بررسی تبدیلات همدیس انحناهای خاص متر کروپینا

لعیا قاسم نژاد، بهمن رضایی*
دانشگاه ارومیه، دانشکدهٔ علوم

دریافت ۹۷/۰۴/۲۰ پذیرش ۹۷/۱۰/۲۴

چکیده

یکی از مهم‌ترین مترهای فینسلری، متر کروپینا نام دارد که به‌وسیلهٔ متر ریمانی α و ۱-فرمی β بـه صـورت $F := \frac{\alpha^2}{\beta}$ تعریف می‌شود و کاربردهای بسیاری در علم فیزیک، میدان های مغناطیسی و سیستم های دینامیکی دارد. در این مقاله بـه بررسی تبدیل همدیس انحناهای غیر ریمانی χ و H وابسته به متر کروپینا پرداخته شده و شرط پایداری این انحناهـا تحـت تبدیلات همدیس بررسی شده است و نشان داده شده که در حالت خاص این تبدیلات به تبدیل متجانس تقلیل می‌یابند.

واژه های کلیدی: تبدیلات همدیس، متر فینسلر، متر کروپینا، انحنای χ، انحنای H.

مقدمه

فرض کنید F یک متر فینسلر[۱] روی منیفلد n-بعدی M باشد. به‌ازای هر بردار غیرصفر $y \in T_xM$ ، F یک ضرب داخلی مانند g_y روی فضای مماس T_xM القا می‌کند

$$g_y(u,v) := g_{ij}(x,y)u^iv^j = \frac{1}{2}[F^2]_{y^iy^j}\,u^iv^j.$$

حال اگر y و v دو بردار دلخواه از فضای مماس T_xM باشند، آن‌گاه زاویهٔ بین این دو بردارکه با $\theta(y,v)$ نمـایش داده می‌شود بدین‌صورت قابل تعریف است:

$$\cos\theta\,(y,v) := y_iv^i/F(x,y)\sqrt{g_{ij}(x,y)v^iv^j},$$

که در آن $y_i = g_{ij}(x,y)y^j$. نکته قابل توجه این است که زاویهٔ یک مفهوم متقارن نیست، یعنی در حالت کلی زاویهٔ $\theta(v,y)$ بین دو بردار v و y با زاویهٔ $\theta(y,v)$ بین دو بردار y و v برابر نیست. حال فرض کنید دو متر فینسلری F و $\bar{F}$ روی منیفلد n-بعدی M وجود دارند به‌طوری‌که به‌ازای هر $x \in M$ و هر بـردار $v,y \in T_xM\backslash\{0\}$ زاویـهٔ $\theta(v,y)$ نسبت به متر F با زاویه $\bar{\theta}(v,y)$ نسبت به متر $\bar{F}$ با هم برابرند، در این صورت F به‌طور همدیس مرتبط[۲] با $\bar{F}$ است و تبدیل $F \to \bar{F}$ یک تبدیل همدیس[۳] نامیده می‌شود.

بررسی تبدیلات همدیس در فضاهای متری و نحوهٔ تغییر انحناهای مختلف تحت این تبدیلات یکی از مسایل مـورد توجه هندسه دانان بوده است. هاشیگوشی[۴] به بررسی تبدیلات c- همـدیس[۵] پرداختـه و نشـان داده اسـت کـه تحـت شرایط خاصی این تبدیلات به تبدیلات متجانس[۶] تحدید می‌شوند [۱]. سال‌ها بعد وینسه[۱] به ادامهٔ کارهای هاشیگوشی

*نویسنده مسئول b.rezaei@urmia.ac.ir

1. Finsler metric
2. Conformally related
3. Conformal transformation
4. M. Hashigushi
5. C-conformal transformation
6. Homothetic

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.14.5]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.295]

پرداخت و نشان داد که هر تبدیل c- همدیس در منیفلدهای غیر ریمانی یک تبدیل متجانس است [۲]. در سال ۲۰۰۷ باچکو[2] و چنگ[3] تغییرات انحناهای غیر ریمانی مانند انحنای ریچی[4]، ریمان[5]، لندزبرگ[6] و انحنای S[7] را بررسی کردند، شرط پایایی این کمیت‌ها تحت تبدیلات همدیس را بیان کرده‌اند و بحث‌هایی دربارهٔ تبدیلات c- همدیس و تبدیلات لیوویل(تبدیل همدیس حافظ انحنای ریچی) عنوان کردند [۳]. لینگ[8] تبدیل همدیس بین مترهای راندرز[9] انیشتینی[10] و هم‌چنین مترهای کروپینا انیشتینی را بررسی و ثابت کرده است که هر تبدیل همدیس بین دو متر راندرزی انیشتینی و هم‌چنین هر تبدیل همدیس بین دو متر کروپینا انیشتینی یک تبدیل متجانس است [۴]. چنگ[11] و همکاران نشان دادند که تبدیل همدیس بین مترهای داگلاسی[12] غیر راندرزی یک تبدیل متجانس است [۵]. تبدیل همدیس حافظ انحنای S توسط شن[13] معرفی شده است و هم‌چنین وی نشان داده است که در منیفلدهای غیر ریمانی هر تبدیل S -بسته[14] یک تبدیل c-همدیس است [۶].

ردهٔ خاصی از مترهای فینسلری وجود دارد که (α,β)-متر[15] نامیده می‌شوند. در این رده مترها به‌صورت $F := \alpha\varphi(s)$ ، $s=\frac{\beta}{\alpha}$ تعریف می‌شوند که در آن $\alpha := \alpha(x,y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j}$ یک متر ریمانی، $\beta := \beta(x,y) = b_i(x)y^i$ یک ۱-فرمی روی منیفلد M و $\varphi(s)$ یک تابع C^∞ روی بازهٔ باز است. مترهای مختلف در این کلاس با تعریف تابع $\varphi(s)$ معین می‌شوند. به‌عنوان مثال اگر $\varphi(s) = 1+s$ آن‌گاه متر $F=\alpha+\beta$ متر راندرز نامیده می‌شود، $\varphi(s)=\frac{1}{s}$ متر $F=\frac{\alpha^2}{\beta}$ متر کروپینا و اگر $\varphi(s)=\frac{1}{1-s}$ آنگاه $F=\frac{\alpha^2}{\beta}$ متر ماتسوموتو[16] نامیده می‌شود. متر کروپینا اولین بار به‌وسیلهٔ کروپینا[17] در سال ۱۹۶۱ معرفی شده است و کاربردهای زیادی در فیزیک مانند میدان‌های مغناطیسی دارد [۷]، به‌دلیل کاربردهای فیزیکی این متر پژوهش‌های زیادی دربارهٔ آن صورت گرفته است.

در حالت کلی در (α,β)-مترها نمادهایی بدین‌صورت تعریف می شوند

$$r_{ij} := \frac{1}{2}\left(b_{i|j}+b_{j|i}\right), \qquad s_{ij} := \frac{1}{2}\left(b_{i|j}-b_{j|i}\right), \qquad (۱)$$

که "|" نشان‌دهندهٔ مشتق کوواریان نسبت به التصاق لوی چویتا از متر α است. هم‌چنین این عبارت‌ها در ادامه استفاده می‌شوند:

$$r^i{}_j := a^{ik}r_{kj}\,, \qquad r_j := b^ir_{ij}, \qquad r_0 := r_jy^j = r_{ij}b^iy^j, \qquad r_{00} := r_{ij}y^iy^j,$$
$$s^i{}_j := a^{ik}s_{kj}\,, \qquad s_j := b^is_{ij}, \qquad s_0 := s_jy^j = s_{ij}b^iy^j,$$

که $b^i := a^{ij}b_j$ و $a^{ij} = (a_{ij})^{-1}$.

1. Cs. Vincze
2. S. Bacso
3. X. Cheng
4. Ricci curvature
5. Riemann curvature
6. Landsberg curvature
7. S-curvature
8. Z. Xiao-ling
9. Randers metric
10. Einstein metric
11. G. Cheng
12. Douglas
13. B. Shen
14. S-closed
15. (α,β)-metric
16. Matsumoto metric
17. V. K. Kropina

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.14.5]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.295]

در منیفلدهای فینسلری انحناهای غیر ریمانی متعددی از جمله انحنای ریچی، ریمان، انحنای S و ... تعریف شده است.

در این مقاله به بررسی تبدیل همدیس انحنای χ در متر های کروپینا پرداخته و قضیهٔ ۱ ثابت شده است:

قضیهٔ ۱. فرض کنید F و $\bar{F}$ دو متر کروپینا به‌طور همدیس مرتبط باشند یعنی $\bar{F} = e^{\sigma(x)}F$. در این صورت $\bar{\chi} = \chi$ اگر و فقط اگر تابعی مانند $c = c(x)$ روی M وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\beta\sigma_0 - r_{00} = c(x)\alpha^2$.

نتیجهٔ ۲. در حالت خاص اگر $r_{00} = \lambda(x)\alpha^2$ آن‌گاه انحنای χ تحت تبدیلات همدیس پایاست اگر و تنها اگر تبدیل همدیس یک تبدیل متجانس باشد.

انحنای H یکی دیگر از کیمت‌های غیر ریمانی است که با استفاده از مشتق کوواریان افقی انحنای میانگین بروالد در امتداد ژئودوزیک‌ها تعریف می‌شود و ارتباط نزدیکی با انحنای پرچمی دارد [۸]. با بررسی تبدیل همدیس انحنای H متر کروپینا، می‌توان قضیهٔ ۳ را بیا ن کرد:

قضیهٔ ۳. فرض کنید F و $\bar{F}$ دو متر کروپینا به‌طور همدیس مرتبط باشند یعنی $\bar{F} = e^{\sigma(x)}F$. دراین صورت $\bar{H} = H$ اگر و فقط اگر تابعی مانند $c = c(x)$ روی M وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\beta\sigma_0 - r_{00} = c(x)\alpha^2.$$

نتیجهٔ ۴. در حالت خاص اگر $r_{00} = \lambda(x)\alpha^2$ آن‌گاه انحنای H تحت تبدیلات همدیس پایا است اگر و تنها اگر تبدیل همدیس یک تبدیل متجانس باشد.

مفاهیم مقدماتی

یک متر فینسلر روی منیفلد M تابعی به‌صورت $F: TM \to [0, \infty)$ است که در این شرایط صدق کند:

- F تابعی C^∞ روی $TM\backslash\{0\}$ است.
- تابع F نسبت به y همگن مثبت از درجه یک است، یعنی به‌ازای تابع مثبت λ داریم:
$$F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$$
- به‌ازای هر بردار مماس $y \in T_xM$ ماتریس هسیان[۱] $\frac{F^2}{2}$ که بدین‌صورت تعریف می‌شود:
$$g_{ij} = [\frac{1}{2}F^2]_{y^i y^j}$$

معین مثبت است.

هر متر فینسلر F میدان اسپری[۲] به‌صورت $G = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i(x, y)\frac{\partial}{\partial y^i}$ القا می‌کند:

$$G^i(x, y) := \frac{1}{2}g^{il}(x, y)\left\{2\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}(x, y) - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}(x, y)\right\}y^j y^k. \quad (۲)$$

که در آن ماتریس (g^{ij}) وارون ماتریس (g_{ij}) است. G^i را ضرایب اسپری ژئودوزیک[۳] می‌نامند.

با فرض مختصات موضعی (x^i, y^i) روی منیفلد n-بعدی M ، فرم حجمی[۴] dV_F نسبت به متر F را می‌توان به‌صورت $dV_F = \sigma_F(x)dx^1 \dots dx^n$ تعریف کرد که:

$$\sigma_F(x) := \frac{Vol(B^n(1))}{Vol\{(y^i) \in \mathbb{R}^n | F(x, y^i(\partial/\partial x^i)|_x) < 1\}}$$

عبارت $Vol(B^n(1))$ نشان‌دهندهٔ حجم گوی اقلیدسی واحد است. به‌ازای بردار غیرصفر $y \in T_xM$ ، انحراف $\tau := \tau(x, y)$ بدین‌صورت تعریف می‌شود:

1. Hessian
2. Spray vector field
3. Spray geodesic coefficients
4. Volume form

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.14.5]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.295]

$$\tau(x,y) := ln\frac{\sqrt{\det\left(g_{ij}(x,y)\right)}}{\sigma_F(x)}.$$

می‌توان نشان داد متر F ریمانی است اگر و فقط اگر انحراف ثابت باشد، اما درحالت کلی در منیفلدهای فینسلری این کمیت می‌تواند در امتداد ژئودوزیک‌های برخی مترهای فینسلری ثابت باشد. سرعت تغییر انحراف در امتداد ژئودوزیک‌ها، از کمیت‌هایی است که به شناخت بهتر منیفلد و تمییز آن از منیفلدهای ریمانی کمک می‌کند. فرض کنید به‌ازای بردار غیرصفر $y \in T_xM\{0\}$ ، $c(t)$ ژئودوزیکی باشد که در دو شرط $c(0) = 0$ و $\dot{c}(0) = 0$ صدق می‌کند. انحنای S بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$S(x,y) := \frac{d}{dt}\left[\tau\left(c(t),\dot{c}(t)\right)\right]|_{t=0},$$

که کمیتی فینسلری و نسبت به y همگن مثبت از درجهٔ یک است. با توجه به تعریف انحراف و ضرایب اسپری می‌توان رابطهٔ مذکور را بدین‌صورت نوشت:

$$S(x,y) = \frac{\partial G^m}{\partial y^m} - y^m\frac{\partial}{\partial x^m}\left(ln\sigma_F(x)\right).$$

انحنای $\chi = \chi_i dx^i$ کمیت غیر ریمانی دیگری روی کلاف مماس TM است و به این صورت تعریف می‌شود که اگر F یک متر فینسلر روی منیفلد n-بعدی M باشد آن‌گاه

$$\chi_i := S_{.i;m}y^m - S_{;i}\ ,$$

که S نشان‌دهندهٔ انحنای S از متر F نسبت به فرم حجمی روی منیفلد M و " . " و " ; " به‌ترتیب نشان‌دهندهٔ مشتق عمودی و افقی نسبت به التصاق بروالد است. واضح است که در منیفلدهای ریمانی $\chi_i = 0$.

انحنای $H := H_{ij}dx^i dx^j$ را نیز می‌توان با کمک ضرایب اسپری ژئودوزیک روی کلاف مماس TM بدین‌صورت تعریف کرد [۹]:

$$2H_{ij} = y^m\frac{\partial^4 G^k}{\partial y^i\partial y^j\partial y^k\partial x^m} - 2G^m\frac{\partial^4 G^k}{\partial y^i\partial y^j\partial y^k\partial y^m} - \frac{\partial G^m}{\partial y^i}\frac{\partial^3 G^k}{\partial y^j\partial y^k\partial y^m} - \frac{\partial G^m}{\partial y^j}\frac{\partial^3 G^k}{\partial y^i\partial y^k\partial y^m}$$

می‌توان نشان داد که این کمیت به‌کمک انحنای χ نیز بدین‌شرح بیان می‌شود [۱۰]:

فرض کنید $F = \frac{\alpha^2}{\beta}$ یک متر کروپینا روی منیفلد M باشد. آن‌گاه با استفاده از رابطهٔ (۲) ضرایب اسپری آن بدین‌صورت است:

$$G^i = G^i{}_\alpha - \frac{\alpha^2}{2\beta}s^i{}_0 + \frac{1}{2b^2}\left(\frac{\alpha^2}{\beta}s_0 + r_{00}\right)b^i - \frac{1}{b^2}\left(s_0 + \frac{\beta}{\alpha^2}r_{00}\right)y^i,$$

که در آن $G^i{}_\alpha$ نشان‌دهندهٔ ضرایب اسپری نسبت به متر α است. چن[1] و لیو[2] طی پژوهش‌هایی در زمینه انحناهای غیر ریمانی متر کروپینا، انحنای χ این متر را محاسبه کردند [۱۰].

قضیه. فرض کنید $F = \frac{\alpha^2}{\beta}$ یک متر کروپینا روی منیفلد M باشد، آن‌گاه انحنای χ آن بدین‌صورت قابل بیان است:

$$\chi_i = \frac{n+1}{b^2}\left\{\frac{2(r_i+s_i)}{b^2}\left(r_0 - \frac{\beta}{\alpha^2}r_{00}\right) - \frac{2(r_0+s_0)}{b^2}\left(r_i + \frac{2\beta y_i - b_i\alpha^2}{\alpha^4}r_{00} - \frac{2\beta}{\alpha^2}r_{i0}\right) + r_{i|0} - r_{0|i} + \right.$$
$$2\beta yi{-}bi\alpha 2\alpha 4r00|0{-}4rp0Kp{-}\beta\alpha 22ri0|0{-}4ripKp{-}r00|i, \quad (۳)$$

1. G. Chen
2. L. Liu

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.14.5]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.295]

که در آن $K^p := -\frac{\alpha^2}{2\beta}s^p{}_0 + \frac{1}{2b^2}\left(\frac{\alpha^2}{\beta}s_0 + r_{00}\right)b^i - \frac{1}{b^2}(s_0 + \frac{\beta}{\alpha^2}r_{00})y^i$ و " ; " نشان‌دهندهٔ مشتق نسبت به التصاق لوی چویتا متر α است.

هم‌چنین انحنای H این متر با استفاده از مشتقات عمودی انحنای χ بدین‌صورت محاسبه شده است:

قضیه. فرض کنید $F = \frac{\alpha^2}{\beta}$ یک متر کروپینا روی منیفلد M باشد، آن‌گاه انحنای H آن بدین‌صورت بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}
H_{ij} = {} & \frac{n+1}{2b^2}\Big\{-\frac{4(r_0+s_0)}{b^2}\Big[\frac{2\beta y_i - b_i\alpha^2}{\alpha^4}r_{j0} + \frac{2\beta y_j - b_j\alpha^2}{\alpha^4}r_{i0} - \frac{2\beta}{\alpha^2}r_{ij} + \Big(\frac{b_iy_j + b_jy_i + \beta a_{ij}}{\alpha^4} - \frac{4\beta y_iy_j}{\alpha^6}\Big)r_{00}\Big] + \\
& 2\Big(\frac{b_iy_j + b_jy_i + \beta a_{ij}}{\alpha^4} - \frac{4\beta y_iy_j}{\alpha^6}\Big)\big(r_{00|0} - 4r_{p0}K^p\big) + \frac{2\beta y_i - b_i\alpha^2}{\alpha^4}\Big[2r_{j0|0} - \frac{2}{b^2}\Big(\frac{\alpha^2}{\beta}s_0 + r_{00}\Big)r_j + \\
& \frac{2\beta y_j - b_j\alpha^2}{\beta^2}r_{p0}s^p{}_0 + \frac{6}{b^2}\Big(s_0 + \frac{\beta}{\alpha^2}r_{00}\Big)r_{j0} - \frac{r_0}{b^2}\Big(r_{j0} + \frac{2\beta y_j - b_j\alpha^2}{\alpha^4}s_0 - \frac{\alpha^2}{\beta}s_j\Big) + \frac{\alpha^2}{\beta}\big(r_{p0}s^p{}_j + \\
& r_{pj}s^p{}_0\big) + \frac{2}{b^2}\Big(s_j - \frac{2\beta y_j - b_j\alpha^2}{\alpha^4}r_{00} + \frac{2\beta}{\alpha^2}r_{j0}\Big)r_{00}\Big] + \frac{2\beta y_j - b_j\alpha^2}{\alpha^4}\Big[2r_{i0|0} - \frac{2}{b^2}\Big(\frac{\alpha^2}{\beta}s_0 + r_{00}\Big)r_i + \\
& \frac{2\beta y_i - b_i\alpha^2}{\beta^2}r_{p0}s^p{}_0 + \frac{6}{b^2}\Big(s_0 + \frac{\beta}{\alpha^2}r_{00}\Big)r_{i0} - \frac{r_0}{b^2}\Big(r_{i0} + \frac{2\beta y_i - b_i\alpha^2}{\alpha^4}s_0 - \frac{\alpha^2}{\beta}s_i\Big) + \frac{\alpha^2}{\beta}\big(r_{p0}s^p{}_i + \\
& r_{pi}s^p{}_0\big) + \frac{2}{b^2}\Big(s_i - \frac{2\beta y_i - b_i\alpha^2}{\alpha^4}r_{00} + \frac{2\beta}{\alpha^2}r_{i0}\Big)r_{00}b\Big] - \frac{2\beta}{\alpha^2}\Big[r_{ij|0} + \frac{2}{b^2}\Big(s_0 + \frac{\beta}{\alpha^2}r_{00}\Big)r_{ij}\Big] - \\
& \big(r_{ip}s^p{}_j + r_{jp}s^p{}_i\big) - \frac{\beta}{\alpha^2}\Big[-\frac{1}{b^2}\Big(2r_{j0} + \frac{2\beta y_j - b_j\alpha^2}{\beta^2}s_0 + \frac{\alpha^2}{\beta}s_j\Big)r_i - \frac{1}{b^2}\Big(2r_{i0} + \frac{2\beta y_i - b_i\alpha^2}{\beta^2}s_0 + \\
& \frac{\alpha^2}{\beta}s_i\Big)r_j + \frac{2}{b^2}\Big(s_j + \frac{b_j\alpha^2 - 2\beta y_j}{\alpha^4}r_{00} + \frac{2\beta}{\alpha^2}r_{j0}b\Big)r_{i0} + \frac{2}{b^2}\Big(s_i + \frac{b_i\alpha^2 - 2\beta y_i}{\alpha^4}r_{00} + \frac{2\beta}{\alpha^2}r_{i0}b\Big)r_{j0}\Big]\Big\}, \qquad (۴)
\end{aligned}$$

کـــه در آن $K^p := -\frac{\alpha^2}{2\beta}s^p{}_0 + \frac{1}{2b^2}\left(\frac{\alpha^2}{\beta}s_0 + r_{00}\right)b^i - \frac{1}{b^2}(s_0 + \frac{\beta}{\alpha^2}r_{00})y^i$ و $b := \| \beta_x \|_\alpha = \sqrt{a^{ij}b_ib_j}$

(برای جزییات بیش‌تر به [۱۱] رجوع شود) .

اگر دو متر فینسلری $\bar{F}$ و F به طور همدیس مرتبط باشند آن‌گاه $\bar{F} = e^\sigma F$ و می‌توان گفت:

$$\bar{\alpha} = e^\sigma\alpha, \qquad \bar{\beta} = e^\sigma\beta,$$

که در آن $\bar{\alpha} = \sqrt{\overline{a_{ij}}y^iy^j}$ و $\bar{\beta} = \overline{b_i}(x)y^i$. به‌سادگی می‌توان نشان داد که

$$\overline{a_{ij}} = e^{2\sigma(x)}a_{ij}, \qquad \overline{a^{ij}} = e^{2\sigma(x)}a^{ij}, \qquad \overline{b_i} = e^{\sigma(x)}b_i, \qquad \overline{b^i} = e^{-\sigma(x)}b^i, \qquad \bar{b}^2 = b^2.$$

و هم‌چنین

$$\bar{b}_{i\|j} = e^\sigma\big(b_{i|j} - b_j\sigma_i + fa_{ij}\big),$$

که $\bar{b}_{i\|j}$ نشان‌دهندهٔ مشتق کوواریان $\bar{b}_i$ نسبت به $\bar{\alpha}$ و $f := b^m\sigma_m$ است، $\sigma_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\sigma$ و

$$\bar{r}_{ij} = e^\sigma\left[r_{ij} - \frac{1}{2}\big(b_i\sigma_j + b_j\sigma_i\big) + fa_{ij}\right]. \qquad (۵)$$

$$\bar{s}_{ij} = e^\sigma\left[s_{ij} + \frac{1}{2}\big(b_i\sigma_j - b_j\sigma_i\big)\right], \qquad (۶)$$

در این حالت رابطهٔ بین ضرایب اسپری $\bar{G}^i$ و G^i بدین‌صورت است:

$$\bar{G}^i = G^i + \sigma_0y^i - \frac{1}{2}F^2\sigma^i,$$

که $\sigma^i = g^{ij}\sigma_j$ و $\sigma_0 = \sigma_iy^i$، اگر $\bar{G}^i{}_j = \frac{\partial}{\partial y^j}\bar{G}^i$ و $\bar{G}^i{}_{jk} = \frac{\partial}{\partial y^k}\bar{G}^i{}_j = \frac{\partial^2}{\partial y^j\partial y^k}\bar{G}^i$ آن‌گاه بـا مشـتق‌گیـری از رابطهٔ مذکور می‌توان این روابط را به‌دست آورد:

$$\begin{aligned}
\bar{G}^i{}_j &= G^i{}_j + \sigma_jy^i + \sigma_0\delta^i{}_j - y_j\sigma^i, \\
\bar{G}^i{}_{jk} &= G^i{}_{jk} + \sigma_j\delta^i{}_k + \sigma_k\delta^i{}_j - g_{jk}\sigma^i. \qquad (۷)
\end{aligned}$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.14.5]

[DOI: 10.52547/mmr.6.2.295]

اثبات قضایا

در ادامه برای اثبات قضیه‌های ۱ و ۲، ضروری است تبدیل همدیس چند کمیت مورد نیاز بررسی شود.

لم. فرض کنید $\bar{F}$ و F دو (α,β)-متر به‌طور همدیس مرتبط باشند یعنی $\bar{F}=e^{\sigma}F$، آن‌گاه:

$$\bar{r}_i = r_i - \frac{1}{2}(b_i f + b^2\sigma_i) + f b_i, \tag{۸}$$

$$\bar{r}_0 = r_0 - \frac{1}{2}(\beta f + b^2\sigma_0) + f\beta, \tag{۹}$$

$$\bar{r}_{00} = r_{00} - \beta\sigma_0 + \alpha^2 f, \tag{۱۰}$$

$$\bar{r}_{i0} = r_{i0} - \frac{1}{2}(\beta\sigma_i + b_i\sigma_0) + f y_i, \tag{۱۱}$$

$$\bar{s}_i = s_i + \frac{1}{2}(b^2\sigma_i - f b_i), \tag{۱۲}$$

$$\bar{s}_0 = s_0 + \frac{1}{2}(b^2\sigma_0 - f\beta), \tag{۱۳}$$

$$\bar{s}^m{}_0 = e^{-\sigma}\left[s^m{}_0 + \frac{1}{2}(b^m\sigma_0 - \beta\sigma^m)\right], \tag{۱۴}$$

$$\bar{r}_{ij\|k} = e^{\sigma}\left[r_{ij|k} - \frac{1}{2}\left(b_i\sigma_j + b_j\sigma_i\right)_{|k} + f_{|k}a_{ij} - \sigma_k r_{ij} - \sigma_i r_{kj} - \sigma_j r_{ik} - f\sigma_k a_{ij} - \frac{1}{2}\left(f\sigma_j a_{ik} + f\sigma_i a_{jk} + \right.\right.$$
$$aikbj\sigma m\sigma m + ajkbi\sigma m\sigma m + \sigma k\sigma jbi + \sigma k\sigma ibj + \sigma i\sigma jbk + aikrmj\sigma m + ajkrmi\sigma m, \tag{۱۵}$$

$$\bar{r}_{00\|0} = e^{\sigma}[r_{00|0} - r_{00}\sigma_0 - \beta\sigma_{0|0} + \alpha^2(r^m{}_0 + s^m{}_0)\sigma_m + \alpha^2 b^m\sigma_{m|0} - 3\sigma_0 r_{00} + 3{\sigma_0}^2\beta -$$
$$2f\sigma 0\alpha 2 + 2\alpha 2rm0\sigma m - \alpha 2\beta\sigma m\sigma m, \tag{۱۶}$$

$$\bar{r}_{i0\|0} = e^{\sigma}\left[r_{i0|0} - \frac{1}{2}(b_i\sigma_0 + \beta\sigma_i)_{|0} + f_{|0}y_i - 2\sigma_0 r_{i0} - \frac{3}{2}\sigma_i r_{00} + {\sigma_0}^2 b_i + 2\sigma_0\sigma_i\beta - \frac{3}{2}f\sigma_0 y_i - \right.$$
$$12\alpha 2f\sigma i + 2rim\sigma m - bi\sigma m\sigma m - 12yi\beta\sigma m\sigma m + yirm0\sigma m \tag{۱۷}$$

$$\bar{r}_{0\|i} = r_{0|i} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\beta b^m\sigma_{m|0} - b^2\sigma_{0|i} + \beta(r^m{}_i + s^m{}_i)\sigma_m + f(r_{i0} + s_{0i}) - b^2 y_i\sigma_m\sigma^m - \\ f(b_i\sigma_0 + \beta\sigma_i) + f^2 y_i\end{bmatrix} -$$
$$(r_i + s_i)\sigma_0 + b^2\sigma_i\sigma_0, \tag{۱۸}$$

$$\bar{r}_{i\|0} = r_{i|0} + \frac{1}{2}[b_i b^m\sigma_{m|0} - b^2\sigma_{i|0} + b_i(r^m{}_0 + s^m{}_0)\sigma_m + f(r_{i0} + s_{i0}) - b^2 y_i\sigma_m\sigma^m -$$
$$fbi\sigma 0 + \beta\sigma i + f2yi - r0 + s0\sigma i + b2\sigma i\sigma 0. \tag{۱۹}$$

اثبات: تمام روابط موجود در این لم با محاسبات مستقیم به‌دست می‌آید. به‌عنوان مثال واضح است که $\bar{r}_i = \bar{r}_{ij}\bar{b}^j$، با استفاده از رابطهٔ (۵) می‌توان نوشت:

$$\bar{r}_i = e^{\sigma}\left[r_{ij} - \frac{1}{2}\left(b_i\sigma_j + b_j\sigma_i\right) + f a_{ij}\right]e^{-\sigma(x)}b^j,$$

که با ساده‌سازی لازم رابطهٔ (۸) به‌دست می‌آید. طبق تعریف مشتق افقی می‌توان نوشت:

$$\bar{r}_{ij\|k} = \frac{\partial}{\partial x^k}\bar{r}_{ij} - \bar{r}_{mj}\bar{G}^m{}_{ik} - \bar{r}_{im}\bar{G}^m{}_{jk}.$$

با جای‌گذاری (۵) و (۷) در رابطهٔ مذکور این تساوی به‌دست می‌آید:

$$\bar{r}_{ij\|k} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(e^{\sigma}\left[r_{ij} - \frac{1}{2}\left(b_i\sigma_j + b_j\sigma_i\right) + f a_{ij}\right]\right)$$
$$-\left(e^{\sigma}\left[r_{mj} - \frac{1}{2}\left(b_m\sigma_j + b_j\sigma_m\right) + f a_{mj}\right]\right)\left(G^m{}_{ik} + \sigma_i\delta^m{}_k + \sigma_k\delta^m{}_i - g_{ik}\sigma^m\right)$$
$$-\left(e^{\sigma}\left[r_{im} - \frac{1}{2}\left(b_i\sigma_m + b_m\sigma_i\right) + f a_{im}\right]\right)\left(G^m{}_{jk} + \sigma_j\delta^m{}_k + \sigma_k\delta^m{}_j - g_{jk}\sigma^m\right),$$

با ساده کردن این رابطه و توجه به این‌که $r_{ij|k} = \frac{\partial}{\partial x^k}r_{ij} - r_{mj}G^m{}_{ik} - r_{im}G^m{}_{jk}$ رابطهٔ (۱۵) به‌دست می‌آید..

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.14.5]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.295]

اثبات قضیۀ ۱. واضح است که اگر $\bar{F}$ یک متر کروپینا روی منیفلد n-بعدی M باشد آن‌گاه انحنای $\bar{\chi}$ آن بدین‌صورت است:

$$\bar{\chi}_i = \frac{n+1}{b^2}\Bigg\{\frac{2(\bar{r}_i+\bar{s}_i)}{b^2}\left(\bar{r}_0 - \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}^2}\bar{r}_{00}\right) - \frac{2(\bar{r}_0+\bar{s}_0)}{b^2}\left(\bar{r}_i + \frac{2\bar{\beta}y_i - \bar{b}_i\bar{\alpha}^2}{\bar{\alpha}^4}r_{00} - \frac{2\bar{\beta}}{\bar{\alpha}^2}\bar{r}_{i0}\right) + \bar{r}_{i\|0} - \bar{r}_{0\|i} + \frac{2\bar{\beta}y_i - \bar{b}_i\bar{\alpha}^2}{\bar{\alpha}^4}\left(\bar{r}_{00\|0} - 4\bar{r}_{p0}\bar{K}^p\right) - \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}^2}\left(2\bar{r}_{i0\|0} - 4\bar{r}_{ip}\bar{K}^p - \bar{r}_{00\|i}\right)\Bigg\},$$

که در آن $\bar{K}^p := -\frac{\bar{\alpha}^2}{2\bar{\beta}}\bar{s}^p{}_0 + \frac{1}{2b^2}\left(\frac{\bar{\alpha}^2}{\bar{\beta}}\bar{s}_0 + \bar{r}_{00}\right)\bar{b}^i - \frac{1}{b^2}(\bar{s}_0 + \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}^2}\bar{r}_{00})y^i$. با قرار دادن روابط (۸)-(۱۹) در عبارت مذکور، رابطۀ (۲۰) به‌دست می‌آید:

$$\bar{\chi}_i = \chi_i + \frac{(n+1)}{2\beta b^4\alpha^6}A_i, \tag{۲۰}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
A_i &:= A_{2i}\alpha^6 + A_{4i}\alpha^4 + A_{6i}\alpha^2 + A_{8i},\\
A_{2i} &= \beta\big(-2b^2\beta b_i\sigma_m\sigma^m + 7b^2\beta r_{im}\sigma^m + b^2\beta b_m\sigma_{m|i} + b^2\beta\sigma_m s^m{}_i - 2b_i\beta f^2 - 2f\beta s_i\\
&\quad - b^2 b_i b^m\sigma_{m|0} + 3b^2 b_i\sigma_m s^m{}_0 - 2b^2 f s_{i0} - 3b^2 b_i\sigma_m r^m{}_0 + 4b_i f r_0 - 2b_i f s_0\\
&\quad + b^4\sigma_{0|i} - b^4\sigma_{i|0}\big),\\
A_{4i} &= -2\beta\big(2b^2 y_i\sigma_0 s_0 - 2b_i\beta\sigma_0 s_0 - \beta b^2 r_{00}\sigma_i + 4\beta b_i f r_{00} + 6\beta b_i r_0\sigma_0 + 2\beta f r_0 y_i\\
&\quad - 2\beta b^2 s_{i0}\sigma_0 - 2\beta b^2 b_i\sigma_{0|0} - 2\beta y_i f s_0 - 5\beta^2 b_i f\sigma_0 + 2b_i r_{00}s_0 - y_i b^4\sigma_0{}^2\\
&\quad - 2b_i r_{00}s_0 + 2\beta^2 f r_{i0} - \beta^2 f^2 y_i + 2\beta^2\sigma_i r_0 - 2\beta^2\sigma_0 s_i - \beta^3 f\sigma_i - b^2\beta^2\sigma_{i|0}\\
&\quad + b^2\beta^2\sigma_{0|i} + 2b^2\beta y_i s_{m0}\sigma^m - 4b^2\beta y_i r_{m0}\sigma^m + 2b^2\beta^2 y_i\sigma_m\sigma^m - 2b^2 y_i s_0\sigma_0\\
&\quad - b^2 b_i r_{00}\sigma_0 + 2b^2\beta y_i s_{m0}\sigma^m + 2b^2 y_i r_0\sigma_0\big),\\
A_{6i} &= -4\beta^2\big(b^2\beta y_i\sigma_{0|0} + b^2 r_{00}y_i\sigma_0 + 3b_i\beta^2\sigma_0{}^2 + \beta^3\sigma_i\sigma_0 + 3\beta^2 f y_i\sigma_0 - 5b_i\beta r_{00}\sigma_0\\
&\quad - 2\beta^2 r_{i0}\sigma_0 - \beta^2 r_{00}\sigma_i - 3\beta f r_{00}y_i - 4\beta r_0 y_i\sigma_0 + 2\beta y_i\sigma_0 s_0\big),\\
A_{8i} &= 16\beta^4\sigma_0 y^i\big(\beta\sigma_0 - 2r_{00}\big).
\end{aligned} \tag{۲۱}$$

اگر انحنای χ تحت تبدیل همدیس پایا بماند، آن‌گاه $\bar{\chi}_i = \chi_i$ و طبق (۲۰)، این امر در صورتی ممکن است که $A_i = 0$، با فاکتورگیری از α^2 رابطه A_i را می‌توان به‌صورت (۲۲) نوشت:

$$(A_{2i}\alpha^4 + A_{4i}\alpha^2 + A_{6i})\alpha^2 + A_{8i} = 0 \tag{۲۲}$$

رابطۀ (۲۲) نشان می‌دهد که عبارت A_{8i} باید ضریبی از α^2 باشد، اما با توجه به (۲۱) واضح است که $\beta^4\sigma_0 y^i$ چند جمله‌ای خطی برحسب y و فاقد α^2 است در نتیجه تابع اسکالری مانند $c(x)$ روی M وجود دارد به‌طوری‌که

$$\beta\sigma_0 - 2r_{00} = c(x)\alpha^2.$$

اثبات قضیۀ ۲. اگر $\bar{F}$ یک متر کروپینا روی منیفلد n-بعدی M باشد آن‌گاه با توجه به (۴) انحنای $\bar{H}$ آن بدین‌صورت است:

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.14.5]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.295]

$$
\begin{aligned}
\bar{H}_{ij} = \frac{n+1}{2\bar{b}^2}\Bigg\{&-\frac{4(\bar{r}_0+\bar{s}_0)}{\bar{b}^2}\Bigg[\frac{2\bar{\beta}\mathrm{y}_i-\bar{b}_i\bar{\alpha}^2}{\bar{\alpha}^4}\bar{r}_{j0}+\frac{2\bar{\beta}\mathrm{y}_j-\bar{b}_j\bar{\alpha}^2}{\bar{\alpha}^4}\bar{r}_{i0}-\frac{2\bar{\beta}}{\bar{\alpha}^2}\bar{r}_{ij}\\
&+\left(\frac{\bar{b}_i\mathrm{y}_j+\bar{b}_j\mathrm{y}_i+\bar{\beta}\bar{a}_{ij}}{\bar{\alpha}^4}-\frac{4\bar{\beta}\mathrm{y}_i\mathrm{y}_j}{\bar{\alpha}^6}\right)\bar{r}_{00}\Bigg]\\
&+2\left(\frac{\bar{b}_i\mathrm{y}_j+\bar{b}_j\mathrm{y}_i+\bar{\beta}\bar{a}_{ij}}{\bar{\alpha}^4}-\frac{4\bar{\beta}\mathrm{y}_i\mathrm{y}_j}{\bar{\alpha}^6}\right)\left(\bar{r}_{00\|0}-4\bar{r}_{p0}\bar{K}^p\right)\\
&+\frac{2\bar{\beta}\mathrm{y}_i-\bar{b}_i\bar{\alpha}^2}{\bar{\alpha}^4}\Bigg[2\bar{r}_{j0\|0}-\frac{2}{\bar{b}^2}\left(\frac{\bar{\alpha}^2}{\bar{\beta}}\bar{s}_0+\bar{r}_{00}\right)\bar{r}_j+\frac{2\bar{\beta}\mathrm{y}_j-\bar{b}_j\bar{\alpha}^2}{\bar{\beta}^2}\bar{r}_{p0}\bar{s}^p{}_0\\
&+\frac{6}{\bar{b}^2}\left(\bar{s}_0+\frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}^2}\bar{r}_{00}\right)\bar{r}_{j0}-\frac{\bar{r}_0}{\bar{b}^2}\left(\bar{r}_{j0}+\frac{2\bar{\beta}\mathrm{y}_j-\bar{b}_j\bar{\alpha}^2}{\bar{\alpha}^4}\bar{s}_0-\frac{\bar{\alpha}^2}{\bar{\beta}}\bar{s}_j\right)\\
&+\frac{\bar{\alpha}^2}{\bar{\beta}}\left(\bar{r}_{p0}\bar{s}^p{}_j+\bar{r}_{pj}\bar{s}^p{}_0\right)+\frac{2}{\bar{b}^2}\left(\bar{s}_j-\frac{2\bar{\beta}\mathrm{y}_j-\bar{b}_j\bar{\alpha}^2}{\bar{\alpha}^4}\bar{r}_{00}+\frac{2\bar{\beta}}{\bar{\alpha}^2}\bar{r}_{j0}\right)\bar{r}_{00}\Bigg]\\
&+\frac{2\bar{\beta}\mathrm{y}_j-\bar{b}_j\bar{\alpha}^2}{\bar{\alpha}^4}\Bigg[2\bar{r}_{i0\|0}-\frac{2}{\bar{b}^2}\left(\frac{\bar{\alpha}^2}{\bar{\beta}}\bar{s}_0+\bar{r}_{00}\right)\bar{r}_i+\frac{2\bar{\beta}\mathrm{y}_i-\bar{b}_i\bar{\alpha}^2}{\bar{\beta}^2}\bar{r}_{p0}\bar{s}^p{}_0\\
&+\frac{6}{\bar{b}^2}\left(\bar{s}_0+\frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}^2}\bar{r}_{00}\right)\bar{r}_{i0}-\frac{\bar{r}_0}{\bar{b}^2}\left(\bar{r}_{i0}+\frac{2\bar{\beta}\mathrm{y}_i-\bar{b}_i\bar{\alpha}^2}{\bar{\alpha}^4}\bar{s}_0-\frac{\bar{\alpha}^2}{\bar{\beta}}\bar{s}_i\right)\\
&+\frac{\bar{\alpha}^2}{\bar{\beta}}\left(\bar{r}_{p0}\bar{s}^p{}_i+\bar{r}_{pi}\bar{s}^p{}_0\right)+\frac{2}{\bar{b}^2}\left(\bar{s}_i-\frac{2\bar{\beta}\mathrm{y}_i-\bar{b}_i\bar{\alpha}^2}{\bar{\alpha}^4}\bar{r}_{00}+\frac{2\bar{\beta}}{\bar{\alpha}^2}\bar{r}_{i0}\right)\bar{r}_{00}\bar{b}\Bigg]\\
&-\frac{2\bar{\beta}}{\bar{\alpha}^2}\left[\bar{r}_{ij\|0}+\frac{2}{\bar{b}^2}\left(\bar{s}_0+\frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}^2}r_{00}\right)\bar{r}_{ij}\right]-\left(\bar{r}_{ip}\bar{s}^p{}_j+\bar{r}_{jp}\bar{s}^p{}_i\right)\\
&-\frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}^2}\Bigg[-\frac{1}{\bar{b}^2}\left(2\bar{r}_{j0}+\frac{2\bar{\beta}\mathrm{y}_j-\bar{b}_j\bar{\alpha}^2}{\bar{\beta}^2}\bar{s}_0+\frac{\bar{\alpha}^2}{\bar{\beta}}\bar{s}_j\right)\bar{r}_i\\
&+\frac{2}{\bar{b}^2}\left(\bar{s}_j+\frac{\bar{b}_j\bar{\alpha}^2-2\bar{\beta}\mathrm{y}_j}{\bar{\alpha}^4}\bar{r}_{00}+\frac{2\bar{\beta}}{\bar{\alpha}^2}\bar{r}_{j0}\bar{b}\right)\bar{r}_{i0}\\
&-\frac{1}{\bar{b}^2}\left(2\bar{r}_{i0}+\frac{2\bar{\beta}\mathrm{y}_i-\bar{b}_i\bar{\alpha}^2}{\bar{\beta}^2}\bar{s}_0+\frac{\bar{\alpha}^2}{\bar{\beta}}\bar{s}_i\right)\bar{r}_j\\
&+\frac{2}{\bar{b}^2}\left(\bar{s}_i+\frac{\bar{b}_i\bar{\alpha}^2-2\bar{\beta}\mathrm{y}_i}{\bar{\alpha}^4}\bar{r}_{00}+\frac{2\bar{\beta}}{\bar{\alpha}^2}\bar{r}_{i0}\bar{b}\right)\bar{r}_{j0}\Bigg]\Bigg\},
\end{aligned}
$$

که در آن $\bar{K}^p := -\frac{\bar{\alpha}^2}{2\bar{\beta}}\bar{s}^p{}_0+\frac{1}{2b^2}\left(\frac{\bar{\alpha}^2}{\bar{\beta}}\bar{s}_0+\bar{r}_{00}\right)\bar{b}^i-\frac{1}{b^2}(\bar{s}_0+\frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}^2}\bar{r}_{00})y^i$. با وارد کردن روابط (۵)، (۶) و (۸)- (۱۹) در تساوی مذکور، رابطهٔ بین انحنای H دو متر به‌طور همدیس مرتبط $\bar{F}$ و F به‌صورت (۲۳) است:

$$\bar{H}_{ij} = H_{ij}+\frac{(n+1)}{8\beta^2b^4\alpha^8}B_{ij}, \tag{۲۳}$$

که در آن

$$B_{ij} := B_{2ij}\alpha^8+B_{4ij}\alpha^6+B_{6ij}\alpha^4+B_{8ij}\alpha^2+B_{10ij}, \tag{۲۴}$$

$$
\begin{aligned}
B_{2ij} = \beta^2\big(&-4fb_is_j-4fb_js_i+12\sigma^mb^2b_jr_{im}+12\sigma^mb^2b_ir_{jm}-12\sigma^mb^2b_ib_j\sigma_m+4\sigma^mb^2b_js_{mi}\\
&+4\sigma^mb^2b_is_{mj}+4fb_ir_j+4fb_jr_i-4f^2b_ib_j\big)\\
&+\beta\big(-2b^4b_j\sigma_i\sigma_0+2b^2b_jr_i\sigma_0-2b^2b_j\sigma_is_0+2b^2b_j\sigma_ir_0-2b^2b_j\sigma_0s_i-2b^4b_i\sigma_j\sigma_0\\
&+2b^2b_ir_j\sigma_0+2b^2b_ir_0\sigma_j-2b^2b_is_j\sigma_0-4b_is_jr_0+4b_jr_js_0-4b_ir_js_0-4b_js_ir_0\\
&-4b_jr_is_0+4b_is_jr_0+4b_js_ir_0+4b_ir_js_0+2b^4b_i\sigma_j\sigma_0+2b^4b_j\sigma_i\sigma_0-2b^2b_i\sigma_js_0\\
&-2b^2b_jr_i\sigma_0-2b^2b_j\sigma_ir_0+2b^2b_i\sigma_js_0+2b^2b_i\sigma_0s_j-2b^2b_ir_j\sigma_0-2b^2b_i\sigma_jr_0\\
&+2b^2b_j\sigma_is_0+2b^2b_j\sigma_0s_i\big),
\end{aligned}
$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.14.5]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.295]

$$B_{4ij} = \beta^4\big(-4a_{ij}b^2\sigma^m\sigma_m + 8b^2\sigma_i\sigma_j + 12a_{ij}f^2 + 12fb_i\sigma_j + 12fb_j\sigma_i - 4r_i\sigma_j - 4r_j\sigma_i + 4s_i\sigma_j + 4s_j\sigma_i\big) + \beta^3\big(-2fb^2y_i\sigma_j + 2fb^2y_j\sigma_i + 8b^2b_iy_j\sigma^m\sigma_m + 8b^2b_jy_i\sigma^m\sigma_m - 28b_i\sigma_jr_0 - 28b_j\sigma_ir_0 + 4f^2b_iy_j - 4fy_ir_j + 4f^2b_jy_i - 24fr_{j0}b_i + 4b^2b_i\sigma_{j|0} + 8fa_{ij}r_0 - 8b^2\sigma_jr_{i0} - 12b_i\sigma_0r_j - 12b_j\sigma_0r_i - 24fr_{i0}b_j + 4b^2b_j\sigma_{i|0} - 8b^2\sigma_ir_{j0} - 20b^2\sigma^mr_{im}y_j - 20b^2\sigma^mr_{jm}y_i + 16a_{ij}b^2\sigma^mr_{0m} + 4b^2b_j\sigma_i\sigma_0 - 4fb^2y_j\sigma_i - 4fb^2y_i\sigma_j - 4b^2\sigma^ms_{mi}y_j - 4b^2\sigma^ms_{mj}y_i + 40fb_j\sigma_0b_i + 4b^2b_i\sigma_j\sigma_0 + 8a_{ij}b^2b^m\sigma_{m|0} - 12b_j\sigma_is_0 - 12b_i\sigma_0s_j - 12b_i\sigma_js_0 - 4fr_iy_j + 40fa_{ij}s_0 + 4fs_iy_j + 4fs_jy_i + 12b_j\sigma_0s_i\big) + \beta^2\big(-8y_ir_js_0 + 4fb_iy_js_0 + 4b^2y_i\sigma_js_0 + 16a_{ij}r_0s_0 + 8b_ir_{j0}s_0 + 8b_ir_{00}s_j + 8b_jr_{io}s_0 + 8b_jr_{00}s_i + 8r_is_0y_j + 8r_js_0y_i + 8r_0s_iy_j + 8r_0s_jy_i + 4b^2\sigma_iy_js_0 + 4b^2\sigma_0y_js_i + 8b_jb_i\sigma_0s_0 + 4fb_jy_is_0 + 4b^2s_jy_i\sigma_0 + 4b_iy_jb^2\sigma^mr_{0m} + 4b_jy_ib^2\sigma^mr_{0m} + 4b^2b_j\sigma_ir_{00} + 4b^2b_j\sigma_0s_{i0} + 4b^4y_j\sigma_0\sigma_i - 4b^2y_j\sigma_0r_i - 4b^2y_j\sigma_ir_0 + 4b^2b_i\sigma_0s_{j0} - 4b^2y_i\sigma_0r_j - 4b^2y_i\sigma_jr_0 - 16fb_ib_jr_{00} - 4fb_iy_jr_0 - 4fb_jy_ir_0 - 24b_jb_i\sigma_0r_0 + 4b^2b_j\sigma_0r_{i0} + 8b^2b_ib_j\sigma_{0|0} + 4b^2b_i\sigma_0r_{j0} + 4b^2b_i\sigma_jr_{00} - 4b^4\sigma_i\sigma_0y_j - 4b^2y_i\sigma_js_0 - 4b^2y_i\sigma_0s_j + 8b^2y_i\sigma_0r_j + 4b^2y_i\sigma_jr_0 - 4b^2y_j\sigma_is_0 - 4b^2b_iy_j\sigma^ms_{m0} - 4b^2y_j\sigma_0s_i + 4b^2y_j\sigma_ir_0 - 4b^2b_jy_i\sigma^ms_{m0} - 8r_0y_js_i - 8r_0y_is_j - 8r_{00}s_jb_i - 8r_{00}b_js_i - 8r_iy_js_0 - 16r_0a_{ij}s_0 - 8b_ir_{j0}s_0 - 8b_jr_{i0}s_0\big),$$

$$B_{6ij} = -8b\sigma_i\sigma_j\beta^6 + \beta^2\big(-8b^2b_iy_jr_{00}\sigma_0 - 8b^2b_jy_ir_{00}\sigma_0\big) + \beta^5\big(-8bb_i\sigma_0\sigma_j - 8bb_j\sigma_0\sigma_i + 16bfy_i\sigma_j + 16bfy_j\sigma_i - 40a_{ij}f\sigma_0 + 16br_{i0}\sigma_j + 16br_{j0}\sigma_i - 24b_i\sigma_0\sigma_j - 24b_j\sigma_0\sigma_i - 32fy_i\sigma_j - 32fy_j\sigma_i\big) + \beta^4\big(-64b_ib_j{\sigma_0}^2 + 16r_jy_i\sigma_0 + 16r_iy_j\sigma_0 - 8b^2y_j\sigma_{i|0} - 8b^2y_i\sigma_{j|0} + 48b_ir_{j0}\sigma_0 + 48b_jr_{i0}\sigma_0 - 8y_is_0\sigma_j + 24y_jr_0\sigma_i - 16a_{ij}\sigma_0s_i + 24f^2y_iy_j - 16y_is_j\sigma_0 - 8b^2a_{ij}\sigma_{0|0} + 64fr_{i0}y_j + 24b_ir_{00}\sigma_j + 24b_jr_{00}\sigma_i - 8bb_ib_j{\sigma_0}^2 - 32bf^2y_iy_j + 16bb_ir_{j0}\sigma_0 + 16bb_jr_{i0}\sigma_0 - 32bfr_{i0}y_j - 32bfr_{j0}y_i - 72fy_j\sigma_0b_i - 72fy_i\sigma_0b_j + 16bb_ify_j\sigma_0 + 16bb_jfy_i\sigma_0 + 8b^2y_iy_j\sigma^m\sigma_m\big) + \beta^3\big(-16b^2b_iy_j\sigma_{0|0} - 16b^2b_jy_i\sigma_{0|0} + 40b_ifr_{00}y_j + 40b_jfr_{00}y_i + 56b_ir_0y_j\sigma_0 + 56b_jr_0y_i\sigma_0 + 16fr_0y_iy_j - 8b^2y_jr_{i0}\sigma_0 - 8b^2y_ir_{j0}\sigma_0 - 8b^2y_jr_{00}\sigma_i - 8b^2y_ir_{00}\sigma_j - 8b^2y_js_{i0}\sigma_0 - 8b^2y_is_{j0}\sigma_0 + 80b_ib_jr_{00}\sigma_0 - 8b^2a_{ij}r_{00}\sigma_0 + 8b^2y_jy_if\sigma_0 + 16b^2y_jy_i\sigma_m{s^m}_0 + 16b^2y_jy_i\sigma_m{r^m}_0 - 24b_is_0y_j\sigma_0 - 24b_js_0y_i\sigma_0 - 16y_jy_ifs_0\big),$$

$$B_{8ij} = 16\sigma_0\beta^6\big(2a_{ij}\sigma_0 + 3y_i\sigma_j + 3y_j\sigma_i\big) + 32b^2\beta^3y_iy_jr_{00}\sigma_0 + \beta^5\big(112b_iy_j{\sigma_0}^2 + 112b_jy_i{\sigma_0}^2 + 96fy_iy_j\sigma_0 - 64a_{ij}r_{00}\sigma_0 - 96y_jr_{i0}\sigma_0 - 96y_ir_{j0}\sigma_0 - 48r_{00}y_i\sigma_j - 48r_{00}y_j\sigma_i\big) + \beta^4\big(32b^2y_iy_j\sigma_{0|0} - 176b_iy_jr_{00}\sigma_0 - 176b_jy_ir_{00}\sigma_0 - 96fr_{00}y_iy_j - 128y_iy_j\sigma_0r_0 - 64y_iy_j\sigma_0s_0\big),$$

$$B_{10ij} = -192\beta^5y_iy_j\sigma_0(\beta\sigma_0 - 2r_{00}) \qquad (۲۵)$$

طبق رابطه (۲۳)، $\overline{H}_{ij} = H_{ij}$ اگر و فقط اگر $B_{ij} = 0$ ، در این صورت:

با توجه به خطی بودن عبارت $\beta^5y_iy_j\sigma_0$ ، این تساوی زمانی می تواند برقرار باشد که تابع اسکالری مانند مانند $c(x)$ روی M وجود داشته باشد به‌طوری‌که

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.14.5]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.295]

$$\beta\sigma_0 - 2r_{00} = c(x)\alpha^2. \tag{۲۶}$$

در حالت خاص اگر $r_{00} = \mu(x)\alpha^2$ (که μ تابعی اسکالر روی M اسـت)، آن‌گاه متر $F = \frac{\alpha^2}{\beta}$ از انحنـای $S = 0$ اسـت و در این حالت $\chi = H = 0$ و می‌توان (۲۶) را بدین‌صورت نوشت:

$$\beta\sigma_0 = (2\mu(x) + c(x))\alpha^2.$$

که در این‌صورت $\sigma_0 = 0$ و تبدیل همدیس یک تبدیل متجانس است.

منابع

1. Hashiguchi M., "On conformal transformations of Finsler metrics", J. Math. Kyoto Univ., 16 (1976) 25-50.
2. Vincze Cs., "On the existence of C-conformal changes of Riemann–Finsler metrics", Tsukuba J. Math., 24 (2) (2000) 419-426.
3. Bacso S., Cheng X., "Finsler conformal transformations and the curvature invariances", , Publ. Math. Debrecen, 70/1-2, (2007) 221-231.
4. Xiao-ling Z., "Conformal transformation between some Finsler Einstein spaces", Journal of East China Normal Univercity (natural science) 2.
5. Chen G., Cheng X., Zou Y., "On conformal transformation between two (α,β)-metrics", DIfferential Geometry and its Applications, 31 (2013) 300-307.
6. Shen B., "S-closed conformal transformations in Finsler geometry",Differential Geometry and its Applications, 58 (2018) 254-263.
7. Kropina V. K., "On projective two-dimensional Finsler spaces with a special metric", Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Anal.,11 (1961) 277-292.
8. Akbar Zade H., "Sur less espaces de Finsler A courbures sectionnelles constants" , Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. (5) 74 (1988) 271-322.
9. Najafi B., Tayebi A., " Finsler metrics of scalar Flag curvature and projective invariants", Balkan Journal of Geometry and Its Applications, Vol.15, No. 2 (2010) 82-91.
10. Shen Z., "On Some Non-Riemannian Quantities in Finsler Geometry", Canad. Math. Bull. 56 (2013) 184-193.
11. Chen G., Liu L.,"On Kropina metrics with non Riemannian curvature properties", diff geom.,43 (2015) 180-191.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.14.5]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.295]