

بررسی تبدیلات همدیس انحناهای خاص مترکروپینا

لعیا قاسم نژاد، بهمن رضایی*
دانشگاه ارومیه، دانشکده علوم

دریافت ۹۷/۰۴/۲۰ پذیرش ۹۷/۱۰/۲۴

چکیده

یکی از مهم‌ترین مترهای فینسلری، متر کروپینا نام دارد که به وسیله متر ریمانی α و β -فرمی β به صورت $F := \frac{\alpha^2}{\beta}$ تعریف می‌شود و کاربردهای بسیاری در علم فیزیک، میدان‌های مغناطیسی و سیستم‌های دینامیکی دارد. در این مقاله به بررسی تبدیل همدیس انحناهای غیر ریمانی χ و H وابسته به متر کروپینا پرداخته شده و شرط پایداری این انحناها تحت تبدیلات همدیس بررسی شده است و نشان داده شده که در حالت خاص این تبدیلات به تبدیل متجانس تقلیل می‌یابند.

واژه‌های کلیدی: تبدیلات همدیس، متر فینسلر، متر کروپینا، انحنا χ ، انحنا H .

مقدمه

فرض کنید F یک متر فینسلر n -بعدی روی منیفلد M باشد. به ازای هر بردار غیرصفر $y \in T_x M$ ، F یک ضرب داخلی مانند g_y روی فضای مماس $T_x M$ القا می‌کند

$$g_y(u, v) := g_{ij}(x, y)u^i v^j = \frac{1}{2} [F^2]_{y^i y^j} u^i v^j.$$

حال اگر γ و ν دو بردار دلخواه از فضای مماس $T_x M$ باشند، آن‌گاه زاویه بین این دو بردار که با $\theta(\gamma, \nu)$ نمایش داده می‌شود بدین صورت قابل تعریف است:

$$\cos \theta(\gamma, \nu) := y_i \nu^i / F(x, y) \sqrt{g_{ij}(x, y) \nu^i \nu^j},$$

که در آن $y_i = g_{ij}(x, y) y^j$. نکته قابل توجه این است که زاویه یک مفهوم متقارن نیست، یعنی در حالت کلی زاویه $\theta(\nu, \gamma)$ بین دو بردار ν و γ با زاویه $\theta(\gamma, \nu)$ بین دو بردار γ و ν برابر نیست. حال فرض کنید دو متر فینسلری F و \bar{F} روی منیفلد n -بعدی M وجود دارند به طوری که به ازای هر $x \in M$ و هر بردار $\nu, \gamma \in T_x M \setminus \{0\}$ زاویه $\theta(\nu, \gamma)$ نسبت به متر F با زاویه $\bar{\theta}(\nu, \gamma)$ نسبت به متر \bar{F} با هم برابرند، در این صورت F به طور همدیس مرتبط با \bar{F} است و تبدیل $F \rightarrow \bar{F}$ یک تبدیل همدیس^۳ نامیده می‌شود.

بررسی تبدیلات همدیس در فضاهای متری و نحوه تغییر انحناهای مختلف تحت این تبدیلات یکی از مسایل مورد توجه هندسه دانان بوده است. هاشیگوشی^۴ به بررسی تبدیلات C -همدیس^۵ پرداخته و نشان داده است که تحت شرایط خاصی این تبدیلات به تبدیلات متجانس^۶ تحدید می‌شوند [۱]. سال‌ها بعد وینسه^۱ به ادامه کارهای هاشیگوشی

*نویسنده مسئول b.rezaei@urmia.ac.ir

1. Finsler metric
2. Conformally related
3. Conformal transformation
4. M. Hashigushi
5. C-conformal transformation
6. Homothetic

پرداخت و نشان داد که هر تبدیل C -همدیس در منیفلدهای غیر ریمانی یک تبدیل متجانس است [۲]. در سال ۲۰۰۷ باچکو^۲ و چنگ^۳ تغییرات انحناهای غیر ریمانی مانند انحنا ریچی^۴، ریمان^۵، لندزبرگ^۶ و انحنا S ^۷ را بررسی کردند، شرط پایایی این کمیت‌ها تحت تبدیلات همدیس را بیان کرده‌اند و بحث‌هایی دربارهٔ تبدیلات C -همدیس و تبدیلات لیوویل (تبدیل همدیس حافظ انحنا ریچی) عنوان کردند [۳]. لینگ^۸ تبدیل همدیس بین مترهای راندرز^۹ انیشتینی^{۱۰} و هم‌چنین مترهای کروپینا انیشتینی را بررسی و ثابت کرده است که هر تبدیل همدیس بین دو متر راندرزی انیشتینی و هم‌چنین هر تبدیل همدیس بین دو متر کروپینا انیشتینی یک تبدیل متجانس است [۴]. چنگ^{۱۱} و همکاران نشان دادند که تبدیل همدیس بین مترهای داگلاسی^{۱۲} غیر راندرزی یک تبدیل متجانس است [۵]. تبدیل همدیس حافظ انحنا S توسط شن^{۱۳} معرفی شده است و هم‌چنین وی نشان داده است که در منیفلدهای غیر ریمانی هر تبدیل S -بسته^{۱۴} یک تبدیل C -همدیس است [۶].

ردهٔ خاصی از مترهای فینسلری وجود دارد که (α, β) -متر^{۱۵} نامیده می‌شوند. در این رده مترها به صورت $s = \frac{\beta}{\alpha}$ ، $F := \alpha\varphi(s)$ تعریف می‌شوند که در آن $\alpha := \alpha(x, y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j}$ یک متر ریمانی، $\beta := \beta(x, y) = b_i(x)y^i$ یک ۱-فرمی روی منیفلد M و $\varphi(s)$ یک تابع C^∞ روی بازهٔ باز است. مترهای مختلف در این کلاس با تعریف تابع $\varphi(s)$ معین می‌شوند. به‌عنوان مثال اگر $\varphi(s) = 1 + s$ آن‌گاه متر $F = \alpha + \beta$ متر راندرز نامیده می‌شود، $\varphi(s) = \frac{1}{s}$ متر $F = \frac{\alpha^2}{\beta}$ متر کروپینا و اگر $\varphi(s) = \frac{1}{1-s}$ آن‌گاه $F = \frac{\alpha^2}{\beta}$ متر ماتسوموتو^{۱۶} نامیده می‌شود. متر کروپینا اولین بار به‌وسیلهٔ کروپینا^{۱۷} در سال ۱۹۶۱ معرفی شده است و کاربردهای زیادی در فیزیک مانند میدان‌های مغناطیسی دارد [۷]، به‌دلیل کاربردهای فیزیکی این متر پژوهش‌های زیادی دربارهٔ آن صورت گرفته است.

در حالت کلی در (α, β) -مترها نمادهایی بدین صورت تعریف می‌شوند

$$r_{ij} := \frac{1}{2}(b_{i|j} + b_{j|i}), \quad s_{ij} := \frac{1}{2}(b_{i|j} - b_{j|i}), \quad (1)$$

که "||" نشان‌دهندهٔ مشتق کواریان نسبت به التصاق لوی چویتا از متر α است. هم‌چنین این عبارت‌ها در ادامه استفاده می‌شوند:

$$\begin{aligned} r^i_j &:= a^{ik}r_{kj}, & r_j &:= b^i r_{ij}, & r_0 &:= r_j y^j = r_{ij} b^i y^j, & r_{00} &:= r_{ij} y^i y^j, \\ s^i_j &:= a^{ik}s_{kj}, & s_j &:= b^i s_{ij}, & s_0 &:= s_j y^j = s_{ij} b^i y^j, \\ & & & & & & a^{ij} = (a_{ij})^{-1} \text{ و } b^i := a^{ij} b_j \end{aligned}$$

1. Cs. Vincze
2. S. Bacsó
3. X. Cheng
4. Ricci curvature
5. Riemann curvature
6. Landsberg curvature
7. S-curvature
8. Z. Xiao-ling
9. Randers metric
10. Einstein metric
11. G. Cheng
12. Douglas
13. B. Shen
14. S-closed
15. (α, β) -metric
16. Matsumoto metric
17. V. K. Kropina

در منیفلدهای فینسلری انحنای غیر ریمانی متعددی از جمله انحنای ریچی، ریمان، انحنای S و ... تعریف شده است. در این مقاله به بررسی تبدیل همدیس انحنای χ در مترهای کروپینا پرداخته و قضیه ۱ ثابت شده است:

قضیه ۱. فرض کنید F و \bar{F} دو متر کروپینا به طور همدیس مرتبط باشند یعنی $\bar{F} = e^{\sigma(x)}F$. در این صورت $\bar{\chi} = \chi$ اگر و فقط اگر تابعی مانند $c = c(x)$ روی M وجود داشته باشد به طوری که $\beta\sigma_0 - r_{00} = c(x)\alpha^2$.
نتیجه ۲. در حالت خاص اگر $r_{00} = \lambda(x)\alpha^2$ آن گاه انحنای χ تحت تبدیلات همدیس پایاست اگر و تنها اگر تبدیل همدیس یک تبدیل متجانس باشد.

انحنای H یکی دیگر از قیمت‌های غیر ریمانی است که با استفاده از مشتق کوواریان افقی انحنای میانگین بروالد در امتداد ژئودوزیک‌ها تعریف می‌شود و ارتباط نزدیکی با انحنای پرچمی دارد [۸]. با بررسی تبدیل همدیس انحنای H متر کروپینا، می‌توان قضیه ۳ را بیان کرد:

قضیه ۳. فرض کنید F و \bar{F} دو متر کروپینا به طور همدیس مرتبط باشند یعنی $\bar{F} = e^{\sigma(x)}F$. در این صورت $\bar{H} = H$ اگر و فقط اگر تابعی مانند $c = c(x)$ روی M وجود داشته باشد به طوری که $\beta\sigma_0 - r_{00} = c(x)\alpha^2$.

نتیجه ۴. در حالت خاص اگر $r_{00} = \lambda(x)\alpha^2$ آن گاه انحنای H تحت تبدیلات همدیس پایاست اگر و تنها اگر تبدیل همدیس یک تبدیل متجانس باشد.

مفاهیم مقدماتی

یک متر فینسلر روی منیفلد M تابعی به صورت $F: TM \rightarrow [0, \infty)$ است که در این شرایط صدق کند:

- F تابعی C^∞ روی $TM \setminus \{0\}$ است.
- تابع F نسبت به y همگن مثبت از درجه یک است، یعنی به ازای تابع مثبت λ داریم:

$$F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$$

- به ازای هر بردار مماس $y \in T_x M$ ماتریس هسیان^۱ $\frac{F^2}{2}$ که بدین صورت تعریف می‌شود:

$$g_{ij} = \left[\frac{1}{2} F^2 \right]_{y^i y^j}$$

معین مثبت است.

هر متر فینسلر F میدان اسپری^۲ به صورت $\frac{\partial}{\partial y^i} - 2G^i(x, y)$ القا می‌کند:

$$G^i(x, y) := \frac{1}{2} g^{il}(x, y) \left\{ 2 \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}(x, y) - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}(x, y) \right\} y^j y^k. \quad (2)$$

که در آن ماتریس (g^{ij}) وارون ماتریس (g_{ij}) است. G^i را ضرایب اسپری ژئودوزیک^۳ می‌نامند.

با فرض مختصات موضعی (x^i, y^i) روی منیفلد n -بعدی M ، فرم حجمی^۴ dV_F نسبت به متر F را می‌توان به صورت $dV_F = \sigma_F(x) dx^1 \dots dx^n$ تعریف کرد که:

$$\sigma_F(x) := \frac{Vol(B^n(1))}{Vol\{(y^i) \in \mathbb{R}^n | F(x, y^i(\partial/\partial x^i)|_x) < 1\}}$$

عبارت $Vol(B^n(1))$ نشان‌دهنده حجم گوی اقلیدسی واحد است. به ازای بردار غیر صفر $y \in T_x M$ ، انحراف $\tau := \tau(x, y)$ بدین صورت تعریف می‌شود:

1. Hessian
 2. Spray vector field
 3. Spray geodesic coefficients
 4. Volume form

$$\tau(x, y) := \ln \frac{\sqrt{\det(g_{ij}(x, y))}}{\sigma_F(x)}.$$

می‌توان نشان داد متر F ریمانی است اگر و فقط اگر انحراف ثابت باشد، اما در حالت کلی در منیفلدهای فینسلری این کمیت می‌تواند در امتداد ژئودوزیک‌های برخی مترهای فینسلری ثابت باشد. سرعت تغییر انحراف در امتداد ژئودوزیک‌ها، از کمیت‌هایی است که به شناخت بهتر منیفلد و تمییز آن از منیفلدهای ریمانی کمک می‌کند. فرض کنید به‌ازای بردار غیرصفر $y \in T_x M \setminus \{0\}$ ، $c(t)$ ژئودوزیکی باشد که در دو شرط $c(0) = 0$ و $\dot{c}(0) = 0$ صدق می‌کند. انحنا S بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$S(x, y) := \frac{d}{dt} [\tau(c(t), \dot{c}(t))] |_{t=0},$$

که کمیتی فینسلری و نسبت به y همگن مثبت از درجه یک است. با توجه به تعریف انحراف و ضرایب اسپری می‌توان رابطه مذکور را بدین‌صورت نوشت:

$$S(x, y) = \frac{\partial G^m}{\partial y^m} - y^m \frac{\partial}{\partial x^m} (\ln \sigma_F(x)).$$

انحنای $\chi = \chi_i dx^i$ کمیت غیر ریمانی دیگری روی کلاف مماس TM است و به این‌صورت تعریف می‌شود که اگر F یک متر فینسلر روی منیفلد n -بعدی M باشد آن‌گاه

$$\chi_i := S_{i;m} y^m - S_{;i},$$

که S نشان‌دهنده انحنا S از متر F نسبت به فرم حجمی روی منیفلد M و " " و " " به ترتیب نشان‌دهنده مشتق عمودی و افقی نسبت به التصاق بروالد است. واضح است که در منیفلدهای ریمانی $\chi_i = 0$.

انحنای $H := H_{ij} dx^i dx^j$ را نیز می‌توان با کمک ضرایب اسپری ژئودوزیک روی کلاف مماس TM بدین‌صورت

تعریف کرد [۹]:

$$2H_{ij} = y^m \frac{\partial^4 G^k}{\partial y^i \partial y^j \partial y^k \partial x^m} - 2G^m \frac{\partial^4 G^k}{\partial y^i \partial y^j \partial y^k \partial y^m} - \frac{\partial G^m}{\partial y^i} \frac{\partial^3 G^k}{\partial y^j \partial y^k \partial y^m} - \frac{\partial G^m}{\partial y^j} \frac{\partial^3 G^k}{\partial y^i \partial y^k \partial y^m}$$

می‌توان نشان داد که این کمیت به کمک انحنای χ نیز بدین‌شرح بیان می‌شود [۱۰]:

فرض کنید $F = \frac{\alpha^2}{\beta}$ یک متر کروپینا روی منیفلد M باشد. آن‌گاه با استفاده از رابطه (۲) ضرایب اسپری آن بدین‌صورت است:

$$G^i = G^i_\alpha - \frac{\alpha^2}{2\beta} s^i_0 + \frac{1}{2b^2} \left(\frac{\alpha^2}{\beta} s_0 + r_{00} \right) b^i - \frac{1}{b^2} \left(s_0 + \frac{\beta}{\alpha^2} r_{00} \right) y^i,$$

که در آن G^i_α نشان‌دهنده ضرایب اسپری نسبت به متر α است. چن^۱ و لیو^۲ طی پژوهش‌هایی در زمینه انحناهای غیر ریمانی متر کروپینا، انحنای χ این متر را محاسبه کردند [۱۰].

قضیه. فرض کنید $F = \frac{\alpha^2}{\beta}$ یک متر کروپینا روی منیفلد M باشد، آن‌گاه انحنای χ آن بدین‌صورت قابل بیان است:

$$\chi_i = \frac{n+1}{b^2} \left\{ \frac{2(r_i + s_i)}{b^2} \left(r_0 - \frac{\beta}{\alpha^2} r_{00} \right) - \frac{2(r_0 + s_0)}{b^2} \left(r_i + \frac{2\beta y_i - b_i \alpha^2}{\alpha^4} r_{00} - \frac{2\beta}{\alpha^2} r_{i0} \right) + r_{i|0} - r_{0|i} + \frac{2\beta y_i - b_i \alpha^2}{2\beta} r_{00} - \frac{2\beta}{\alpha^2} r_{i0} \right\} \quad (۳)$$

1. G. Chen
2. L. Liu

که در آن $K^p := -\frac{\alpha^2}{2\beta} S^p_0 + \frac{1}{2b^2} \left(\frac{\alpha^2}{\beta} s_0 + r_{00} \right) b^i - \frac{1}{b^2} (s_0 + \frac{\beta}{\alpha^2} r_{00}) y^i$ و "؛" نشان دهنده مشتق نسبت به التصاق لوی چویتا متر α است.

همچنین انحنای H این متر با استفاده از مشتقات عمودی انحنای X بدین صورت محاسبه شده است:

قضیه. فرض کنید $F = \frac{\alpha^2}{\beta}$ یک متر کروپینا روی منیفلد M باشد، آن گاه انحنای H آن بدین صورت بیان می شود:

$$H_{ij} = \frac{n+1}{2b^2} \left\{ -\frac{4(r_0+s_0)}{b^2} \left[\frac{2\beta y_i - b_i \alpha^2}{\alpha^4} r_{j0} + \frac{2\beta y_j - b_j \alpha^2}{\alpha^4} r_{i0} - \frac{2\beta}{\alpha^2} r_{ij} + \left(\frac{b_i y_j + b_j y_i + \beta a_{ij}}{\alpha^4} - \frac{4\beta y_i y_j}{\alpha^6} \right) r_{00} \right] + 2 \left(\frac{b_i y_j + b_j y_i + \beta a_{ij}}{\alpha^4} - \frac{4\beta y_i y_j}{\alpha^6} \right) (r_{00|0} - 4r_{p0} K^p) + \frac{2\beta y_i - b_i \alpha^2}{\alpha^4} \left[2r_{j0|0} - \frac{2}{b^2} \left(\frac{\alpha^2}{\beta} s_0 + r_{00} \right) r_j + \frac{2\beta y_j - b_j \alpha^2}{\beta^2} r_{p0} S^p_0 + \frac{6}{b^2} \left(s_0 + \frac{\beta}{\alpha^2} r_{00} \right) r_{j0} - \frac{r_0}{b^2} \left(r_{j0} + \frac{2\beta y_j - b_j \alpha^2}{\alpha^4} s_0 - \frac{\alpha^2}{\beta} s_j \right) + \frac{\alpha^2}{\beta} (r_{p0} S^p_j + r_{pj} S^p_0) + \frac{2}{b^2} \left(s_j - \frac{2\beta y_j - b_j \alpha^2}{\alpha^4} r_{00} + \frac{2\beta}{\alpha^2} r_{j0} \right) r_{00} \right] + \frac{2\beta y_j - b_j \alpha^2}{\alpha^4} \left[2r_{i0|0} - \frac{2}{b^2} \left(\frac{\alpha^2}{\beta} s_0 + r_{00} \right) r_i + \frac{2\beta y_i - b_i \alpha^2}{\beta^2} r_{p0} S^p_0 + \frac{6}{b^2} \left(s_0 + \frac{\beta}{\alpha^2} r_{00} \right) r_{i0} - \frac{r_0}{b^2} \left(r_{i0} + \frac{2\beta y_i - b_i \alpha^2}{\alpha^4} s_0 - \frac{\alpha^2}{\beta} s_i \right) + \frac{\alpha^2}{\beta} (r_{p0} S^p_i + r_{pi} S^p_0) + \frac{2}{b^2} \left(s_i - \frac{2\beta y_i - b_i \alpha^2}{\alpha^4} r_{00} + \frac{2\beta}{\alpha^2} r_{i0} \right) r_{00} b \right] - \frac{2\beta}{\alpha^2} \left[r_{ij|0} + \frac{2}{b^2} \left(s_0 + \frac{\beta}{\alpha^2} r_{00} \right) r_{ij} \right] - (r_{ip} S^p_j + r_{jp} S^p_i) - \frac{\beta}{\alpha^2} \left[-\frac{1}{b^2} \left(2r_{j0} + \frac{2\beta y_j - b_j \alpha^2}{\beta^2} s_0 + \frac{\alpha^2}{\beta} s_j \right) r_i - \frac{1}{b^2} \left(2r_{i0} + \frac{2\beta y_i - b_i \alpha^2}{\beta^2} s_0 + \frac{\alpha^2}{\beta} s_i \right) r_j + \frac{2}{b^2} \left(s_j + \frac{b_j \alpha^2 - 2\beta y_j}{\alpha^4} r_{00} + \frac{2\beta}{\alpha^2} r_{j0} b \right) r_{i0} + \frac{2}{b^2} \left(s_i + \frac{b_i \alpha^2 - 2\beta y_i}{\alpha^4} r_{00} + \frac{2\beta}{\alpha^2} r_{i0} b \right) r_{j0} \right] \right\}, \quad (۴)$$

که در آن $b := \| \beta_x \|_\alpha = \sqrt{a^{ij} b_i b_j}$ و $K^p := -\frac{\alpha^2}{2\beta} S^p_0 + \frac{1}{2b^2} \left(\frac{\alpha^2}{\beta} s_0 + r_{00} \right) b^i - \frac{1}{b^2} (s_0 + \frac{\beta}{\alpha^2} r_{00}) y^i$ (برای جزئیات بیشتر به [۱۱] رجوع شود).

اگر دو متر فینسلی F و \bar{F} به طور همدیس مرتبط باشند آن گاه $\bar{F} = e^\sigma F$ و می توان گفت:

$$\bar{\alpha} = e^\sigma \alpha, \quad \bar{\beta} = e^\sigma \beta,$$

که در آن $\bar{\alpha} = \sqrt{\bar{a}_{ij} y^i y^j}$ و $\bar{\beta} = \bar{b}_i(x) y^i$ به سادگی می توان نشان داد که

$$\bar{a}_{ij} = e^{2\sigma(x)} a_{ij}, \quad \bar{a}^{ij} = e^{2\sigma(x)} a^{ij}, \quad \bar{b}_i = e^{\sigma(x)} b_i, \quad \bar{b}^i = e^{-\sigma(x)} b^i, \quad \bar{b}^2 = b^2.$$

و همچنین

$$\bar{b}_{i||j} = e^\sigma (b_{i||j} - b_j \sigma_i + f a_{ij}),$$

که $\bar{b}_{i||j}$ نشان دهنده مشتق کوواریان \bar{b}_i نسبت به $\bar{\alpha}$ است، $f := b^m \sigma_m$ و $\sigma_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \sigma$

$$\bar{r}_{ij} = e^\sigma \left[r_{ij} - \frac{1}{2} (b_i \sigma_j + b_j \sigma_i) + f a_{ij} \right]. \quad (۵)$$

$$\bar{s}_{ij} = e^\sigma \left[s_{ij} + \frac{1}{2} (b_i \sigma_j - b_j \sigma_i) \right], \quad (۶)$$

در این حالت رابطه بین ضرایب اسپری G^i و \bar{G}^i بدین صورت است:

$$\bar{G}^i = G^i + \sigma_0 y^i - \frac{1}{2} F^2 \sigma^i,$$

که $\sigma^i = g^{ij} \sigma_j$ و $\sigma_0 = \sigma_i y^i$ ، اگر $\bar{G}^i = \frac{\partial}{\partial y^j} \bar{G}^i$ و $\bar{G}^i_{jk} = \frac{\partial}{\partial y^k} \bar{G}^i_j = \frac{\partial^2}{\partial y^j \partial y^k} \bar{G}^i$ با مشتق گیری از

رابطه مذکور می توان این روابط را به دست آورد:

$$\bar{G}^i_j = G^i_j + \sigma_j y^i + \sigma_0 \delta^i_j - y_j \sigma^i,$$

$$\bar{G}^i_{jk} = G^i_{jk} + \sigma_j \delta^i_k + \sigma_k \delta^i_j - g_{jk} \sigma^i. \quad (۷)$$

اثبات قضایا

در ادامه برای اثبات قضیه‌های ۱ و ۲، ضروری است تبدیل همدیس چند کمیت مورد نیاز بررسی شود. لم. فرض کنید \bar{F} و F دو (α, β) -متر به‌طور همدیس مرتبط باشند یعنی $\bar{F} = e^\sigma F$ ، آن‌گاه:

$$\bar{r}_i = r_i - \frac{1}{2}(b_i f + b^2 \sigma_i) + f b_i, \tag{۸}$$

$$\bar{r}_0 = r_0 - \frac{1}{2}(\beta f + b^2 \sigma_0) + f \beta, \tag{۹}$$

$$\bar{r}_{00} = r_{00} - \beta \sigma_0 + \alpha^2 f, \tag{۱۰}$$

$$\bar{r}_{i0} = r_{i0} - \frac{1}{2}(\beta \sigma_i + b_i \sigma_0) + f y_i, \tag{۱۱}$$

$$\bar{s}_i = s_i + \frac{1}{2}(b^2 \sigma_i - f b_i), \tag{۱۲}$$

$$\bar{s}_0 = s_0 + \frac{1}{2}(b^2 \sigma_0 - f \beta), \tag{۱۳}$$

$$\bar{s}^m_0 = e^{-\sigma} \left[s^m_0 + \frac{1}{2}(b^m \sigma_0 - \beta \sigma^m) \right], \tag{۱۴}$$

$$\bar{r}_{ij||k} = e^\sigma \left[r_{ij|k} - \frac{1}{2}(b_i \sigma_j + b_j \sigma_i)_{|k} + f_{|k} a_{ij} - \sigma_k r_{ij} - \sigma_i r_{kj} - \sigma_j r_{ik} - f \sigma_k a_{ij} - \frac{1}{2}(f \sigma_j a_{ik} + f \sigma_i a_{jk} + a_{ik} b_j \sigma_m + a_{jk} b_i \sigma_m + \sigma_k \sigma_j b_i + \sigma_k \sigma_i b_j + \sigma_i \sigma_j b_k + a_{ik} r_{mj} \sigma_m + a_{jk} r_{mi} \sigma_m) \right], \tag{۱۵}$$

$$\bar{r}_{00||0} = e^\sigma \left[r_{00|0} - r_{00} \sigma_0 - \beta \sigma_{0|0} + \alpha^2 (r^m_0 + s^m_0) \sigma_m + \alpha^2 b^m \sigma_{m|0} - 3 \sigma_0 r_{00} + 3 \sigma_0^2 \beta - 2 f \sigma_0 \alpha + 2 \alpha^2 r_{m0} \sigma_m - \alpha^2 \beta \sigma_m \sigma_m \right], \tag{۱۶}$$

$$\bar{r}_{i0||0} = e^\sigma \left[r_{i0|0} - \frac{1}{2}(b_i \sigma_0 + \beta \sigma_i)_{|0} + f_{|0} y_i - 2 \sigma_0 r_{i0} - \frac{3}{2} \sigma_i r_{00} + \sigma_0^2 b_i + 2 \sigma_0 \sigma_i \beta - \frac{3}{2} f \sigma_0 y_i - 12 \alpha^2 f \sigma_i + 2 r_{im} \sigma_m - b_i \sigma_m \sigma_m - 12 y_i \beta \sigma_m \sigma_m + y_i r_{m0} \sigma_m \right], \tag{۱۷}$$

$$\bar{r}_{0||i} = r_{0|i} + \frac{1}{2} \left[\beta b^m \sigma_{m|0} - b^2 \sigma_{0|i} + \beta (r^m_i + s^m_i) \sigma_m + f (r_{i0} + s_{0i}) - b^2 y_i \sigma_m \sigma^m - f (b_i \sigma_0 + \beta \sigma_i) + f^2 y_i \right] - (r_i + s_i) \sigma_0 + b^2 \sigma_i \sigma_0, \tag{۱۸}$$

$$\bar{r}_{i||0} = r_{i|0} + \frac{1}{2} \left[b_i b^m \sigma_{m|0} - b^2 \sigma_{i|0} + b_i (r^m_0 + s^m_0) \sigma_m + f (r_{i0} + s_{i0}) - b^2 y_i \sigma_m \sigma^m - f b_i \sigma_0 + \beta \sigma_i + f^2 y_i - r_0 + s_0 \sigma_i + b^2 \sigma_i \sigma_0 \right]. \tag{۱۹}$$

اثبات: تمام روابط موجود در این لم با محاسبات مستقیم به‌دست می‌آید. به‌عنوان مثال واضح است که $\bar{r}_i = \bar{r}_{ij} \bar{b}^j$ ، با استفاده از رابطه (۵) می‌توان نوشت:

$$\bar{r}_i = e^\sigma \left[r_{ij} - \frac{1}{2}(b_i \sigma_j + b_j \sigma_i) + f a_{ij} \right] e^{-\sigma(x)} b^j,$$

که با ساده‌سازی لازم رابطه (۸) به‌دست می‌آید. طبق تعریف مشتق افقی می‌توان نوشت:

$$\bar{r}_{ij||k} = \frac{\partial}{\partial x^k} \bar{r}_{ij} - \bar{r}_{mj} \bar{G}^m_{ik} - \bar{r}_{im} \bar{G}^m_{jk}.$$

با جای‌گذاری (۵) و (۷) در رابطه مذکور این تساوی به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \bar{r}_{ij||k} &= \frac{\partial}{\partial x^k} \left(e^\sigma \left[r_{ij} - \frac{1}{2}(b_i \sigma_j + b_j \sigma_i) + f a_{ij} \right] \right) \\ &- \left(e^\sigma \left[r_{mj} - \frac{1}{2}(b_m \sigma_j + b_j \sigma_m) + f a_{mj} \right] \right) (G^m_{ik} + \sigma_i \delta^m_k + \sigma_k \delta^m_i - g_{ik} \sigma^m) \\ &- \left(e^\sigma \left[r_{im} - \frac{1}{2}(b_i \sigma_m + b_m \sigma_i) + f a_{im} \right] \right) (G^m_{jk} + \sigma_j \delta^m_k + \sigma_k \delta^m_j - g_{jk} \sigma^m), \end{aligned}$$

با ساده کردن این رابطه و توجه به این که $r_{ij||k} = \frac{\partial}{\partial x^k} r_{ij} - r_{mj} G^m_{ik} - r_{im} G^m_{jk}$ (۱۵) به‌دست می‌آید..

اثبات قضیه ۱. واضح است که اگر \bar{F} یک متر کروپینا روی منیفلد n -بعدی M باشد آن گاه انحنا $\bar{\chi}$ آن بدین صورت است:

$$\bar{\chi}_i = \frac{n+1}{b^2} \left\{ \frac{2(\bar{r}_i + \bar{s}_i)}{b^2} \left(\bar{r}_0 - \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}^2} \bar{r}_{00} \right) - \frac{2(\bar{r}_0 + \bar{s}_0)}{b^2} \left(\bar{r}_i + \frac{2\bar{\beta}y_i - \bar{b}_i\bar{\alpha}^2}{\bar{\alpha}^4} r_{00} - \frac{2\bar{\beta}}{\bar{\alpha}^2} \bar{r}_{i0} \right) + \bar{r}_{i||0} \right. \\ \left. - \bar{r}_{0||i} + \frac{2\bar{\beta}y_i - \bar{b}_i\bar{\alpha}^2}{\bar{\alpha}^4} (\bar{r}_{00||0} - 4\bar{r}_{p0}\bar{K}^p) - \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}^2} (2\bar{r}_{i0||0} - 4\bar{r}_{ip}\bar{K}^p - \bar{r}_{00||i}) \right\},$$

که در آن $\bar{K}^p := -\frac{\bar{\alpha}^2}{2\bar{\beta}} \bar{s}^p_0 + \frac{1}{2b^2} \left(\frac{\bar{\alpha}^2}{\bar{\beta}} \bar{s}_0 + \bar{r}_{00} \right) \bar{b}^i - \frac{1}{b^2} (\bar{s}_0 + \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}^2} \bar{r}_{00}) y^i$ با قرار دادن روابط (۸)-(۱۹) در عبارت مذکور، رابطه (۲۰) به دست می آید:

$$\bar{\chi}_i = \chi_i + \frac{(n+1)}{2bb^4\alpha^6} A_i, \quad (20)$$

که در آن

$$A_i := A_{2i}\alpha^6 + A_{4i}\alpha^4 + A_{6i}\alpha^2 + A_{8i}, \\ A_{2i} = \beta(-2b^2\beta b_i\sigma_m\sigma^m + 7b^2\beta r_{im}\sigma^m + b^2\beta b_m\sigma_{m|i} + b^2\beta\sigma_m s^m_i - 2b_i\beta f^2 - 2f\beta s_i \\ - b^2b_i b^m\sigma_{m|0} + 3b^2b_i\sigma_m s^m_0 - 2b^2f s_{i0} - 3b^2b_i\sigma_m r^m_0 + 4b_i f r_0 - 2b_i f s_0 \\ + b^4\sigma_{0|i} - b^4\sigma_{i|0}), \\ A_{4i} = -2\beta(2b^2y_i\sigma_0s_0 - 2b_i\beta\sigma_0s_0 - \beta b^2r_{00}\sigma_i + 4\beta b_i f r_{00} + 6\beta b_i r_0\sigma_0 + 2\beta f r_0 y_i \\ - 2\beta b^2s_{i0}\sigma_0 - 2\beta b^2b_i\sigma_{0|0} - 2\beta y_i f s_0 - 5\beta^2b_i f \sigma_0 + 2b_i r_{00}s_0 - y_i b^4\sigma_0^2 \\ - 2b_i r_{00}s_0 + 2\beta^2 f r_{i0} - \beta^2 f^2 y_i + 2\beta^2\sigma_i r_0 - 2\beta^2\sigma_0 s_i - \beta^3 f \sigma_i - b^2\beta^2\sigma_{i|0} \\ + b^2\beta^2\sigma_{0|i} + 2b^2\beta y_i s_{m0}\sigma^m - 4b^2\beta y_i r_{m0}\sigma^m + 2b^2\beta^2 y_i \sigma_m \sigma^m - 2b^2 y_i s_0 \sigma_0 \\ - b^2 b_i r_{00} \sigma_0 + 2b^2 \beta y_i s_{m0} \sigma^m + 2b^2 y_i r_0 \sigma_0), \\ A_{6i} = -4\beta^2(b^2\beta y_i\sigma_{0|0} + b^2r_{00}y_i\sigma_0 + 3b_i\beta^2\sigma_0^2 + \beta^3\sigma_i\sigma_0 + 3\beta^2f y_i\sigma_0 - 5b_i\beta r_{00}\sigma_0 \\ - 2\beta^2r_{i0}\sigma_0 - \beta^2r_{00}\sigma_i - 3\beta f r_{00}y_i - 4\beta r_0y_i\sigma_0 + 2\beta y_i\sigma_0s_0), \\ A_{8i} = 16\beta^4\sigma_0y^i(\beta\sigma_0 - 2r_{00}). \quad (21)$$

اگر انحنا χ تحت تبدیل همدیس پایا بماند، آن گاه $\bar{\chi}_i = \chi_i$ و طبق (۲۰)، این امر در صورتی ممکن است که $A_i = 0$ ، با فاکتورگیری از α^2 رابطه A_i را می توان به صورت (۲۲) نوشت:

$$(A_{2i}\alpha^4 + A_{4i}\alpha^2 + A_{6i})\alpha^2 + A_{8i} = 0 \quad (22)$$

رابطه (۲۲) نشان می دهد که عبارت A_{8i} باید ضریبی از α^2 باشد، اما با توجه به (۲۱) واضح است که $\beta^4\sigma_0y^i$ چند جمله ای خطی بر حسب y و فاقد α^2 است در نتیجه تابع اسکالری مانند $c(x)$ روی M وجود دارد به طوری که

$$\beta\sigma_0 - 2r_{00} = c(x)\alpha^2.$$

اثبات قضیه ۲. اگر \bar{F} یک متر کروپینا روی منیفلد n -بعدی M باشد آن گاه با توجه به (۴) انحنا \bar{H} آن بدین صورت است:

$$\begin{aligned} \bar{H}_{ij} = & \frac{n+1}{2\bar{b}^2} \left\{ -\frac{4(\bar{r}_0 + \bar{s}_0)}{\bar{b}^2} \left[\frac{2\bar{\beta}y_i - \bar{b}_i\bar{\alpha}^2}{\bar{\alpha}^4} \bar{r}_{j0} + \frac{2\bar{\beta}y_j - \bar{b}_j\bar{\alpha}^2}{\bar{\alpha}^4} \bar{r}_{i0} - \frac{2\bar{\beta}}{\bar{\alpha}^2} \bar{r}_{ij} \right. \right. \\ & + \left. \left. \left(\frac{\bar{b}_i y_j + \bar{b}_j y_i + \bar{\beta} \bar{\alpha}_{ij}}{\bar{\alpha}^4} - \frac{4\bar{\beta} y_i y_j}{\bar{\alpha}^6} \right) \bar{r}_{00} \right] \right. \\ & + 2 \left(\frac{\bar{b}_i y_j + \bar{b}_j y_i + \bar{\beta} \bar{\alpha}_{ij}}{\bar{\alpha}^4} - \frac{4\bar{\beta} y_i y_j}{\bar{\alpha}^6} \right) (\bar{r}_{00||0} - 4\bar{r}_{p0} \bar{K}^p) \\ & + \frac{2\bar{\beta}y_i - \bar{b}_i\bar{\alpha}^2}{\bar{\alpha}^4} \left[2\bar{r}_{j0||0} - \frac{2}{\bar{b}^2} \left(\frac{\bar{\alpha}^2}{\bar{\beta}} \bar{s}_0 + \bar{r}_{00} \right) \bar{r}_j + \frac{2\bar{\beta}y_j - \bar{b}_j\bar{\alpha}^2}{\bar{\beta}^2} \bar{r}_{p0} \bar{s}^p_0 \right. \\ & + \frac{6}{\bar{b}^2} \left(\bar{s}_0 + \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}^2} \bar{r}_{00} \right) \bar{r}_{j0} - \frac{\bar{r}_0}{\bar{b}^2} \left(\bar{r}_{j0} + \frac{2\bar{\beta}y_j - \bar{b}_j\bar{\alpha}^2}{\bar{\alpha}^4} \bar{s}_0 - \frac{\bar{\alpha}^2}{\bar{\beta}} \bar{s}_j \right) \\ & + \frac{\bar{\alpha}^2}{\bar{\beta}} (\bar{r}_{p0} \bar{s}^p_j + \bar{r}_{pj} \bar{s}^p_0) + \frac{2}{\bar{b}^2} \left(\bar{s}_j - \frac{2\bar{\beta}y_j - \bar{b}_j\bar{\alpha}^2}{\bar{\alpha}^4} \bar{r}_{00} + \frac{2\bar{\beta}}{\bar{\alpha}^2} \bar{r}_{j0} \right) \bar{r}_{00} \left. \right] \\ & + \frac{2\bar{\beta}y_j - \bar{b}_j\bar{\alpha}^2}{\bar{\alpha}^4} \left[2\bar{r}_{i0||0} - \frac{2}{\bar{b}^2} \left(\frac{\bar{\alpha}^2}{\bar{\beta}} \bar{s}_0 + \bar{r}_{00} \right) \bar{r}_i + \frac{2\bar{\beta}y_i - \bar{b}_i\bar{\alpha}^2}{\bar{\beta}^2} \bar{r}_{p0} \bar{s}^p_0 \right. \\ & + \frac{6}{\bar{b}^2} \left(\bar{s}_0 + \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}^2} \bar{r}_{00} \right) \bar{r}_{i0} - \frac{\bar{r}_0}{\bar{b}^2} \left(\bar{r}_{i0} + \frac{2\bar{\beta}y_i - \bar{b}_i\bar{\alpha}^2}{\bar{\alpha}^4} \bar{s}_0 - \frac{\bar{\alpha}^2}{\bar{\beta}} \bar{s}_i \right) \\ & + \frac{\bar{\alpha}^2}{\bar{\beta}} (\bar{r}_{p0} \bar{s}^p_i + \bar{r}_{pi} \bar{s}^p_0) + \frac{2}{\bar{b}^2} \left(\bar{s}_i - \frac{2\bar{\beta}y_i - \bar{b}_i\bar{\alpha}^2}{\bar{\alpha}^4} \bar{r}_{00} + \frac{2\bar{\beta}}{\bar{\alpha}^2} \bar{r}_{i0} \right) \bar{r}_{00} \bar{b} \left. \right] \\ & - \frac{2\bar{\beta}}{\bar{\alpha}^2} \left[\bar{r}_{ij||0} + \frac{2}{\bar{b}^2} \left(\bar{s}_0 + \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}^2} \bar{r}_{00} \right) \bar{r}_{ij} \right] - (\bar{r}_{ip} \bar{s}^p_j + \bar{r}_{jp} \bar{s}^p_i) \\ & - \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}^2} \left[-\frac{1}{\bar{b}^2} \left(2\bar{r}_{j0} + \frac{2\bar{\beta}y_j - \bar{b}_j\bar{\alpha}^2}{\bar{\beta}^2} \bar{s}_0 + \frac{\bar{\alpha}^2}{\bar{\beta}} \bar{s}_j \right) \bar{r}_i \right. \\ & + \frac{2}{\bar{b}^2} \left(\bar{s}_j + \frac{\bar{b}_j\bar{\alpha}^2 - 2\bar{\beta}y_j}{\bar{\alpha}^4} \bar{r}_{00} + \frac{2\bar{\beta}}{\bar{\alpha}^2} \bar{r}_{j0} \bar{b} \right) \bar{r}_{i0} \\ & - \frac{1}{\bar{b}^2} \left(2\bar{r}_{i0} + \frac{2\bar{\beta}y_i - \bar{b}_i\bar{\alpha}^2}{\bar{\beta}^2} \bar{s}_0 + \frac{\bar{\alpha}^2}{\bar{\beta}} \bar{s}_i \right) \bar{r}_j \\ & \left. + \frac{2}{\bar{b}^2} \left(\bar{s}_i + \frac{\bar{b}_i\bar{\alpha}^2 - 2\bar{\beta}y_i}{\bar{\alpha}^4} \bar{r}_{00} + \frac{2\bar{\beta}}{\bar{\alpha}^2} \bar{r}_{i0} \bar{b} \right) \bar{r}_{j0} \right\}, \end{aligned}$$

که در آن $\bar{K}^p := -\frac{\bar{\alpha}^2}{2\bar{\beta}} \bar{s}^p_0 + \frac{1}{2b^2} \left(\frac{\bar{\alpha}^2}{\bar{\beta}} \bar{s}_0 + \bar{r}_{00} \right) \bar{b}^i - \frac{1}{b^2} \left(\bar{s}_0 + \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}^2} \bar{r}_{00} \right) y^i$ و روابط (۵)، (۶) و (۸) - (۱۹) در تساوی مذکور، رابطه بین انحنای H دو متر به‌طور همدیس مرتبط \bar{F} و F به‌صورت (۲۳) است:

$$\bar{H}_{ij} = H_{ij} + \frac{(n+1)}{8\bar{\beta}^2 b^4 \bar{\alpha}^8} B_{ij}, \tag{23}$$

که در آن

$$B_{ij} := B_{2ij} \alpha^8 + B_{4ij} \alpha^6 + B_{6ij} \alpha^4 + B_{8ij} \alpha^2 + B_{10ij}, \tag{24}$$

$$\begin{aligned} B_{2ij} = & \beta^2 (-4f b_i s_j - 4f b_j s_i + 12\sigma^m b^2 b_j r_{im} + 12\sigma^m b^2 b_i r_{jm} - 12\sigma^m b^2 b_i b_j \sigma_m + 4\sigma^m b^2 b_j s_{mi} \\ & + 4\sigma^m b^2 b_i s_{mj} + 4f b_i r_j + 4f b_j r_i - 4f^2 b_i b_j) \\ & + \beta (-2b^4 b_j \sigma_i \sigma_0 + 2b^2 b_j r_i \sigma_0 - 2b^2 b_j \sigma_i s_0 + 2b^2 b_j \sigma_i r_0 - 2b^2 b_j \sigma_0 s_i - 2b^4 b_i \sigma_j \sigma_0 \\ & + 2b^2 b_i r_j \sigma_0 + 2b^2 b_i r_0 \sigma_j - 2b^2 b_i s_j \sigma_0 - 4b_i s_j r_0 + 4b_j r_j s_0 - 4b_i r_j s_0 - 4b_j s_i r_0 \\ & - 4b_j r_i s_0 + 4b_i s_j r_0 + 4b_j s_i r_0 + 4b_i r_j s_0 + 2b^4 b_i \sigma_j \sigma_0 + 2b^4 b_j \sigma_i \sigma_0 - 2b^2 b_i \sigma_j \sigma_0 \\ & - 2b^2 b_j r_i \sigma_0 - 2b^2 b_j \sigma_i r_0 + 2b^2 b_i \sigma_j s_0 + 2b^2 b_i \sigma_0 s_j - 2b^2 b_i r_j \sigma_0 - 2b^2 b_i \sigma_j r_0 \\ & + 2b^2 b_j \sigma_i s_0 + 2b^2 b_j \sigma_0 s_i), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{4ij} = & \beta^4(-4a_{ij}b^2\sigma^m\sigma_m + 8b^2\sigma_i\sigma_j + 12a_{ij}f^2 + 12fb_i\sigma_j + 12fb_j\sigma_i - 4r_i\sigma_j - 4r_j\sigma_i + \\
 & 4s_i\sigma_j + 4s_j\sigma_i) + \beta^3(-2fb^2y_i\sigma_j + 2fb^2y_j\sigma_i + 8b^2b_iy_j\sigma^m\sigma_m + 8b^2b_jy_i\sigma^m\sigma_m - 28b_i\sigma_jr_0 - \\
 & 28b_j\sigma_ir_0 + 4f^2b_iy_j - 4fy_jr_j + 4f^2b_jy_i - 24fr_{j0}b_i + 4b^2b_i\sigma_{j|0} + 8fa_{ij}r_0 - 8b^2\sigma_jr_{i0} - \\
 & 12b_i\sigma_0r_j - 12b_j\sigma_0r_i - 24fr_{i0}b_j + 4b^2b_j\sigma_{i|0} - 8b^2\sigma_ir_{j0} - 20b^2\sigma^mr_{im}y_j - 20b^2\sigma^mr_{jm}y_i + \\
 & 16a_{ij}b^2\sigma^mr_{0m} + 4b^2b_j\sigma_i\sigma_0 - 4fb^2y_j\sigma_i - 4fb^2y_i\sigma_j - 4b^2\sigma^ms_{mi}y_j - 4b^2\sigma^ms_{mj}y_i + \\
 & 40fb_j\sigma_0b_i + 4b^2b_i\sigma_j\sigma_0 + 8a_{ij}b^2b^m\sigma_{m|0} - 12b_j\sigma_i\sigma_0 - 12b_i\sigma_0\sigma_j - 12b_i\sigma_j\sigma_0 - 4fr_iy_j + \\
 & 40fa_{ij}\sigma_0 + 4fs_iy_j + 4fs_jy_i + 12b_j\sigma_0s_i) + \beta^2(-8y_ir_j\sigma_0 + 4fb_iy_j\sigma_0 + 4b^2y_i\sigma_j\sigma_0 + 16a_{ij}r_0\sigma_0 + \\
 & 8b_ir_{j0}\sigma_0 + 8b_ir_{00}\sigma_j + 8b_jr_{i0}\sigma_0 + 8b_jr_{00}\sigma_i + 8r_is_0y_j + 8r_js_0y_i + 8r_0s_iy_j + 8r_0s_jy_i + 4b^2\sigma_iy_j\sigma_0 + \\
 & 4b^2\sigma_0y_j\sigma_i + 8b_jb_i\sigma_0\sigma_0 + 4fb_jy_i\sigma_0 + 4b^2s_jy_i\sigma_0 + 4b_iy_jb^2\sigma^mr_{0m} + 4b_jy_ib^2\sigma^mr_{0m} + \\
 & 4b^2b_j\sigma_ir_{00} + 4b^2b_j\sigma_0s_{i0} + 4b^4y_j\sigma_0\sigma_i - 4b^2y_j\sigma_0r_i - 4b^2y_j\sigma_ir_0 + 4b^2b_i\sigma_0s_{j0} - 4b^2y_i\sigma_0r_j - \\
 & 4b^2y_i\sigma_jr_0 - 16fb_ib_jr_{00} - 4fb_iy_jr_0 - 4fb_jy_ir_0 - 24b_jb_i\sigma_0r_0 + 4b^2b_j\sigma_0r_{i0} + 8b^2b_ib_j\sigma_{0|0} + \\
 & 4b^2b_i\sigma_0r_{j0} + 4b^2b_i\sigma_jr_{00} - 4b^4\sigma_i\sigma_0y_j - 4b^2y_i\sigma_j\sigma_0 - 4b^2y_i\sigma_0s_j + 8b^2y_i\sigma_0r_j + 4b^2y_i\sigma_jr_0 - \\
 & 4b^2y_j\sigma_i\sigma_0 - 4b^2b_iy_j\sigma^ms_{m0} - 4b^2y_j\sigma_0s_i + 4b^2y_j\sigma_ir_0 - 4b^2b_jy_i\sigma^ms_{m0} - 8r_0y_j\sigma_i - 8r_0y_i\sigma_j - \\
 & 8r_{00}s_jb_i - 8r_{00}b_j\sigma_i - 8r_iy_j\sigma_0 - 16r_0a_{ij}\sigma_0 - 8b_ir_{j0}\sigma_0 - 8b_jr_{i0}\sigma_0),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{6ij} = & -8b\sigma_i\sigma_j\beta^6 + \beta^2(-8b^2b_iy_jr_{00}\sigma_0 - 8b^2b_jy_ir_{00}\sigma_0) + \beta^5(-8bb_i\sigma_0\sigma_j - 8bb_j\sigma_0\sigma_i + \\
 & 16bfy_i\sigma_j + 16bfy_j\sigma_i - 40a_{ij}f\sigma_0 + 16br_{i0}\sigma_j + 16br_{j0}\sigma_i - 24b_i\sigma_0\sigma_j - 24b_j\sigma_0\sigma_i - 32fy_i\sigma_j - \\
 & 32fy_j\sigma_i) + \beta^4(-64b_ib_j\sigma_0^2 + 16r_jy_i\sigma_0 + 16r_iy_j\sigma_0 - 8b^2y_j\sigma_{i|0} - 8b^2y_i\sigma_{j|0} + 48b_ir_{j0}\sigma_0 + \\
 & 48b_jr_{i0}\sigma_0 - 8y_is_0\sigma_j + 24y_jr_0\sigma_i - 16a_{ij}\sigma_0s_i + 24f^2y_iy_j - 16y_is_j\sigma_0 - 8b^2a_{ij}\sigma_{0|0} + 64fr_{i0}y_j + \\
 & 24b_ir_{00}\sigma_j + 24b_jr_{00}\sigma_i - 8bb_ib_j\sigma_0^2 - 32bf^2y_iy_j + 16bb_ir_{j0}\sigma_0 + 16bb_jr_{i0}\sigma_0 - 32bfr_{i0}y_j - \\
 & 32bfr_{j0}y_i - 72fy_j\sigma_0b_i - 72fy_i\sigma_0b_j + 16bb_ify_j\sigma_0 + 16bb_jfy_i\sigma_0 + 8b^2y_iy_j\sigma^ms_{m0}) + \\
 & \beta^3(-16b^2b_iy_j\sigma_{0|0} - 16b^2b_jy_i\sigma_{0|0} + 40b_ifr_{00}y_j + 40b_jfr_{00}y_i + 56b_ir_0y_j\sigma_0 + 56b_jr_0y_i\sigma_0 + \\
 & 16fr_0y_iy_j - 8b^2y_jr_{i0}\sigma_0 - 8b^2y_ir_{j0}\sigma_0 - 8b^2y_jr_{00}\sigma_i - 8b^2y_ir_{00}\sigma_j - 8b^2y_js_{i0}\sigma_0 - 8b^2y_is_{j0}\sigma_0 + \\
 & 80b_ib_jr_{00}\sigma_0 - 8b^2a_{ij}r_{00}\sigma_0 + 8b^2y_jy_if\sigma_0 + 16b^2y_jy_i\sigma^ms_{m0} + 16b^2y_jy_i\sigma^mr_{m0} - 24b_is_0y_j\sigma_0 - \\
 & 24b_js_0y_i\sigma_0 - 16y_jy_ifs_0),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{8ij} = & 16\sigma_0\beta^6(2a_{ij}\sigma_0 + 3y_i\sigma_j + 3y_j\sigma_i) + 32b^2\beta^3y_iy_jr_{00}\sigma_0 + \beta^5(112b_iy_j\sigma_0^2 + \\
 & 112b_jy_i\sigma_0^2 + 96fy_iy_j\sigma_0 - 64a_{ij}r_{00}\sigma_0 - 96y_jr_{i0}\sigma_0 - 96y_ir_{j0}\sigma_0 - 48r_{00}y_i\sigma_j - 48r_{00}y_j\sigma_i) + \\
 & \beta^4(32b^2y_iy_j\sigma_{0|0} - 176b_ib_jr_{00}\sigma_0 - 176b_jy_ir_{00}\sigma_0 - 96fr_{00}y_iy_j - 128y_iy_j\sigma_0r_0 - 64y_iy_j\sigma_0s_0),
 \end{aligned}$$

$$B_{10ij} = -192\beta^5y_iy_j\sigma_0(\beta\sigma_0 - 2r_{00}) \tag{۲۵}$$

طبق رابطه (۲۳)، اگر $\bar{H}_{ij} = H_{ij}$ و فقط اگر $B_{ij} = 0$ ، در این صورت:

با توجه به خطی بودن عبارت $\beta^5y_iy_j\sigma_0$ ، این تساوی زمانی می تواند برقرار باشد که تابع اسکالری مانند $c(x)$ روی M وجود داشته باشد به طوری که

$$\beta\sigma_0 - 2r_{00} = c(x)\alpha^2. \quad (26)$$

در حالت خاص اگر $r_{00} = \mu(x)\alpha^2$ (که μ تابعی اسکالر روی M است)، آن‌گاه متر $F = \frac{\alpha^2}{\beta}$ از انحنای $S = 0$ است و در این حالت $\chi = H = 0$ و می‌توان (۲۶) را بدین صورت نوشت:

$$\beta\sigma_0 = (2\mu(x) + c(x))\alpha^2.$$

که در این صورت $\sigma_0 = 0$ و تبدیل همدیس یک تبدیل متجانس است.

منابع

1. Hashiguchi M., "On conformal transformations of Finsler metrics", J. Math. Kyoto Univ., 16 (1976) 25-50.
2. Vincze Cs., "On the existence of C-conformal changes of Riemann-Finsler metrics", Tsukuba J. Math., 24 (2) (2000) 419-426.
3. Bacso S., Cheng X., "Finsler conformal transformations and the curvature invariances", , Publ. Math. Debrecen, 70/1-2, (2007) 221-231.
4. Xiao-ling Z., "Conformal transformation between some Finsler Einstein spaces", Journal of East China Normal University (natural science) 2.
5. Chen G., Cheng X., Zou Y., "On conformal transformation between two (α, β) -metrics", Differential Geometry and its Applications, 31 (2013) 300-307.
6. Shen B., "S-closed conformal transformations in Finsler geometry", Differential Geometry and its Applications, 58 (2018) 254-263.
7. Kropina V. K., "On projective two-dimensional Finsler spaces with a special metric", Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Anal., 11 (1961) 277-292.
8. Akbar Zade H., "Sur les espaces de Finsler A courbures sectionnelles constants" , Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. (5) 74 (1988) 271-322.
9. Najafi B., Tayebi A., " Finsler metrics of scalar Flag curvature and projective invariants", Balkan Journal of Geometry and Its Applications, Vol.15, No. 2 (2010) 82-91.
10. Shen Z., "On Some Non-Riemannian Quantities in Finsler Geometry", Canad. Math. Bull. 56 (2013) 184-193.
11. Chen G., Liu L., "On Kropina metrics with non Riemannian curvature properties", diff geom., 43 (2015) 180-191.