta(f)(b.m.a)](\upsilon) &= f(p_\lambda.(\upsilon \otimes b.m.a).q_\lambda)\\ &= f(\sum p_\lambda^1.\upsilon.q_\lambda^1 \otimes p_\lambda^2 b.m.a q_\lambda^2)\\ &= f(p_\lambda.(1_H \otimes b).(\upsilon \otimes m).(1_H \otimes a).q_\lambda)\end{aligned}$$

بنا به (۲۴) و (۲۵)،

$$= f(\sum \lambda(b_{(0)}).p_\lambda.(S^{-1}(b_{(-1)} \otimes 1_B).(\upsilon \otimes m).(S(a_{(-1)}) \otimes 1_B).q_\lambda.\lambda(a_{(0)}))$$

چون f دو خطی است،

$$= \sum b_{(0)}.[f(p_\lambda^1 S^{-1}(b_{(-1)}).\upsilon.S(a_{(-1)}q_\lambda^1 \otimes p_\lambda^2.m.q_\lambda^2)].a_{(0)}$$

از طرف دیگر،

$$\begin{aligned}[b.(\theta(f)(m)).a](\upsilon) &= \sum b_{(0)}.[(\theta(f)(m))(S^{-1}(b_{(-1)}).\upsilon S(a_{(-1)}))].a_{(0)}\\ &= \sum b_{(0)}.f(p_\lambda^1 S^{-1}(b_{(-1)}).\upsilon.S(a_{(-1)})q_\lambda^1 \otimes p_\lambda^2.m.q_\lambda^2).a_{(0)}\end{aligned}$$

بدین‌ترتیب (B,B)–دو خطی بودن $\theta(f)$ ثابت می‌شود.

بالعکس برای هر $v \in V$، $m \in M$، $b,a \in B$ و هر $g \in {}_B Hom_B(M, {}^{t'}Hom_k(V,N))$ داریم:

$$\begin{aligned}[\theta'(g)](b.(\upsilon \otimes m).a) &= [\theta'(g)](\sum b_{(-1)}.\upsilon.a_{(-1)} \otimes b_{(0)}.m.a_{(0)})\\ &= \sum q_\lambda^2.[g(b_{(0)}.m.a_{(0)})(S^{-1}(q_\lambda^1)b_{(-1)}.\upsilon.a_{(-1)}S(p_\lambda^1))].p_\lambda^2\\ &= \sum q_\lambda^2.\{[b_{(0)}.g(m)).a_{(0)}](S^{-1}(q_\lambda^1)b_{(-1)}.\upsilon.a_{(-1)}S(p_\lambda^1))\}.p_\lambda^2\\ &= \sum q_\lambda^2.\{b_{(0,0)}.[g(m)(S^{-1}(q_\lambda^1 b_{(0,-1)})b_{(-1)}.\upsilon.a_{(-1)}S(a_{(0,-1)}p_\lambda^1))].a_{(0,0)}p_\lambda^2\\ &= \sum b.\{q_\lambda^2.[g(m)(S^{-1}(q_\lambda^1).\upsilon.S(p_\lambda^1))].p_\lambda^2\}.a\\ &= b.\{[\theta'(g)](\upsilon \otimes m)\}.a.\end{aligned}$$

بنابراین $\theta'(g)$ نیز (B,B)-دو خطی است.

حال نشان می‌دهیم که θ و θ΄ وارون یک‌دیگرند: برای هر $m \in M$، $\upsilon \in V$ و هر $f \in {}_B Hom_B(M \otimes V, N)$ داریم:

$$\begin{aligned}[(\theta' \circ \theta)(f)](v \otimes m) &= \sum q_\lambda^2.[(\theta(f)(m))(S^{-1}(q_\lambda^1).v.S(p_\lambda^1))].p_\lambda^2\\ &= \sum q_\lambda^2.[f(p_\lambda^1 S^{-1}(q_\lambda^1).v.S(p_\lambda^1)q_\lambda^1 \otimes p_\lambda^2.m.q_\lambda^2)].p_\lambda^2\end{aligned}$$

f دوخطی است $\quad \sum f(\lambda(q_\lambda^2).p_\lambda.(S^{-1}(q_\lambda^1) \otimes 1_B).(v \otimes m).(S(p_\lambda^1) \otimes 1_B).q_\lambda.\lambda(p_\lambda^2)]$

$$= \sum f((1_H \otimes 1_B).(v \otimes m).(1_H \otimes 1_B) = f(v \otimes m).$$

از طرف دیگر برای هر $m \in M$، $\upsilon \in V$ و هر $g \in {}_B Hom_B(M, {}^{t'}Hom_k^{s'}(V,N))$ داریم:

$$[(\theta \circ \theta')(g)](m)(v) = \theta'(g)(p_\lambda.(v \otimes m).q_\lambda)$$

$$= \theta'(g)(\sum p_\lambda^1 .v.q_\lambda^1 \otimes p_\lambda^2.m.q_\lambda^2)$$
$$= \sum q_\lambda^2.[g(p_\lambda^2.m.q_\lambda^2)(S^{-1}(q_\lambda^1)p_\lambda^1.v.q_\lambda^1 S(p_\lambda^1))].p_\lambda^2$$
$$= \sum q_\lambda^2.\{[p_\lambda^2.g(m).q_\lambda^2](S^{-1}(q_\lambda^1)p_\lambda^1.v.q_\lambda^1 S(p_\lambda^1))\}.p_\lambda^2$$
$$= \sum q_\lambda^2 (p_\lambda^2)_{(0)}.\{g(m)(S^{-1}(q_\lambda^1(p_\lambda^2)_{(-1)})\, p_\lambda^1.v.q_\lambda^1 S((q_\lambda^2)_{(-1)} p_\lambda^1))\}.(q_\lambda^2)_{(0)} p_\lambda^2$$
$$(2.26),(2.27) = g(m)(v)$$

بنابراین θ یک‌ریختی است و نگاشت وارون آن θ' است.

حال فرض کنید A یک جبر هم–مدولی راست روی شبه–دو–جبر H باشد. رستۀ $\mathbb{M}_A$ شامل همۀ A-مدول‌های راست یک رسته تکواره ای نیست. با این‌حال هم– عمل راست

$$\rho : A \to A \otimes H, \qquad a \mapsto \sum a_{(0)} \otimes a_{(1)}$$

یک عمل راست از رسته تکواره ای $\mathbb{M}_H$ روی رسته $\mathbb{M}_A$ به شکل زیر معرفی می کند :

که ساختار A-مدولی راست $N \otimes_k V$ برای اعضای دلخواه $v \in V$ ،$a \in A$ و $n \in N$ بدین‌صورت است:

$$(n \otimes v).a = \sum n.a_{(0)} \otimes v.a_{(1)} = (n \otimes v).\rho(a).$$

در این صورت A-مدول $N \otimes_k V$ با ساختار A-مدولی مذکور را با علامت $N \otimes_k^{b'} V$ نشان می‌دهیم.

یک‌ریختی طبیعی

$$(-\Diamond-)\Diamond - \xrightarrow{\psi} - \Diamond(-\otimes-)$$

برای H-مدول‌های راست $V, W \in \mathbb{M}_H$ و A -مدول راست N و بازای اعضای $w \in W$ ، $v \in V$ و $n \in N$ بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$\Psi_{N,V,W} : (N\Diamond V)\Diamond W \to N\Diamond(V \otimes W), \qquad (n \otimes v) \otimes w \mapsto [n \otimes (v \otimes w)].\phi_\rho^{-1},$$

برابری

$$(id_{N}\Diamond a_{V,W,Z}) \circ \Psi_{N,V\otimes W,Z} \circ (\Psi_{N,V,W}\Diamond id_Z) = \Psi_{N,V,W\otimes Z} \circ \Psi_{N\Diamond V,W,Z},$$

نتیجۀ مستقیم برابری (R2) در تعریف جبر هم-مدولی راست است.

از این طریق برای هر H-مدول راست مانند V یک خود-تابعگون

$$-\otimes_k^{b'} V : \mathbb{M}_A \to \mathbb{M}_A, \quad N \mapsto N \otimes_k^{b'} V$$

به‌دست می‌آید.

حال فرض کنید H یک جبر شبه-هوپف با شبه آنتی پود (S, α, β) باشد. یک ساختار A-مدولی راست برای $Hom_k(V, N)$ بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$(f.a)(v) = \sum f(v.S^{-1}(a_{(1)})).a_{(0)},$$

که $a \in A$ ،$v \in V$ و $f \in Hom_k(V, N)$. در این صورت $Hom_k(V, N)$ با ساختار A-مدولی راست مذکور را با علامت $Hom_k^{t'}(V, N)$ نشان می‌دهیم.

با روندی مشابه با برهان قضیۀ ۱۰ می‌توان ثابت کرد که:

قضیۀ ۱۱. فرض کنید H یک جبر شبه-هوپف با شبه آنتی‌پود (S, α, β) و (A, ρ, ϕ_ρ) یک جبر هم-مدولی راست روی H باشد. به‌ازای هر $V \in \mathbb{M}_H$ و $M, N \in \mathbb{M}_A$ یک‌ریختی طبیعی

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.3.10.3]
[DOI: 10.52547/mmr.6.3.347]

$$Hom_A(M \otimes_k^{b'} V, N) \xrightarrow{\psi} Hom_A(M, Hom_k^{t'}(V, N)),$$
$$f \mapsto \left\{ m \mapsto \left[v \mapsto f\left((m \otimes v).q_\rho \right) \right] \right\}$$

وجود دارد و ضابطهٔ نگاشت وارون ψ' از آن بدین‌صورت است:

$$g \mapsto \{(m \otimes v) \mapsto g(m)\left(v.S^{-1}\left(p_\rho^2 \right) \right)].p_\rho^1$$

که $p_\rho = \sum p_\rho^1 \otimes p_\rho^2$ و $q_\rho = \sum q_\rho^1 \otimes q_\rho^2$ اعضایی از $A \otimes H$ هستند که در (۱۶) و (۱۷) تعریف شده‌اند. به‌عبارت دیگر زوج

$$- \otimes_k^{b'} V : \mathbb{M}_A \to \mathbb{M}_A, \qquad Hom_k^{t'}(V, -) : \mathbb{M}_A \to \mathbb{M}_A$$

یک زوج الحاقی از خود-تابعگون ها است. یکه و هم-یکه این زوج الحاقی در رسته $\mathbb{M}_A$ بدین‌صورت داده می‌شوند:

$$\eta_M : M \to Hom_k^{t'}(V, M \otimes_k V), \qquad m \mapsto \left[v \mapsto (m \otimes v).q_\rho \right]$$
$$\varepsilon_M : Hom_k^{t'}(V, M) \otimes V \to M, \qquad (f \otimes v) \mapsto \sum f\left(v.S^{-1}\left(p_\rho^2 \right) \right)].p_\rho^1.$$

برای هر شبه–دو–جبر H، می‌دانیم که ${}_H\mathbb{M}_H$ رسته‌ای تکواره‌ای است. فرض کنید (A, ρ, ϕ_ρ) یک جبر هم-مدولی راست روی H باشد. در این صورت برای هر (A,A)- دو- مدول $N \in {}_A\mathbb{M}_A$ و هر (H,H)- دو- مدول $V \in {}_H\mathbb{M}_H$ ضرب تانسوری $N \otimes_k V$ دوباره یک (A,A)- دو- مدول بوده است و ساختار دو-مدولی آن بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$b.(n \otimes v).a = \sum b_{(0)}.n.a_{(0)} \otimes b_{(1)}.v.a_{(1)}$$

هم‌چنین رسته تکواره‌ای ${}_H\mathbb{M}_H$ از راست روی رستهٔ ${}_A\mathbb{M}_A$ بدین‌صورت عمل می‌کند:

$$-\Diamond- : {}_A\mathbb{M}_A \times {}_H\mathbb{M}_H \to {}_A\mathbb{M}_A, \qquad (N, V) \mapsto N \otimes_k V.$$

از این طریق برای هر (H,H)-دو-مدول V، خود-تابعگون

$$- \otimes_k V : {}_A\mathbb{M}_A \to {}_A\mathbb{M}_A, \qquad N \mapsto N \otimes_k V$$

به‌دست می‌آید.

هم‌چنین می‌توان ساختاری (A,A)-دو-مدولی روی $Hom_k(V,N)$ بدین‌صورت تعریف کرد:

$$(b.f.a)(v) = \sum b_{(0)}.\left[f(S(b_{(1)}).v.S^{-1}(a_{(1)})) \right].a_{(0)}$$

که $a, b \in A$، $v \in V$ و $f \in Hom_k(V, N)$.

حاصل‌ضرب تانسوری $N \otimes_k V$ به‌همراه ساختار (A,A)-دو-مدولی داده شده در بالا را با علامت $N \otimes_k^{b'} V$ نشان می‌دهیم. هم‌چنین k– مدول $Hom_k(V, N)$ به انضمام ساختار (A,A)-دو-مدولی داده شده در بالا را با علامت ${}^{s'}Hom_k^{t'}(V, N)$ نشان می‌دهیم.

با روندی مشابه با آن‌چه در برهان قضیهٔ ۱۰ مشاهده کردیم، می‌توان ثابت کرد که:

قضیهٔ ۱۲. فرض کنید H یک جبر شبه-هوپف با شبه-آنتی‌پود (S, α, β) و (A, ρ, ϕ_ρ) یک جبر هم-مدولی راست روی H باشد. برای هر $V \in {}_H\mathbb{M}_H$ و هر $M, N \in {}_A\mathbb{M}_A$ یک‌ریختی طبیعی

$$ {}_A\mathrm{Hom}_A(M \otimes_k^{b'} V.N) \xrightarrow{\psi} {}_A\mathrm{Hom}_A(M, {}^{s'}\mathrm{Hom}_k^{t'}(V,N)), $$
$$ f \mapsto \left\{ m \mapsto \left[v \mapsto \sum f(p_\rho.(m\otimes v).q_\rho) \right] \right\}, $$

وجود دارد و ضابطۀ نگاشت وارون ψ' از آن بدین‌صورت است:

$$ g \mapsto \left\{ m \otimes v \mapsto \sum \overset{1}{q}_\rho . \left[g(m)(S(\overset{2}{q}_\rho).v.S^{-1}(\overset{2}{p}_\rho)) \right] . \overset{1}{p}_\rho \right\}, $$

که $p_\rho = \sum \overset{1}{p}_\rho \otimes \overset{2}{p}_\rho$ و $q_\rho = \sum \overset{1}{q}_\rho \otimes \overset{2}{q}_\rho$ اعضایی از $A \otimes H$ هستند که در (۱۶) و (۱۷) تعریف شده‌اند. این بدان معنا است که زوج

$$ - \otimes_k^{b'} V : {}_A\mathbb{M}_A \to {}_A\mathbb{M}_A, \qquad {}^{s'}\mathrm{Hom}_k^{t'}(V,-) : {}_A\mathbb{M}_A \to {}_A\mathbb{M}_A, $$

یک زوج الحاقی از خود- تابعگون‌های رستۀ ${}_A\mathbb{M}_A$ است. یکه و هم- یکه این زوج به‌ترتیب عبارتند از:

$$ \eta_M : M \to {}^{s'}\mathrm{Hom}_k^{t'}(V, M\otimes V), \qquad m \mapsto [v \mapsto [p_\rho.(m\otimes v).q_\rho], $$
$$ \varepsilon_M : {}^{s'}\mathrm{Hom}_k^{t'}(V,M)\otimes V \to M, \qquad f\otimes v \mapsto \sum \overset{1}{q}_\rho . \left[f(s(\overset{2}{q}_\rho).v.S^{-1}(\overset{2}{p}_\rho)) \right] . \overset{1}{p}_\rho . $$

سؤال باز: فرض کنید H یک جبر شبه- هوپف، $(\beta,\lambda,\phi_\lambda)$ یک جبر هم- مدولی چپ و (A,ρ,ϕ_ρ) یک جبر هم- مدولی راست روی H باشند:

۱. آیا یک عمل از رستۀ تکواره‌ای ${}_H\mathbb{M}_H$ روی رستۀ ${}_B\mathbb{M}_A$ یا رستۀ ${}_A\mathbb{M}_B$ می‌توان تعریف کرد؟

۲. آیا خود-تابعگون‌های تانسور و Hom روی رستۀ ${}_B\mathbb{M}_A$ یا رستۀ ${}_A\mathbb{M}_B$ می‌توان تعریف کرد؟

در این صورت آیا روابط الحاقی بین چنین تابعگون‌هایی قابل تعریف است؟

سپاس‌گزاری

برخود لازم می‌دانم که مراتب سپاس صمیمانه خود را از داوران محترم که با ارزیابی و بررسی دقیق و پیشنهادات ارزنده خود موجب بهبود کیفیت این مقاله شدند، ابراز نمایم.

منابع

1. Abe E., "Hopf Algebras", Cambridge Univ. Press, Cambridge (1977).
2. Anderson F., Fuller K., "Rings and Categories of Modules", Springer,Berlin (1974).
3. Bagheri S., Wisbauer R., "Hom-Tensor relations for two-sided Hopf modules over quasi-Hopf algebras", Comm. Algebra 40 (2012) 3257-3287.
4. Bagheri S., "Adjunctions of Hom and Tensors as endofunctors of (Bi-) module categories over quasi-Hopf algebras", Comm. Algebra 42 (2014) 488-510.
5. Bagheri S., "Hom-Tensor relations for (quasi-) comodule algebras", J. Math. Sci. 186 (5) . (2012) 701-705/https://doi.org/10.1007/S10958-012-1017-7.
6. Barr M., Wells C., "Toposes, Triples and Theories", Springer (1985).

7. Borceux F., "Handbook of categorical Algebra 1, Categories and Structures", Encyclopedia of Mathematics and its Applications 51, Cambridge Univ. Press. (1994).
8. Borceux F., "Handbook of categorical Algebra 2, Categories and Structures", Encyclopedia of Mathematics and its Applications 51, Cambridge Univ. Press. (1994).
9. Brzeziński T., Wisbauer R., "Corings and Comodules", London Math. Soc. LNS 309, Cambridge University Press (2003).
10. Drinfeld V. G., "Quasi-Hopf algeras", Leningrad Math. J. 1, (1990) 1419-1457.
11. Hausser F., Nill F., "Diagonal crossed products by duals of quasi-quantum groups", Rev. Math. Phys. 11, (1999) 533-629.
12. Hausser, F., Nill, F., "Doubles of quasi-quantum groups", Comm. Math. Phys. 199 547-589 (1999).
13. Hausser F., Nill F., "Integral theory for quasi-Hopf Algebras", arXiv:Math., QA/9904164 (1999).
14. Kassel K., "Quantum Groups", Springer, Berlin (1995).
15. Mac Lane S., "Category for the working mathematician", Springer (1971).
16. Majid S., "Foundations of Quantum Group Theory", Cambridge Univ. Press, Cambridge (1995).
17. Pareigis B., "Non-additive ring and module theory II, C-categories, C-functors and C-morphisms", Publ. Math. Debrecen 24 (1977) 351-361.
18. Pareigis B., "Reconstruction of hidden symmetries", J. Alg. 183(1996) 90-154.
19. Schauenburg P., "Actions of monoidal categories and generalized Hopf smash products", J. Alg. 270 (2003) 521-563.
20. Sweedler M. E., "Hopf Algebras", Benjamin, New York (1969).
21. Wisbauer R., "Foundations of Module and Ring Theory", Gordon and Breach Reading (1991).

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.3.10.3]
[DOI: 10.52547/mmr.6.3.347]