(نشریه علوم دانشگاه خوارزمی)

یادداشتی روی مدول های هیلبرت

عباس سهله*، لیلا نجارپیشه
دانشگاه گیلان، دانشکدهٔ علوم ریاضی

دریافت ۹۷/۰۲/۲۱ پذیرش ۹۷/۰۶/۲۶

چکیده

فرض کنید A یک *c-جبر باشد. در این مقاله به بررسی ارتباط بین d-اشتقاق‌ها و اشتقاق‌ها روی یک A-مدول هیلبرت چپ X به‌عنوان یک جبر باناخ خاص می‌پردازیم. به‌علاوه برای یک A-مدول هیلبرت دو طرفه X، تحت شرایط خاص، یک ساختار *C تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که *C-جبر ساخته شده را می‌توان با *C-جبر عملگرهای الحاق پذیر روی X یکی گرفت.

واژه های کلیدی: *C-مدول هیلبرت، جبر باناخ، *C-جبر، d-اشتقاق.

مقدمات و پیش نیازها

در سال ۱۹۵۳ کاپلانسکی فضای جدیدی به‌نام C^*–مدول هیلبرت را با ایده گرفتن از تعریف فضاهای هیلبرت معرفی کرد [۳]. در واقع یک C^*– مدول هیلبرت گسترش طبیعی فضای هیلبرت از میدان اعداد مختلط به یک – C^*جبر است.

فرض کنید A یک C^*-جبر باشد. فرض کنید X یک A-مدول چپ باشد (هم‌زمان یک فضای برداری روی میدان اعداد مختلط نیز هست.) که به یک ضرب داخلی A-مقدار مانند $_X\langle 0,0\rangle: X\times X\to A$ مجهز شده است. در این صورت X را یک A-مدول پیش هیلبرت چپ می‌نامیم هرگاه برای هر

۱. $_X\langle \alpha x+\beta y,z\rangle=\alpha\, _X\langle x,z\rangle+\beta\, _X\langle y,z\rangle$
۲. $_X\langle a\cdot x,y\rangle=a\, _X\langle x,y\rangle$
۳. $_X\langle y,x\rangle={}_X\langle x,y\rangle^*$
۴. $_X\langle x,x\rangle\geq 0$ و $_X\langle x,x\rangle=0\Leftrightarrow x=0$.

اگر X یک A- مدول پیش هیلبرت چپ باشد برای هر $x\in X$، $\|x\|=\|_X\langle x,x\rangle\|^{\frac{1}{2}}$ یک نرم روی X تعریف می‌کند.

اگر X نسبت به این نرم کامل باشد X را یک A-مدول هیلبرت چپ می‌نامیم. A-مدول هیلبرت چپ X انباشته نامیده می شود هرگاه فضای خطی تولید شده به‌وسیلهٔ مجموعه $\{_X\langle x,y\rangle : x,y\in X\}$ در A چگال باشد. به‌عنوان مثال هر *C-جبر A با ضرب داخلی $_A\langle a,b\rangle=ab^*$ $(a,b\in A)$ یک A-مدول هیلبرت چپ انباشته است. یک A-مدول هیلبرت راست انباشته به‌روش مشابه تعریف می شود.

فرض کنید X یک A-مدول دو طرفه باشد. X را یک A-مدول هیلبرت دو طرفه می نامیم اگر X به‌طور هم‌زمان یک A-مدول هیلبرت چپ و راست باشد، به‌علاوه برای هر $x,y,z\in X$ در رابطهٔ $_X\langle x,y\rangle.z=x.\langle y,z\rangle_X$ صدق کند. توجه می‌کنیم که در این حالت برای هر $x\in X$ داریم $\|\langle x,x\rangle_X\|=\|_X\langle x,x\rangle\|$. برای کسب اطلاعات بیش‌تر در مورد A-مدول های هیلبرت دو طرفه به [۲] مراجعه کنید.

فرض X کنید یک A- مدول هیلبرت چپ باشد. نگاشت $T:X\to X$ را الحاق پذیر می‌نامیم هرگاه نگاشتی مانند $T^*:X\to X$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $x,y\in X$ داشته باشیم $_X\langle Tx,y\rangle={}_X\langle x,T^*y\rangle$. به

*نویسنده مسئول sahlehj@guilan.ac.ir

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.311]

آسانی می‌توان بررسی کرد که هر نگاشت الحاق پذیر خطی و کراندار است. به‌علاوه، برای هر $x \in X$ و $a \in A$، نگاشت الحاق پذیر T در رابطهٔ $T(x{\cdot}a) = T(x){\cdot}a$ صدق می‌کند. مجموعهٔ همهٔ نگاشت های الحاق پذیر روی X را با نماد $\mathcal{L}(X)$ نمایش می دهیم . $\mathcal{L}(X)$ یک C^*-جبر است[۴]. برای $x,y \in X$، نگاشت $\theta_{x,y} : X \to X$ بدین‌صورت تعریف می شود:

$$\theta_{x,y}(z) = {}_X\langle z,y\rangle{\cdot}x \qquad (z \in X).$$

زیر فضای خطی بستهٔ تولید شده به‌وسیلهٔ $\{\theta_{x,y} : x,y \in X\}$ را با $\mathcal{K}(X)$ نمایش می دهیم. می توان بررسی کرد که $\mathcal{K}(X)$ یک ایده‌آل دو طرفه بسته در $\mathcal{L}(X)$ است[۴]. عناصر $\mathcal{K}(X)$ را معمولاً عملگرهای فشرده می نامیم.
در این مقاله، نگاشت خطی $d : A \to A$ را یک اشتقاق روی جبر باناخ A می‌نامیم اگر برای هر $a,b \in A$ داشته باشیم $d(ab) = d(a)b + ad(b)$. فرض کنید $a \in A$، نگاشت $d_a : A \to A$ تعریف شده به‌صورت $d_a(x) = ax - xa$ یک اشتقاق است. این اشتقاق را اشتقاق درونی القا شده به‌وسیلهٔ a می نامیم. در سرتاسر این مقاله A یک C*-جبر است

d-اشتقاق ها روی مدول های هیلبرت

فرض کنید X یک A-مدول هیلبرت چپ و e یک عضو دلخواه در X با $\|e\| = 1$ باشد. نگاشت $\pi_e : X \times X \to X$ تعریف شده به‌وسیلهٔ $\pi_e(x,y) = {}_X\langle x,e\rangle{\cdot}y$ یک ضرب روی X است که آن را به یک جبر باناخ تبدیل می‌کند. این جبر باناخ را با نماد (X,π_e) نمایش می‌دهیم [۶].

لم ۱. [۵، لم ۲. ۱] *فرض کنید* X *یک* A - مدول *هیلبرت چپ انباشته باشد و* $a \in A$. *آن‌گاه* $a = 0$ *اگر و تنها اگر برای هر* $x \in X$ *داشته باشیم* $a{\cdot}x = 0$.

تعریف ۲. فرض کنید X یک A -مدول هیلبرت چپ انباشته باشد. نگاشت خطی $\delta : X \to X$ یک اشتقاق تعمیم‌یافته نامیده می‌شود اگر نگاشت $d : A \to A$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in X$ و هر $a \in A$ داشته باشیم

$$\delta(a{\cdot}x) = a{\cdot}\delta(x) + d(a).x.$$

برای سادگی در ارجاع، این اشتقاق تعمیم یافته δ را d–اشتقاق می‌خوانیم.

ملاحظه ۳. فرض کنید X یک A-مدول هیلبرت چپ انباشته باشد و δ یک d-اشتقاق روی X باشد. در [۱]، ثابت شده است که d یک اشتقاق روی A است. حال چون (X,π_e) یک جبر باناخ است، این سوال مطرح می شود که آیا δ نیز یک اشتقاق روی (X,π_e) است؟

در مثال زیر، ما از این واقعیت استفاده می‌کنیم که هر اشتقاق d روی یک جبر باناخ یک d-اشتقاق است و به سوال مطرح شده پاسخ منفی می دهیم.

مثال ۴. فرض کنید d یک اشتقاق روی A و *e* یک عضو دلخواه از A باشد به‌طوری‌که $\|e\| = 1$. در حالت کلی، d یک اشتقاق روی جبر باناخ (A,π_e) نیست. برای مثال فرض کنید $A = M_2(\mathbb{C})$، آن‌گاه A یک A -مدول هیلبرت دو طرفه انباشته است. اکنون فرض کنید $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$، توجه می‌کنیم که $\|e\| = 1$ و e یک عضو یکانی از A نیست.

حال فرض کنید d یک اشتقاق درونی القا شده به‌وسیلهٔ $c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ روی A باشد. برای $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ داریم:

$$d(\pi_e(x,x)) = d({}_A\langle x,e\rangle{\cdot}x) = d(xe^*x) = d(e^*) = d(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

در حالی‌که $\pi_e(d(x),x) + \pi_e(x,d(x)) = 0$، بنابراین d یک اشتقاق روی (A,π_e) نیست.

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.311]

با توجه به مثال ۴، در حالت کلی، اگر δ یک d-اشتقاق روی A - مدول هیلبرت چپ انباشته X باشد، δ یک اشتقاق روی (X,π_e) نیست. در قضیهٔ ۵ یک شرط لازم و کافی، برای این‌که δ یک اشتقاق روی (X,π_e) باشد را بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۵. *فرض کنید X یک A-مدول هیلبرت چپ انباشته و δ یک d-اشتقاق روی X باشد. آن‌گاه δ یک اشتقاق روی (X,π_e) است اگر و تنها اگر برای هر $x\in X$ داشته باشیم* $d({}_X\langle x,e\rangle)={}_X\langle\delta(x),e\rangle$.

اثبات. ابتدا توجه می‌کنیم که δ چون یک d-اشتقاق روی X است داریم

$$\delta({}_X\langle x,e\rangle\cdot y)={}_X\langle x,e\rangle\cdot\delta(y)+d({}_X\langle x,e\rangle)\cdot y\,.$$

اکنون فرض کنید δ یک اشتقاق روی (X,π_e) باشد، در این صورت برای هر $x,y\in X$ داریم:

$$\delta(\pi_e(x,y))=\pi_e(\delta(x),y)+\pi_e(x,\delta(y)).$$

در نتیجه

$$\delta({}_X\langle x,e\rangle\cdot y)={}_X\langle\delta(x),e\rangle\cdot y+{}_X\langle x,e\rangle\cdot\delta(y).$$

بنابراین

$${}_X\langle x,e\rangle\cdot\delta(y)+d({}_X\langle x,e\rangle)\cdot y={}_X\langle\delta(x),e\rangle\cdot y+{}_X\langle x,e\rangle\cdot\delta(y)$$

و در نتیجه

$${}_X\langle\delta(x),e\rangle\cdot y=d({}_X\langle x,e\rangle)\cdot y\,.$$

اکنون چون X انباشته است، لم ۱ ایجاب می‌کند که $d({}_X\langle x,e\rangle)={}_X\langle\delta(x),e\rangle$.

برای اثبات عکس قضیه، فرض کنید $x,y\in X$. در نتیجه $d({}_X\langle x,e\rangle)={}_X\langle\delta(x),e\rangle$ و داریم

$$\delta(\pi_e(x,y))=\delta({}_X\langle x,e\rangle\cdot y)={}_X\langle x,e\rangle\cdot\delta(y)+d({}_X\langle x,e\rangle)\cdot y=\pi_e(x,\delta(y))+{}_X\langle\delta(x),e\rangle\cdot y=\pi_e(x,\delta(y))+\pi_e(\delta(x),y).$$

این تساوی ایجاب می‌کند که یک δ اشتقاق روی (X,π_e) است.

نتیجهٔ ۶. *فرض کنید* e یک عضو دلخواه از A باشد به‌طوری‌که $\|e\|=1$ *و فرض کنید* d یک اشتقاق روی A *باشد. آن‌گاه* d *یک اشتقاق روی* (A,π_e) *است اگر و تنها اگر* $d(e^*)=0$

اثبات. فرض کنید $d(e^*)=0$، در این صورت برای هر $y\in A$ داریم

$$d({}_A\langle y,e\rangle)=d(ye^*)=d(y)e^*+yd(e^*)=d(y)e^*={}_A\langle d(y),e\rangle.$$

در نتیجه $d({}_A\langle y,e\rangle)={}_A\langle d(y),e\rangle$. اکنون قضیهٔ ۵ ایجاب می‌کند که d یک اشتقاق روی (A,π_e) است.

برعکس، فرض کنید d یک اشتقاق روی (A,π_e) باشد. بنابراین با توجه به قضیهٔ ۵ برای هر $y\in A$ داریم

$$d(ye^*)=d({}_A\langle y,e\rangle)={}_A\langle d(y),e\rangle=d(y)e^*.$$

اکنون چون d یک اشتقاق است، نتیجه می‌گیریم که $yd(e^*)=0$. در نهایت انباشته بودن A ایجاب می‌کند که $d(e^*)=0$

مثال ۷. فرض کنید e یک عضو دلخواه از A باشد به‌طوری‌که $\|e\|=1$ و فرض کنید d یک اشتقاق درونی القا شده به‌وسیلهٔ e^* روی A باشد. در این صورت $d(e^*)=0$ و نتیجهٔ ۶ ایجاب می‌کند که d یک اشتقاق روی (A,π_e) است.

قضیهٔ ۸. [۶، قضیهٔ ۳.۲] *فرض کنید X یک A-مدول هیلبرت چپ باشد. به‌علاوه فرض کنید $D:A\to A$ و $\delta:(X,\pi_e)\to(X,\pi_e)$ اشتقاق‌ها روی جبرهای باناخ باشند به‌طوری‌که $\delta(a\cdot x)=D(a)\cdot x+a\cdot\delta(x)$ و فرض کنید δ اشتقاق درونی القا شده به‌وسیلهٔ y باشد، آن‌گاه*

۱. اگر X انباشته باشد آنگاه D درونی است.

۲. اگر A یکدار باشد و $z\in X$ وجود داشته باشد به طوری که ${}_X\langle z,y\rangle\in Inv(A)$ ، آن‌گاه D درونی است.

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.311]

در قضیهٔ ۸ دیدیم که، تحت شرایط خاص، اگر d-اشتقاق δ درونی باشد آن‌گاه d نیز درونی است. در این مرحله ممکن است این سوال مطرح شود که آیا عکس این قضیه نیز درست است؟ یعنی آیا درونی بودن d درونی بودن δ را ایجاب می‌کند؟ با ارائه مثال ۹ به این سوال پاسخ منفی می‌دهیم.

مثال ۹. فرض کنید H یک فضای هیلبرت تفکیک‌پذیر با پایهٔ متعامد یکهٔ شمارای $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ باشد. در این صورت می‌توان H را با عمل $T\cdot x = T(x)$ به‌عنوان یک $\mathcal{K}(H)$-مدول در نظر گرفت، که در آن $T \in \mathcal{K}(H)$ و $x \in H$. اگر روی H ضرب داخلی $\mathcal{K}(H)$- مقدار را به‌وسیلهٔ ${}_{\mathcal{K}(H)}\langle x, y\rangle = \theta_{x,y}$ تعریف کنیم، H به یک C^*-مدول چپ روی $\mathcal{K}(H)$ تبدیل می‌شود. اکنون قرار دهید $\mathrm{e} = \mathrm{e}_1$ و فرض کنید d یک اشتقاق درونی روی A القا شده به‌وسیلهٔ $K = \theta_{e_3,e_2}$ باشد، در نتیجه برای هر $T \in \mathcal{K}(H)$ داریم $d(T) = K\circ T - T\circ K$. نگاشت $\delta : H \to H$ تعریف شده به‌وسیلهٔ $\delta(x) = K(x)$ یک d-اشتقاق است زیرا برای هر $T \in \mathcal{K}(H)$ و $x \in H$ داریم

$$\delta(T\cdot x) = \delta(T(x)) = K(T(x)) = T(K(x)) + K(T(x)) - T(K(x)) = T\cdot(K(x)) + (K\circ T - T\circ K)(x) = T\cdot\delta(x) + d(T)\cdot x.$$

به‌علاوه چون $K^*(e) = \theta_{e_2,e_3}(e_1) = {}_H\langle e_1, e_3\rangle\cdot e_2 = 0$، داریم

$${}_{\mathcal{K}(H)}\langle\delta(x), e\rangle = {}_{\mathcal{K}(H)}\langle K(x), e\rangle = \theta_{K(x),e} = \theta_{Kx,e} - \theta_{x,K^*e} = K\circ\theta_{x,e} - \theta_{x,e}\circ K = d(\theta_{x,e}) = d({}_{\mathcal{K}(H)}\langle x, e\rangle).$$

بنابراین قضیهٔ ۵ ایجاب می‌کند که δ یک اشتقاق روی (H, π_e) است. اکنون اگر δ درونی باشد، $z \in H$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $x \in H$ داریم

$$\delta(x) = \pi_e(z,x) - \pi_e(x,z) = {}_H\langle z,e\rangle\cdot x - {}_H\langle x,e\rangle\cdot z.$$

اما برای $\mathrm{x} = e_2$ داریم

$$e_3 = {}_H\langle e_2,e_2\rangle\cdot e_3 = \theta_{e_3,e_2}(e_2) = \delta(e_2) = {}_H\langle z,e_1\rangle\cdot e_2 - {}_H\langle e_2,e_1\rangle\cdot z = {}_H\langle z,e_1\rangle\cdot e_2.$$

بنابراین $e_3 = {}_H\langle z,e_1\rangle\cdot e_2$، *در حالی‌که* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ یک پایهٔ متعامد یکه است. در نتیجه δ نمی‌تواند روی (H, π_e) درونی باشد.

قضیهٔ ۱۰ برخی شرایط مناسب برای برقراری عکس قضیهٔ ۸ را فراهم می‌کند.

قضیهٔ ۱۰. *فرض کنید A یکدار و X یک A- مدول هیلبرت دو طرفه انباشته باشد. به‌علاوه فرض کنید ${}_X\langle e,e\rangle = \langle e,e\rangle_X = 1_A$ و δ یک d-اشتقاق روی X باشد. اگر δ یک اشتقاق روی (X, π_e) و d درونی باشد آن‌گاه δ درونی است.*

اثبات. فرض کنید d یک اشتقاق درونی روی A، القا شده به‌وسیلهٔ c، باشد. چون X انباشته است، قضیهٔ ۵ ایجاب می‌کند که

$${}_X\langle\delta(x), e\rangle = d({}_X\langle x,e\rangle) = c\,{}_X\langle x,e\rangle - {}_X\langle x,e\rangle c.$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned}
{}_X\langle\delta(x), e\rangle &= c\,{}_X\langle x,e\rangle - {}_X\langle x,e\rangle c\,{}_X\langle e,e\rangle = {}_X\langle c\cdot x, e\rangle - {}_X\langle {}_X\langle x,e\rangle c\cdot e, e\rangle \\
&= {}_X\langle c\,{}_X\langle e,e\rangle\cdot x, e\rangle - {}_X\langle {}_X\langle x,e\rangle\cdot(c\cdot e), e\rangle \\
&= {}_X\langle {}_X\langle c\cdot e,e\rangle\cdot x, e\rangle - {}_X\langle \pi_e(x, c\cdot e), e\rangle \\
&= {}_X\langle \pi_e(c\cdot e, x), e\rangle - {}_X\langle \pi_e(x, c\cdot e), e\rangle.
\end{aligned}$$

اکنون چون X یک A-مدول هیلبرت دو طرفه انباشته است و $\langle e,e\rangle_X = 1_A$، نتیجه می‌گیریم که

$$\delta(x) = {}_X\langle\delta(x), e\rangle\cdot e = ({}_X\langle\pi_e(c\cdot e, x), e\rangle - {}_X\langle\pi_e(x, c\cdot e), e\rangle)\cdot e = \pi_e(c\cdot e, x) - \pi_e(x, c\cdot e).$$

بنابراین δ یک اشتقاق درونی القا شده به‌وسیلهٔ $c\cdot e$ روی (X, π_e) است و این برهان را کامل می‌کند.

نتیجهٔ ۱۱. *فرض کنید e یک عضو یکانی از C^*-جبر یکدار A باشد. اگر d یک اشتقاق درونی القا شده به‌وسیلهٔ e^* روی A باشد، آن‌گاه d یک اشتقاق درونی روی (A, π_e) است.*

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.311]

اثبات. فرض کنید d یک اشتقاق درونی القا شده به‌وسیلهٔ e^*روی A باشد، در این‌صورت $d(e^*)=0$. بنابراین نتیجهٔ ۶ ایجاب می‌کند که d یک اشتقاق روی (A,π_e) است. حال با به کار بردن قضیهٔ ۱۰، نتیجه می‌گیریم که اشتقاق dروی (A,π_e) درونی است.

C^*-ساختار روی مدول‌های هیلبرت دو طرفه

فرض کنید X یک- Aمدول هیلبرت چپ باشد و فرض کنید e یک عضو دلخواه از X با $\| e \|=1$باشد. دیدیم که نگاشت $\pi_e : X\times X\to X$ تعریف شده به‌وسیلهٔ $\pi_e(x,y)={}_X\langle x,e\rangle\cdot y$ یک ضرب X روی X است که X را به یک جبر باناخ تبدیل می‌کند. این جبر باناخ را به‌وسیلهٔ (X,π_e)نشان دادیم. در این بخش، ما یک برگشت روی X قرار می دهیم که به‌وسیلهٔ آن (X,π_e)به یک*C-جبر تبدیل می‌شود و نشان می‌دهیم این *C-جبر را می‌توان با *C-جبر عملگرهای الحاق‌پذیر روی X یکی گرفت.

در تمام این بخش X یک A-مدول هیلبرت دو طرفه است.

قضیهٔ ۱۲. *فرض کنید A یکدار باشد و e عضوی از X باشد که ${}_X\langle e,e\rangle=\langle e,e\rangle_X=1_A$ و نگاشت $\star : X\to X$ به‌وسیلهٔ $x^\star:={}_X\langle e,x\rangle\cdot e$ را تعریف می‌کنیم. در این صورت X با ضرب π_e و برگشت $\star$ یک C^*-جبر است.*

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که $\star$یک برگشت روی Xاست. برای این منظور، فرض کنید $x,y\in X$ و $\alpha\in\mathbb{C}$. در این صورت داریم

$$(1)(\alpha x+y)^\star={}_X\langle e,\alpha x+y\rangle\cdot e=({}_X\langle e,\alpha x\rangle+{}_X\langle e,y\rangle)\cdot e=\alpha\,{}_X\langle e,x\rangle_X\cdot e+\langle e,y\rangle\cdot e=\alpha x^\star+y^\star.$$

$$(2)(x^\star)^\star=({}_X\langle e,x\rangle\cdot e)^\star={}_X\langle e,{}_X\langle e,x\rangle\cdot e\rangle\cdot e={}_X\langle e,e\rangle_X\langle x,e\rangle\cdot e={}_X\langle x,e\rangle\cdot e=\mathrm{x}.$$

$$\begin{aligned}(3)(\pi_e(x,y))^\star&={}_X\langle e,\pi_e(x,y)\rangle\cdot e={}_X\langle e,{}_X\langle x,e\rangle\cdot y\rangle\cdot e={}_X\langle e,y\rangle_X\langle e,x\rangle\cdot e={}_X\langle e,y\rangle_X\langle e,e\rangle\cdot x^\star={}_X\langle{}_X\langle e,y\rangle\cdot e,e\rangle\cdot x^\star\\&={}_X\langle y^\star,e\rangle\cdot x^\star\\&=\pi_e(y^\star,x^\star)\end{aligned}$$

بنابراین $\star$یک برگشت روی X است. اکنون نشان می‌دهیم که نرم Xدر خاصیت C^* صدق می‌کند.

$$\begin{aligned}\|\pi_e(x,x^\star)\|&=\|{}_X\langle x,e\rangle\cdot x^\star\|=\|{}_X\langle x,e\rangle_X\langle e,x\rangle\cdot e\|=\|{}_X\langle{}_X\langle x,e\rangle\cdot e,x\rangle\cdot e\|=\|{}_X\langle x\cdot\langle e,e\rangle_X,x\rangle\cdot e\|\\&=\|{}_X\langle x,x\rangle\cdot e\|\\&=\|{}_X\langle{}_X\langle x,x\rangle\cdot e,{}_X\langle x,x\rangle\cdot e\rangle\|^{\frac{1}{2}}\\&=\|{}_X\langle x,x\rangle_X\langle e,e\rangle_X\langle x,x\rangle\|^{\frac{1}{2}}\\&=\|{}_X\langle x,x\rangle_X\langle x,x\rangle\|^{\frac{1}{2}}\\&=(\|{}_X\langle x,x\rangle\|^2)^{\frac{1}{2}}\\&=\|{}_X\langle x,x\rangle\|\\&=\|x\|^2\ .\end{aligned}$$

به این X ترتیب با این ساختار به یک *C-جبر تبدیل می‌شود و این برهان را کامل می‌کند.

این C^*- جبر را با نماد $(A,\pi_e,\star)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۱۳. فرض کنید e یک عضو یکانی از *C-جبر یکدار A باشد. در این صورت با استفاده از قضیهٔ ۱۲، A به‌عنوان یک A-مدول هیلبرت دو طرفه، به یک*C-جبر با ساختار جدید $(A,\pi_e,\star)$ تبدیل می‌شود.

قضیهٔ ۱۴. *فرض کنید A یکدار و e عضوی از X باشد که ${}_X\langle e,e\rangle=\langle e,e\rangle_X=1_A$. در این صورت $\Theta:=\{\theta_{e,x}:x\in X\}$ یک *C- زیر جبر $\mathcal{K}(X)$ است که با $(X,\pi_e,\star)$ با Θ یکریخت طولپا است.*

اثبات. ابتدا نشان می دهیم که $\Theta := \{\theta_{e,x} \;:\; x \in X\}$ یک C*-زیر جبر $\mathcal{K}(X)$ است. به آسانی دیده می شود که Θ یک زیرفضای $\mathcal{K}(X)$ است. به‌علاوه $\theta_{e,x}\theta_{e,y} = \theta_{e,{}_X\langle x,e\rangle\cdot y}$. بنابراین Θ یک زیر جبر $\mathcal{K}(X)$ است. حال نشان می دهیم که Θ تحت برگشت $\mathcal{K}(X)$ نیز بسته است. برای این منظور فرض می کنیم $x, y \in X$. در این صورت

$$\theta_{e,x}{}^*(y) = \theta_{x,e}(y) = {}_X\langle y,e\rangle\cdot x = y\cdot\langle e,x\rangle_X\langle e,e\rangle_X = y\cdot\langle e,{}_X\langle x,e\rangle\cdot e\rangle_X = {}_X\langle y,e\rangle_X\langle x,e\rangle\cdot e = {}_X\langle y,{}_X\langle e,x\rangle\cdot e\rangle\cdot e = \theta_{e,{}_X\langle e,x\rangle\cdot e}(y).$$

در نتیجه $\theta_{e,x}{}^* = \theta_{e,{}_X\langle e,x\rangle\cdot e} \in \Theta$. سرانجام نشان می‌دهیم که Θ بسته است. فرض کنیم $T \in \bar{\Theta}$ و دنبالهٔ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ به‌گونه‌ای باشد که دنبالهٔ $(\theta_{e,x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ به T همگرا است. با توجه به این‌که

$$\| x \| = \| {}_X\langle e,e\rangle\cdot x \| = \| \theta_{x,e}(e) \| \leq \| \theta_{x,e} \| = \| \theta_{e,x} \| \leq \| x \|,$$

نتیجه می‌گیریم که $\| x \| = \| \theta_{e,x} \|$. بنابراین $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله کشی در فضای باناخ X است و در نتیجه به عضوی مانند $x \in X$ همگرا است. حال چون $\| x_n - x \| = \| \theta_{e,x_n} - \theta_{e,x} \|$ نتیجه می‌گیریم که $T = \theta_{e,x}$ و Θ بسته است. حال نگاشت $\varphi : (X, \pi_e, \star) \to \Theta$ را به‌صورت $\varphi(x) = \theta_{e,x}$ برای هر $x \in X$ تعریف می‌کنیم. به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که φ خطی و برو است. به‌علاوه

$$\varphi(\pi_e(x,y)) = \theta_{e,\pi_e(x,y)} = \theta_{e,{}_X\langle x,e\rangle\cdot y} = \theta_{e,x}\theta_{e,y} = \varphi(x)\varphi(y)\,.$$

به این ترتیب φ یک نگاشت حافظ ضرب است. در نهایت φ برگشت را نیز حفظ می‌کند، زیرا

$$\begin{aligned}\varphi(x^\star)(y) = \theta_{e,x^\star}(y) = \theta_{e,{}_X\langle e,x\rangle\cdot e}(y) &= {}_X\langle y,e\rangle_X\langle x,e\rangle\cdot e = {}_X\langle y,e\rangle_X\langle x,e\rangle\cdot e = {}_X\langle y,e\rangle\cdot x\cdot\langle e,e\rangle_X \\ &= {}_X\langle y,e\rangle\cdot x \\ &= \theta_{x,e}(y) \\ &= \varphi(x)^*(y).\end{aligned}$$

در نتیجه برای هر $x \in X$ ، $\varphi(x^\star) = \varphi(x)^*$ و این برهان را کامل می کند.

نتیجهٔ ۱۵. *با شرایط قضیهٔ ۱۴، $(X, \pi_e, \star)$ با $\mathcal{L}(X)$ یکریخت طولپا است.*

اثبات. فرض کنید $T \in \mathcal{L}(X)$ و $x \in X$. در این صورت

$$\begin{aligned}T(x) = T(x\cdot\langle e,e\rangle_X) = T({}_X\langle x,e\rangle\cdot e) &= {}_X\langle x,e\rangle\cdot T(e) \\ &= \theta_{T(e),e}(x).\end{aligned}$$

در نتیجه $T \in \Theta$ و این مطلب نشان می‌دهد که $\mathcal{L}(X) = \Theta$.

ملاحظهٔ ۱۶. در [۴] نشان داده شده است که اگر A یکدار باشد آن‌گاه $\mathcal{K}(X) = \mathcal{L}(X)$. به‌علاوه زمانی‌که $\mathrm{X} = \mathrm{A}$ داریم $\mathcal{K}(X) \cong A$ از این‌رو، در مثال ۱۳، چون e یک عضو یکانی است، نتیجهٔ ۱۵ ایجاب می‌کند که $(A, \pi_e, \star) \cong A$

منابع

1. Abbaspour Gh., Moslehian M. S., Niknam A., "Dynamical systems on Hilbert C*-modules", Bull. Iranian Math. Soc., Vol. 31, No. 1, (2005) 25-35.
2. Brown L. G., Mingo J. A., Shen N.-T., "Quasi-multipliers and embeddings of Hilbert C*-bimodules", Canad. J. Math., Vol. 46, No. 6 (1994)1150-1174.
3. Kaplansky I., "Modules over operator algebras", Amer. J. Math., Vol. 75, (1953) 839-858.
4. Lance E. C., "Hilbert C*-modules, LMS Lecture Note Series 210", Cambridge Univ. Press (1995).
5. Moslehian M. S., "On full Hilbert C*-modules", Bull. Malays. Math. Soc., Vol. 2 24, No. 1, (2001) 45-47.
6. Sahleh A., Najarpisheh L., "Arens regularity and derivations of Hilbert modules with the certain product, University of Guilan Press", Journal of Algebra and Related Topics., Vol. 1, No. 1, (2013) 31-39.