

## حل عددی معادلهٔ بلک-شولز کسری به روش تقریب توابع پایه شعاعی

صدیقه شریفیان، علیرضا سهیلی

دانشگاه فردوسی مشهد، گروه ریاضی کاربردی،

عبدالساده نیسی

دانشگاه علامه طباطبایی، گروه آمار، ریاضی و کامپیوتر

پذیرش ۹۸/۰۴/۱۶

دریافت ۹۷/۰۴/۲۱

### چکیده

قیمت‌گذاری اختیارات نقش بسیار مهمی در کنترل و مدیریت ریسک دارد. بحث قیمت‌گذاری نیازمند فرآیند مدل‌سازی، روش‌های حل و اجرای مدل با داده‌های واقعی در یک بازار بررسی شده است. در این مقاله در نظر داریم یک مدل برای دارایی پایه مبتنی بر مدل‌های تصادفی کسری که نوع خاصی از رفتار تغییرات دارایی‌های تصادفی است را بیان کنیم. علاوه بر آن یک روش عددی مبتنی بر توابع پایه شعاعی ارائه می‌دهیم که جواب‌های دقیق‌تری نسبت به روش‌های بررسی شده دیگران دارد. پایداری این روش نیز بررسی می‌شود. سرانجام مدل حاصل را بر داده‌های واقعی بازار سکه با استفاده از نرم افزار متلب اجرا می‌کنیم. امید است با مطالعه این مقاله یک رویکرد جدیدی در قیمت‌گذاری مشتقات در مطالعات بازارهای آن کشور صورت گیرد.

واژه‌های کلیدی: مشتق کسری، معادله بلک شولز کسری، روش توابع پایه شعاعی.

### مقدمه

حساب دیفرانسیل کسری از قرن ۱۷ میلادی آغاز شد و بحث‌های اولیه آن به کارهای لایب نیتز، لاگرانژ، آبل و دیگران مرتبط بوده است. در دهه‌های اخیر، معادلات دیفرانسیل از مرتبهٔ کسری در حوزه‌های مختلف مانند جریان سیال، الکترومغناطیس، مهندسی و اقتصاد و مالی مورد توجه بوده است [۱]. در اوایل دهه ۱۹۷۰ بلک و شولز، مدل معروف خود را برای قیمت‌گذاری حق اختیار معرفی کردند. این مدل از مدل‌های مشهور در بازار مالی است. در زمینه مدل‌سازی مالی، مدل بلک-شولز در تعیین قیمت دارایی دارای ریسک بالا نقش مهمی را دارد [۲]. در معادلهٔ بلک-شولز محققان برآنند که ارزش حق اختیار را با روش‌های عددی یا تحلیلی به دست آوردند و یا به استخراج مدل‌های قیمت‌گذاری جدید که بازار مالی واقعی را منعکس می‌کند، بپردازند.

معادله بلک-شولز مبتنی بر مفروضه‌هایی است که این مفروضه‌ها محدودیت‌هایی را در بازار ایجاد می‌کنند. برخی از مدل‌های پیشرفته برای حذف این محدودیت‌ها، مانند مدل پرش انتشار، مدل نرخ بهره تصادفی و مدل نوسان تصادفی پیشنهاد شده است [۳]. در این پژوهش تمرکز بر وضع چنین محدودیت‌هایی نداریم. وانگ و منگ (۲۰۱۰) نشان دادند که توزیع بازده‌های قیمت سهام خاصیت وابستگی با دامنه بلند مدت را دارند که با فرضیه‌های معادله بلک و شولز کلاسیک سازگار نیست [۴]. این امر سبب شد که در این مقاله از ایده مدل سازی کسری استفاده کنیم. برای پیش برد این ایده از خصوصیات کسری بازار سهام مطرح شده به وسیلهٔ ماندلبروت (۱۹۶۳) استفاده می‌کنیم [۵]، [۶]. دانکن

(۲۰۰۰) و هو و اکسندال (۲۰۰۳) معادله بلک-شولز کسری را با جای‌گزین کردن حرکت براونی کسری به جای حرکت براونی استاندارد بهبود بخشیدند [۸]، [۷]. ویس (۲۰۰۰) و جوماریه (۲۰۱۰) معادله بلک-شولز کسری با مشتق کسری-زمان را بر قیمت‌گذاری حق اختیار ارائه دادند [۱۰]، [۹]. در سال ۲۰۰۸ فو و همکارانش برای داده‌های بانک چین نشان دادند که معادله بلک-شولز کسری از معادله بلک-شولز کلاسیک بهتر عمل کرده است. آنها از میانگین تقریبی مجذور خطا به عنوان ارزیابی برای معادلات استفاده کردند [۱۱].

معادله بلک شولز کسری برای داده‌هایی که توزیع قیمت سهام آن‌ها به دامنه بلند مدت وابسته است که داده‌های بررسی شده این مقاله هستند، جواب بهتری از مدل بلک-شولز کلاسیک ارائه می‌دهد. محققان زیادی به حل معادله بلک-شولز کسری پرداختند.

سونگ (۲۰۱۳) معادله بلک-شولز کسری زمانی را به روش تفاضل متناهی ضمنی حل کرد و نشان داد که روش‌های به کار گرفته شده، پایدار نامشروط و همگرا است [۳]. اسما علی (۲۰۱۳) با روش اختلال هموتویی به حل معادله بلک-شولز کسری پرداخت [۱۲]. کومار (۲۰۱۲) با ترکیب روش تبدیل لاپلاس و اختلال هموتویی جواب دقیق و سریعی برای معادله بلک-شولز کسری زمانی به دست آورد [۱۳]. قندهاری و رنجبر نیز (۲۰۱۴) به حل این معادله به روش ضرب لاگرانژ پرداختند [۱۴]. برایتو (۲۰۱۴) معادله بلک-شولز کسری را به روش صریح حل کرد و به بررسی همگرایی و پایداری آن پرداخت [۱۵].

در سال‌های اخیر دانشمندان سعی در ایجاد و توسعه روش‌هایی دارند که بدون نیاز به شبکه به حل معادله‌ها و تقریب جواب‌ها بپردازد. این دسته از روش‌ها به روش‌های بدون شبکه معروف شده‌اند. این روش‌ها در مسائل مختلفی مانند تقریب جواب معادلات دیفرانسیل معمولی و یا مشتقات جزئی استفاده شده است. در این مقاله قصد داریم از ترکیب روش توابع پایه شعاعی و تفاضل متناهی برای حل معادله بلک-شولز کسری استفاده کنیم. این روش به دلیل این‌که به جایگاه قرارگیری نقاط وابسته نیست روشی انعطاف‌پذیر است و در مقایسه با روش‌های دیگر در ابعاد بزرگ دارای زمان اجرای کوتاهی است.

با این توضیحات ساختار مقاله را به صورت زیر در نظر می‌گیریم. در بخش دوم مدل‌سازی معادله بلک-شولز کسری را معرفی می‌کنیم. در بخش سوم، حل عددی معادله بلک-شولز کسری را بیان می‌کنیم. در بخش چهارم، پایداری روش بررسی می‌شود، و در بخش پنجم به نتایج عددی و پیشنهاد برای کارهای آتی می‌پردازیم.

## مدل‌سازی معادله بلک شولز کسری

چنان‌که در مقدمه بیان شد، ایده مطرح شده در این مقاله مدل‌سازی بازارهای سهام با استفاده از معادلات کسری است. پس از مدل سهام کسری به معادله بلک-شولز کسری می‌رسیم. برای این منظور، فرض کنید دارایی پایه مورد نظر از فرآیند حرکت براونی زیر تبعیت می‌کند:

$$ds = \mu s dt + \sigma s W(t) (dt)^{\frac{\alpha}{2}}, \quad (1)$$

این مدل با مدل کلاسیک حرکت براونی متفاوت است. در این مدل  $W(t) (dt)^{\frac{\alpha}{2}}$  جای‌گزین حرکت براونی استاندارد  $dW$  شده است که بیان‌گر رفتار کسری حرکت براونی است. پارامتر  $\frac{\alpha}{2}$  نقش اساسی در رفتار قیمت سهام دارد. بدون پرداختن به کلیات برای رسیدن به اهداف ترسیم شده در مقدمه، فرض می‌کنیم  $0 < \alpha \leq 1$  (جوماریه (۲۰۰۸) و (۲۰۱۰) پژوهش‌های مفیدی در این زمینه دارد که می‌توان مطالب تکمیلی را در [۱۶] و [۱۰] دنبال کرد.

نظر به این که هدف اصلی مقاله، دنبال کردن مدل‌های قیمت‌گذاری حق اختیار مبتنی بر دارایی مدل شده با معادلات تصادفی کسری است، به تشریح مدل حاصل می‌پردازیم.

برای این منظور، فرض کنید  $\pi$  یک سبد مالی متشکل از یک اختیار و  $\Delta$  واحد از دارایی پایه تصادفی کسری-زمان باشد. در این صورت ارزش حق اختیار تابعی از زمان  $t$  و دارایی پایه  $s$  است یعنی  $V(s, t)$  که در آن  $V$  نسبت به  $t$  مشتق کسری مرتبه  $\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ) و نسبت به  $s$  دو بار مشتق‌پذیر است. استراتژی سبد مورد نظر به این شکل است که سبد همیشه باید ارزشی معادل

$$\Pi = V - \Delta S, \quad (2)$$

داشته باشد.  $V$  تابعی از یک متغیر تصادفی کسری و زمان است، از این‌رو، می‌توان نشان داد که دیفرانسیل  $V$  با استفاده از توسعه مدل بلک-شولز به صورت (۳) محاسبه می‌شود [۱۷]، [۱۰]:

$$dV = V_t^{(\alpha)} \frac{(dt)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \sigma s V_s W(t) (dt)^{\alpha/2} + \mu s V_s dt + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 V_{ss} (dt)^\alpha. \quad (3)$$

اکنون با توجه به مطالب مذکور تغییرات سبد مالی  $\Pi$  را محاسبه می‌کنیم:

$$d\Pi = dV - \Delta ds, \quad (4)$$

معادله (۳) را در (۴) جای‌گزین می‌کنیم:

$$d\Pi = V_t^{(\alpha)} \frac{(dt)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \mu s V_s dt + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 V_{ss} (dt)^\alpha - \Delta \mu s dt + \sigma s (V_s - \Delta) W(t) (dt)^{\alpha/2}.$$

یکی از خصوصیات سبد باید داشته باشد، نبود ریسک و فرصت آربیتراژ است. از این‌رو، باید ضریب عامل ریسک یا تصادفی، صفر شود. این وقتی رخ می‌دهد که  $\Delta = V_s$  در بازه زمانی  $(t, t + dt)$  بنابراین داریم:

$$d\Pi = V_t^{(\alpha)} \frac{(dt)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 V_{ss} (dt)^\alpha. \quad (5)$$

علاوه بر آن، سبد مالی  $\Pi$  با نرخ بهره بدون ریسک  $r$  بعد از زمان  $dt$  رشد  $r\Pi dt$  را دارد، از این‌رو، نظر به فرضیه عدم آربیتراژ داریم:

$$d\Pi = r\Pi dt. \quad (6)$$

حال با جای‌گزین کردن معادله (۵) در (۶) به دست می‌آوریم:

$$d\Pi = V_t^{(\alpha)} \frac{(dt)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 V_{ss} (dt)^\alpha = r(V - \Delta s) dt = rV dt - rV_s s dt. \\ V_t^{(\alpha)} \frac{(dt)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 V_{ss} (dt)^\alpha - rV dt + rV_s s dt = 0. \quad (7)$$

به منظور این که  $dt$  در رابطه (۷) را به  $(dt)^\alpha$  تبدیل کنیم از رابطه  $dt = \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(2-\alpha)} (dt)^\alpha$ ،  $0 < \alpha \leq 1$  بهره می‌گیریم. خوانندگان می‌توانند برای اطلاعات تکمیلی و اثبات این رابطه به [۱۶] مراجعه کنند. در این صورت خواهیم داشت:

$$V_t^{(\alpha)} \frac{(dt)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 V_{ss} (dt)^\alpha - rV \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(2-\alpha)} (dt)^\alpha + rV_s \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(2-\alpha)} (dt)^\alpha = 0. \quad (8)$$

با ضرب عبارت  $\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(dt)^\alpha}$  در معادله (۸) به دست می‌آوریم:

$$V_t^{(\alpha)} + \frac{\Gamma(1+\alpha)}{2} \sigma^2 s^2 V_{ss} - rV \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + rV_s \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} = 0, \\ 0 < s \leq \infty, t > 0, 0 < \alpha \leq 1. \quad (9)$$

معادله (۹) معادله بلک شولز کسری است.

برای حل معادله (۹) نیاز به شرایط اولیه و مرزی داریم، با توجه به نوع اختیار می‌توان شرایط اولیه و مرزی را تعریف نمود. به‌عنوان نمونه برای حق اختیار فروش شرایط بدین صورت است:

$$\begin{cases} V(s, T) = \text{Max}(s - K, 0), & 0 < s < \infty \\ V(0, t) = 0 & 0 < t < T \\ V(s, t) = s - K \exp(-r(T - t)), & s \rightarrow \infty, 0 < t < T \end{cases} \quad (10)$$

معادله (۹) همراه با شرایط (۱۰) یک مسئله مقدار اولیه و مرزی است که در آن  $t$  متغیر زمان،  $s$  قیمت سهام و پارامترهای  $K, T, r, \sigma$  به ترتیب قیمت توافقی یا اعمال، تاریخ سررسید، نرخ بهره بدون ریسک و تغییرپذیری سهام هستند. این مسئله را می‌توان به روش‌های متفاوتی حل کرد. در بخش بعد روش توابع پایه شعاعی را برای تخمین جواب انتخاب کرده‌ایم.

### حل عددی معادله بلک شولز کسری

مدل حاصل در بخش قبل، رفتار قیمت یک برگه اختیار خرید اروپایی را نشان می‌دهد. این مدل بر پایه رفتار تصادفی دارایی پایه که با مدل‌های کسری قیمت‌گذاری شده، استوار است. از این‌رو، روش حل آن دارای تفاوت‌هایی با قیمت‌گذاری مدل بلک-شولز کلاسیک است. برای این منظور، ابتدا تقریبی از مشتق کسری ارائه می‌کنیم و سپس روش توابع پایه شعاعی را برای حل اختیار می‌کنیم. در این روش لزوماً نیاز به نقاط متساوی‌فاصله نداریم و نرخ همگرایی روش می‌تواند نمایی باشد. بنابراین روش توابع پایه شعاعی می‌تواند جواب قابل قبول‌تر از سایر روش‌های عددی ارائه دهد. در ابتدا، با استفاده از تعریف مشتق کسری کاپوتو [۱۷] داریم:

$$D_t^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-\eta)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\eta) d\eta, \quad f \in C^n[a, b], n-1 < \alpha \leq n. \quad (11)$$

با اعمال این تعریف بر تابع قیمت‌گذاری  $V(s, t)$  موجود در مدل مورد نظر، به دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial^\alpha V(s, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\partial V(s, \eta)}{\partial \eta} (t-\eta)^{-\alpha} d\eta, \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (12)$$

اکنون برای رسیدن به تقریبی از جواب در نقاط گسسته سازی زمانی، فرض کنید  $T$  زمان سر رسید بوده و بازه  $[0, T]$  به  $M$  زیربازه با طول گام زمانی  $\delta t = \frac{T}{M}$  افراز شده است. با توجه به این که تابع قیمت‌گذاری در بازه زمانی پیوسته و دارای مشتقات پیوسته است، معادله (۱۲) را در گام زمانی  $t^{n+1}$  بازنویسی می‌کنیم و داریم:

$$\frac{\partial^\alpha V(s, t^{n+1})}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t^{n+1}} \frac{\partial V(s, \eta)}{\partial \eta} (t^{n+1} - \eta)^{-\alpha} d\eta, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

$$t^{n+1} = t^n + \delta t, t^n = n\delta t, n = 0, 1, \dots, M, t^0 = 0, \delta t = \frac{T}{M}$$

که در آن دستور مذکور، مشتق کسری را به انتگرال مشتق تابع  $V$  نسبت به زمان تبدیل می‌کند که می‌توان مشتق زمانی را با استفاده از تفاضلات متناهی پیش‌رو و به صورت (۱۳) به معادله‌ای تفاضلی تبدیل کرد.

$$\frac{\partial V(s, t)}{\partial t} \simeq \frac{V(s, t^{n+1}) - V(s, t^n)}{\delta t}, \quad (13)$$

در نتیجه به دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial^\alpha V(s, t^{n+1})}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t^{n+1}} \frac{\partial V(s, \eta)}{\partial \eta} (t^{n+1} - \eta)^{-\alpha} d\eta =$$

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=0}^n \frac{V^{k+1} - V^k}{\delta t} \int_{t^k}^{t^{k+1}} (t^{n+1} - \eta)^{-\alpha} d\eta, \quad (14)$$

با فرض  $b_k = (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}$  و  $V^k = V(s, t^k)$  مشتق کسری به معادلات تفاضلی (۱۵) ساده می‌شود.

$$\frac{\partial^\alpha V^{n+1}}{\partial t^\alpha} = \frac{\delta t^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=0}^n (V^{k+1} - V^k) \cdot ((n-k+1)^{1-\alpha} - (n-k)^{1-\alpha}) =$$

$$a_0 \sum_{k=0}^n b_k (V^{n-k+1} - V^{n-k}) = a_0 (V^{n+1} - V^n + \sum_{k=1}^n b_k (V^{n-k+1} - V^{n-k})), \quad (15)$$

$$a_0 = \frac{\delta t^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

با جای‌گزین معادله (۱۵) در معادله (۹) و با استفاده از روش  $\theta$  معادله (۱۶) به‌دست می‌آید. در روش  $\theta$  پس از این‌که معادله مورد نظر را در گام زمانی  $n+1$  گسسته‌سازی کردیم،  $\theta$  را در مشتق مکان با گام زمانی  $n+1$  و  $(1-\theta)$  را در مشتق مکان با گام زمانی  $n$  ضرب می‌کنیم که  $0 < \theta \leq 1$  است.

$$a_0 (V^{n+1} - V^n + \sum_{k=1}^n b_k (V^{n-k+1} - V^{n-k})) - \left( r V^{n+1} \frac{(T-(n+1)\delta t)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \right) +$$

$$rs \left( \frac{(T-(n+1)\delta t)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \right) \cdot \left( \theta \frac{\partial V^{n+1}}{\partial s} + (1-\theta) \cdot \frac{\partial V^n}{\partial s} \right) + \frac{\Gamma(1+\alpha)}{2} \sigma^2 S^2 \left( \theta \frac{\partial^2 V^{n+1}}{\partial s^2} + (1-\theta) \cdot \frac{\partial^2 V^n}{\partial s^2} \right) = 0, \quad (16)$$

معادله (۱۶) یک سیستم مرتبه دو معادلات دیفرانسیل معمولی بر حسب دارایی پایه  $S$  است که به‌ازای  $n = 0$  بدین‌صورت است.

$$\mathcal{L}(V^1) = f(V^0), \quad (17)$$

و به‌ازای  $n \geq 1$  داریم:

$$\mathcal{L}(V^{n+1}) = g(V^n), \quad (18)$$

که در آن

$$\mathcal{L} = A_1 + B \theta \frac{d}{ds} + C \theta \frac{d^2}{ds^2},$$

$$f(V^0) = A_2 + B (1-\theta) \frac{dV^0}{ds} + C (1-\theta) \frac{d^2 V^0}{ds^2}$$

$$g(V^n) = A_2 + B (1-\theta) \frac{dV^n}{ds} + C (1-\theta) \frac{d^2 V^n}{ds^2} - a_0 \left( \sum_{k=1}^{n-1} b_k (V^{n-k+1} - V^{n-k}) \right) - a_0 b_n (V^1 - V^0)$$

9

$$A_1 = a_0 - r \frac{((n+1)\delta t)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)},$$

$$A_2 = a_0,$$

$$B = rs \frac{((n+1)\delta t)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)},$$

$$C = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{2} \sigma^2 S^2.$$

$\mathcal{L}$  بیان‌گر عملگر مشتقات معمولی بوده و سیستم اخیر یک سیستم دینامیکی است که می‌توان برای حل آن از روش بدون شبکه توابع پایه شعاعی استفاده کرد. در روش توابع پایه شعاعی، تابع مجهول به‌صورت ترکیبی از توابع پایه  $\varphi$  بدین‌صورت نوشته می‌شود:

$$V^n(s) = \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \varphi(r_j), \tag{19}$$

که در آن  $\lambda_j, j = 1, 2, \dots, N$  مجهول هستند.

تابع پایه  $\varphi$  بر حسب داده‌های مسئله انتخاب می‌شود که با قرار دادن این تابع در مدل مورد نظر مجهولات  $\lambda_j, j = 1, 2, \dots, N$  به روشی که در ادامه ارائه می‌دهیم، حاصل می‌شوند. برای داشتن نرخ همگرایی از مرتبه‌ی  $n$ ، نیاز به یک تابع پایه‌ای بی‌نهایت هموار داریم که تابع گاوسین یکی از این نوع توابع پایه‌ای است. بنابراین تابع پایه شعاعی را بدین صورت فرض می‌کنیم:

$$\phi(\|s_i - s_j\|) = \phi(r_{ij}) = \exp(-(cr_{ij})^2), \quad i, j = 1, 2, 3, \dots$$

حال با قرار دادن  $r_{ij} = \|s_i - s_j\|, i, j = 1, 2, 3, \dots$  تابع قیمت‌گذاری در گام  $n+1$  به صورت (۲۰) است:

$$V^{n+1}(s_i) = \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \varphi(r_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, N. \tag{20}$$

لازم به ذکر است که پارامتر  $c$  پارامتری آزاد است و به وسیله‌ی کاربر تعیین می‌شود. چون این پارامتر روی شکل تابع تأثیر می‌گذارد به پارامتر شکل معروف است.

از معادله (۲۰) داریم:

$$[V]^{n+1} = A[\lambda]^{n+1}, \tag{21}$$

که در آن  $[\lambda]^{n+1} = [\lambda_1^{n+1}, \lambda_2^{n+1}, \dots, \lambda_N^{n+1}]^T, [V]^{n+1} = [V_1^{n+1}, V_2^{n+1}, \dots, V_N^{n+1}]^T$  و  $A$  یک ماتریس  $N \times N$  است که درایه‌های آن بر حسب توابع پایه شعاعی است.

$$A = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1j} & \dots & \varphi_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{i1} & \dots & \varphi_{ij} & \dots & \varphi_{iN} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{N1} & \dots & \varphi_{Nj} & \dots & \varphi_{NN} \end{bmatrix}.$$

با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$\frac{\partial V^n}{\partial s} = \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \frac{\partial \varphi(r_j)}{\partial s}, \quad \frac{\partial^2 V^n}{\partial s^2} = \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \frac{\partial^2 \varphi(r_j)}{\partial s^2}. \tag{22}$$

معادله‌های (۲۰) و (۲۲) را در معادله‌های (۱۷) و (۱۸)، جای‌گزین می‌کنیم. با توجه به شکل ماتریسی معادله‌های (۱۷) و (۱۸) که در ادامه ذکر شده است، در هر مرحله  $\lambda_j, j = 1, 2, \dots, N$ ، را به‌دست آورده و سپس با قرار دادن آن‌ها در معادله (۱۹)، قیمت برای اختیار به‌دست می‌آید.

$$[L]^1 = D[\lambda]^1,$$

که در آن

$$D = \begin{bmatrix} G(\varphi_{11}) & \dots & G(\varphi_{1j}) & \dots & G(\varphi_{1N}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G(\varphi_{i1}) & \dots & G(\varphi_{ij}) & \dots & G(\varphi_{iN}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G(\varphi_{N1}) & \dots & G(\varphi_{Nj}) & \dots & G(\varphi_{NN}) \end{bmatrix}.$$

$$G(*) = \begin{cases} (a_0 - r) \frac{(T - (n+1)\delta t)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + rs \frac{(T - (n+1)\delta t)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \theta \frac{d}{ds} + \frac{\Gamma(1+\alpha)}{2} \sigma^2 s^2 \theta \frac{d^2}{ds^2} (*), & 1 < i < N \\ (*), & i = 1, i = N, \end{cases}$$

$$[L]^1 = [L_1^1, L_2^1, \dots, L_N^1]^T \text{ و } i = 1$$

$$L_i^1 = \begin{cases} 0, & i = 1 \\ [a_0 - rs \frac{((n+1)\delta t)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} (1-\theta) \frac{d}{ds} - \frac{\Gamma(1+\alpha)}{2} \sigma^2 s^2 (1-\theta) \frac{d^2}{ds^2}] V_i^0, & 1 < i < N \\ s - K \exp(-r(T-t^1)), & i = N. \end{cases}$$

به طور مشابه برای معادله (۱۸) داریم:

$$[L]^{n+1} = D[\lambda]^{n+1},$$

$$\text{که } [L]^{n+1} = [L_1^{n+1}, L_2^{n+1}, \dots, L_N^{n+1}]^T \text{ و}$$

$$G(*) = \begin{cases} (a_0 - r \frac{((n+1)\delta t)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + rs \frac{(T-(n+1)\delta t)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \theta \frac{d}{ds} + \frac{\Gamma(1+\alpha)}{2} \sigma^2 s^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial s^2})(*), & 1 < i < N \\ (*), & i = 1, i = N \end{cases}$$

$$L_i^{n+1} = \begin{cases} 0, & i = 1 \\ [a_0 - rs \frac{(T-(n+1)\delta t)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} (1-\theta) \frac{d}{ds} - \frac{\Gamma(1+\alpha)}{2} \sigma^2 s^2 (1-\theta) \frac{d^2}{ds^2}] V_i^n \\ - \left[ a_0 \left( \sum_{k=1}^{n-1} b_k (V_i^{n-K+1} - V_i^{n-K}) \right) \right] & 1 < i < N \\ K \exp(-r(T-t^{n+1})), & i = N. \end{cases}$$

در حالت کلی روند حل عددی معادله بدین صورت است:

۱. تقریب مشتق کسری تابع قیمت‌گذاری مدل مورد نظر با مشتق کسری کاپوتو؛
۲. جای‌گزین کردن مشتق کسری و استفاده از روش  $\theta$  در معادله مورد نظر؛
۳. نمایش سیستم مرتبه دو معادلات دیفرانسیل معمولی به دست آمده در  $n = 0$  و  $n \geq 1$ ؛
۴. اعمال روش توابع پایه شعاعی در معادله مذکور، که با کدنویسی به زبان متلب در هر مرحله  $\lambda$  مجهول را به دست می‌آوریم و سپس  $\lambda$ های به دست آمده را در معادله (۱۹) قرار داده و قیمت حق اختیار به دست می‌آید.

### بررسی پایداری روش

در این بخش، به بررسی پایداری روش مورد نظر می‌پردازیم. بر این اساس ابتدا معادله (۹) را بر اساس معادله (۱۵) بازسازی می‌کنیم و داریم:

$$\left( a_0 - r \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \right) V^{n+1} + \frac{\Gamma(1+\alpha)}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V^{n+1}}{\partial s^2} + rs \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{\partial V^{n+1}}{\partial s} = a_0 (V^n - \sum_{k=1}^n b_k (V^{n-k+1} - V^{n-k})). \quad (23)$$

معادله مذکور را می‌توان بدین صورت نوشت:

$$\begin{aligned} & \left( a_0 - r \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \right) V^{n+1} + \frac{\Gamma(1+\alpha)}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V^{n+1}}{\partial s^2} + rs \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{\partial V^{n+1}}{\partial s} \\ & = a_0 (b_0 V^n \\ & - \sum_{k=1}^n b_k (V^{n-k+1} - V^{n-k})) \\ & = a_0 (b_0 V^n - \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} V^{n-k} + \sum_{k=1}^n b_k V^{n-k}) \end{aligned} \quad (24)$$

فرض (۲۵) طبق [۲۱]، برقرار است:

$$\begin{cases} b_k > 0; & k = 0, 1, \dots, n \\ 1 = b_0 > b_1 > \dots > b_n; & b_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \\ \sum_{k=0}^n (b_k - b_{k+1}) + b_{n+1} = (1 - b_1) + \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) + b_n = 1. \end{cases} \quad (25)$$

با توجه به معادله مذکور، معادله (۲۴) را بدین صورت به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} & \left( a_0 - r \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \right) V^{n+1} + \frac{\Gamma(1+\alpha)}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V^{n+1}}{\partial s^2} + r s \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{\partial V^{n+1}}{\partial s} \\ & = a_0 \left( (1 - b_1) V^n - \sum_{k=1}^{n-1} V^{n-k} (b_k - b_{k+1}) + b_n V^0 \right), \end{aligned} \quad (26)$$

که در آن  $n = 0, 1, \dots, M - 1$

قضیه ۱. معادله نیمه گسسته‌سازی (۲۶) برای هر  $0 < \delta t < T$  پایدار است اگر این شرط برقرار باشد:

$$\|V^{n+1}\|_1 \leq \|V^0\|_0, \quad n = 0, 1, \dots, M - 1,$$

که در آن  $\|v\|_0 = (v, v)^{1/2}$ ،  $\|v\|_1 = (v, v)_1^{1/2}$  در  $L^2$  است.

اثبات: برای اثبات از روش استقرا استفاده می‌کنیم. ابتدا  $u$  را در (۲۶) ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \left( a_0 - r \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \right) (V^{n+1}, u) + \frac{\Gamma(1+\alpha)}{2} \sigma^2 s^2 \left( \frac{\partial V^{n+1}}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial s} \right) \\ & + r s \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left( V^{n+1}, \frac{\partial u}{\partial s} \right) \\ & = a_0 \left( (1 - b_1) (V^n, u) + \sum_{k=1}^{n-1} (V^{n-k}, u) (b_k - b_{k+1}) + b_n (V^0, u) \right), \end{aligned} \quad (27)$$

معادله (۲۷) برای  $n = 0$  بدین صورت است:

$$\begin{aligned} & \left( a_0 - r \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \right) (V^1, u) + \frac{\Gamma(1+\alpha)}{2} \sigma^2 s^2 \left( \frac{\partial V^1}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial s} \right) + r s \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left( V^1, \frac{\partial u}{\partial s} \right) \\ & = a_0 (V^0, u), \end{aligned} \quad (28)$$

با جای‌گزین کردن  $u = V^1$  در معادله (۲۸) و از آن‌جا که  $\|u\|_0 \leq \|u\|_1$  و نامساوی شوارتز داریم:

$$\|V^1\|_1^2 \leq (\|V^0\|_0 \|V^1\|_0) \leq \|V^0\|_0 \|V^1\|_1,$$

در این صورت:

$$\|V^1\|_1 \leq \|V^0\|_0.$$

فرض می‌کنیم رابطه (۲۹) برقرار باشد.

$$\|V^n\|_1 \leq \|V^0\|_0, \quad n = 1, 2, \dots, M - 1. \quad (29)$$

حال رابطه  $\|V^{n+1}\|_1 \leq \|V^0\|_0$  را ثابت می‌کنیم.

در معادله (۲۸)،  $u = V^{n+1}$  در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} & \left( a_0 - r \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \right) (V^{n+1}, V^{n+1}) + \frac{\Gamma(1+\alpha)}{2} \sigma^2 s^2 \left( \frac{\partial V^{n+1}}{\partial s}, \frac{\partial V^{n+1}}{\partial s} \right) \\ & + r s \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left( V^{n+1}, \frac{\partial V^{n+1}}{\partial s} \right) \\ & = a_0 \left( (1 - b_1) (V^n, V^{n+1}) + \sum_{k=1}^{n-1} (V^{n-k}, V^{n+1}) (b_k - b_{k+1}) + b_n (V^0, V^{n+1}) \right). \end{aligned} \quad (30)$$

با استفاده از فرض (۳۰) و معادله (۲۹) داریم:

$$\begin{aligned} \|V^{n+1}\|_1^2 &\leq ((1 - b_1)\|V^n\|_0\|V^{n+1}\|_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1})\|V^{n-k}\|_0\|V^{n+1}\|_0 \\ &\quad + b_n\|V^0\|_0\|V^{n+1}\|_0), \\ \|V^{n+1}\|_1^2 &\leq ((1 - b_1) + \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) + b_n)\|V^0\|_0\|V^{n+1}\|_1. \\ \|V^{n+1}\|_1 &\leq \|V^0\|_0. \end{aligned}$$

در این صورت نشان دادیم که روش پایدار است.

در بخش بعد نتایج عددی حاصل از این روش را روی داده‌های واقعی بازار سکه را بررسی می‌کنیم.

### نتایج عددی و پیشنهادها

در این بخش نتایج عددی حاصل از پیاده‌سازی روش تابع پایه شعاعی را برای معادله بلک-شولز کسری روی داده‌های واقعی اختیار خرید سکه ارائه می‌کنیم. داده‌های مورد نیاز اختیار خرید سکه را با توجه به روزهای کاری یا روزهای تقویم که در آن روزها معامله صورت می‌گیرد، از تاریخ ۹۵/۱۰/۱ تا ۹۶/۱/۶ از سایت بورس اوراق بهادار تهران به‌وسیله نرم‌افزار اکسل دریافت کردیم و به قالب نرم افزار متلب بارگذاری کردیم.

قصد داریم مدل ذکر شده در این مقاله را روی داده‌های واقعی اعمال کنیم. برای این منظور با استفاده از این داده‌ها پارامترهای مورد نیاز مدل را تخمین می‌زنیم. در این مدل نرخ بهره عدد ثابت  $r = 0.18$  فرض شده که مطابق با واقعیت بازار ایران است. دوره زمانی  $T$  به توجه به داده‌ها ۳ ماه در نظر گرفته شده است. قیمت اعمال را تقریباً برابر میانگین بیش‌ترین و کم‌ترین قیمت دارایی روزانه در نظر گرفته و سپس یک میانگین کلی گرفته‌ایم.

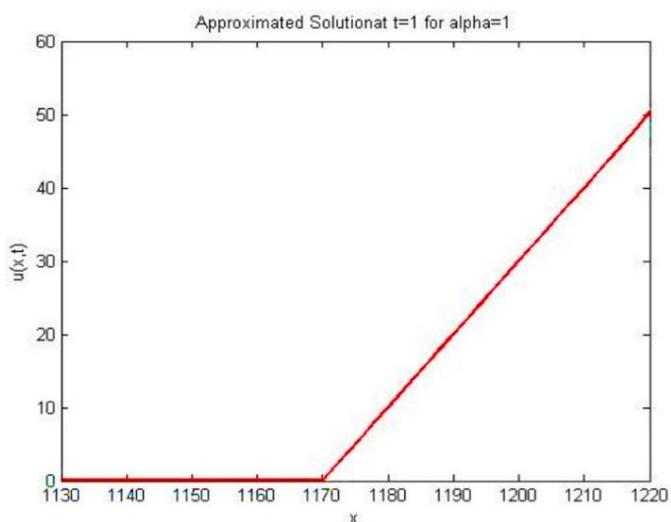
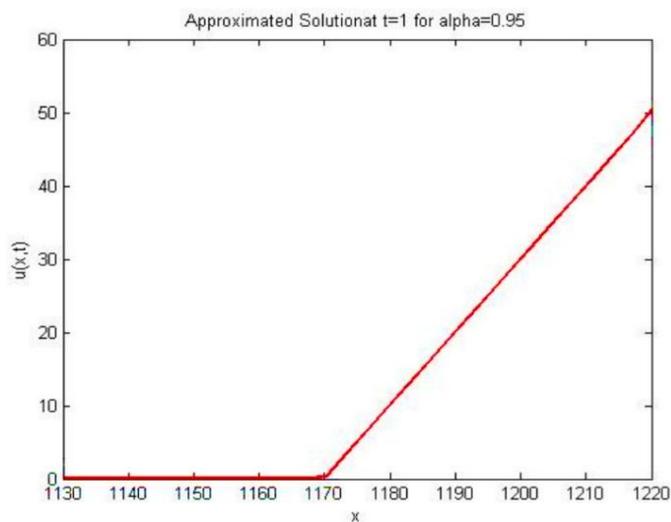
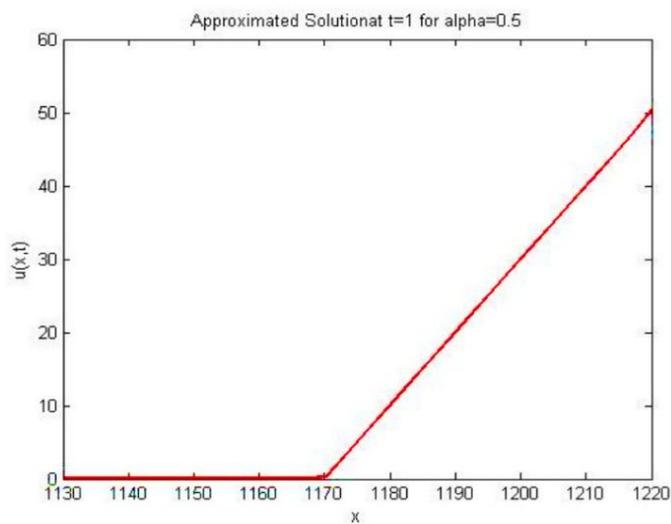
نوسان‌پذیری قیمت سهام را می‌توان با استفاده از تغییرات قیمت دارایی پایه تخمین زد. اگر  $\eta$  را معکوس تعداد روزهای مبادلاتی و  $S$  را انحراف از معیار بازده روزانه در نظر بگیریم، نوسان‌پذیری بدین‌صورت تخمین زده می‌شود:

$$\sigma = \frac{S}{\sqrt{\eta}}$$

لازم به ذکر است که با بررسی عدد حالت ماتریس ضرایب نسبت به پارامتر شکل مشاهده می‌شود که پارامتر شکل  $c = 0.01$  مقداری نزدیک به بهین است. با توجه به مطالب ذکر شده، داده‌های تخمین زده شده عبارتند از:

$$\sigma = 0.0527, \quad s_{min} = 1130, \quad s_{max} = 1220, \quad K = 1170, \quad N = 30.$$

با استفاده از داده‌های فوق و کد نویسی به زبان متلب برای روش ارائه شده در این مقاله، قیمت حق اختیار خرید را برای  $\alpha$ های مختلف در زمان  $t = 1$  به‌دست آورده‌ایم. نتایج حاصل در شکل ۱ آمده است.



شکل ۱. جواب تقریبی در  $t = 1$  با  $\alpha = 0.5, \alpha = 0.95, \alpha = 1$

با توجه به شکل ۱ در اختیار خرید سکه، هر گاه قیمت دارایی پایه از قیمت اعمال (توافقی) کم تر باشد، با افزایش مرتبه کسری ( $\alpha$ ) قیمت حق اختیار کاهش می یابد و این یعنی دارنده قرارداد حق اختیار خرید در صورت اعمال نکردن قرارداد ضرر کم تری متحمل می شود.

افزایش  $\alpha$  نقش مهمی در پایین آمدن قیمت حق اختیار خرید دارد و سبب می شود که وقتی قیمت حق اختیار پایین بیاید، خریدار اختیار خرید ضرر کم تری بدهد و هم چنین در حالتی که قیمت دارایی پایه از قیمت توافقی بیش تر باشد، با افزایش  $\alpha$  قیمت حق اختیار خرید نیز افزایش می یابد و این یعنی دارنده برگه حق اختیار خرید با اعمال کردن قرارداد به سود دست می یابد.

در جدول ۱ قیمت سکه را برای ۵ روز آینده به ازای  $\alpha$ های مختلف ( $\alpha = 1, \alpha = 0.5, \alpha = 0.95$ ) پیش بینی می کنیم و قیمت به دست آمده را با قیمت بازار مقایسه می کنیم. نتایج حاصل در جدول ۱ نشان می دهد که روش کارا است و معادله بلک-شولز کسری بهتر از معادله بلک-شولز کلاسیک ( $\alpha = 1$ ) عمل کرده است و وجود  $\alpha$  در معادله بلک-شولز کسری قیمت ها را به قیمت واقعی نزدیک تر کرده است.

جدول ۱. پیش بینی قیمت سکه در ۵ روز آینده برای  $\alpha$ های مختلف

$s$	$\alpha=1$	$\alpha=0.95$	$\alpha=0.5$	قیمت واقعی
$S_{91}$	۱۰۲۵۸	۱۰۲۷۹	۱۰۴۹۱	۱۱۸۰۰
$S_{92}$	۱۰۹۲۰	۱۰۹۴۴	۱۱۱۱۳	۱۱۸۸۵
$S_{93}$	۱۱۰۹۳	۱۱۱۱۸	۱۱۲۹۴	۱۱۹۵۲
$S_{94}$	۱۱۲۳۵	۱۱۲۵۹	۱۱۴۱۸	۱۱۹۵۲
$S_{95}$	۱۱۵۰۴	۱۱۵۳۷	۱۱۷۸۵	۱۱۹۶۸

## منابع

1. Podlubny I., "Fractional differential equations, an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications", Academic press, 198 (1998).
2. Neisy A., Chamai R., Shojaee Manesh L., "Three critical models in mathematical finance", Journal of Advanced Mathematical Modeling, 2 (1) (2012) 96-77.
3. Song L., Wang W., "Solution of the fractional Black-Scholes option pricing model by finite difference method. in Abstract and Applied Analysis", Hindawi Publishing Corporation, (2013) 77-96.
4. Meng L., Wang M., "Comparison of Black-Scholes formula with fractional Black-Scholes formula in the foreign exchange option market with changing volatility", Asia-Pacific Financial Markets, 17 (2) (2010) 99-111.
5. Mandelbrot B., "The variation of certain speculative prices", The journal of business, 36 (4) (1963) 394-419.
6. Mandelbrot B., Taylor H. M., "On the distribution of stock price differences", Operations research, 15 (6) (1967) 1057-1062.

7. Duncan T. E., Hu Y., Pasik-Duncan B., "Stochastic calculus for fractional Brownian motion I. Theory", *SIAM Journal on Control and Optimization*, 38 (2) (2000) 582-612.
8. Hu Y., Øksendal B., "Fractional white noise calculus and applications to finance, Infinite dimensional analysis", *quantum probability and related topics*, 6 (01) (2003) 1-32.
9. Wyss W., "The fractional Black-Scholes equation", *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 3 (1) (2000) 51-62.
10. Jumarie G., "Derivation and solutions of some fractional Black-Scholes equations in coarse-grained space and time", *Application to Merton's optimal portfolio*, *Computers & mathematics with applications*, 59 (3) (2010) 1142-1164.
11. Fu Q., Wang K., Liu X., "The foreign exchange option pricing based on the fractional Black-Scholes model and valuation", *Price Monthly*, 369 (2008) 68-70.
12. Elbeleze A. A., Kılıçman A., Taib B. M., "Homotopy perturbation method for fractional Black-Scholes European option pricing equations using Sumudu transform", *Mathematical problems in engineering* (2013) Article ID 524852, 7.
13. Kumar S., et al, "Analytical solution of fractional Black-Scholes European option pricing equation by using Laplace transform", *Journal of fractional calculus and Applications*, 2 (8) (2012) 1-9.
14. Ghandehari M. A. M., Ranjbar M., "European option pricing of fractional Black-Scholes model with new Lagrange multipliers", *Computational Methods for Differential Equations*, 2 (1) (2014) 1-10.
15. Osu B., Chukwunezu A., "On the solution to a fractional Black-Scholes equation for the price of an option", *International Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1 (3) (2014) 38-42.
16. Jumarie G., "Stock exchange fractional dynamics defined as fractional exponential growth driven by (usual) Gaussian white noise", *Application to fractional Black-Scholes equations*, *Insurance: Mathematics and Economics*, 42 (1) (2008) 271-287.
17. Wilmott P., Howison S., Dewynne J., "The mathematics of financial derivatives: a student introduction", (Cambridge University Press) 1995).
18. Kober H., "On fractional integrals and derivatives", *The Quarterly Journal of Mathematics*, (1) (1940) 193-211.
19. Hosseini V. R., Chen W., Avazzadeh Z., "Numerical solution of fractional telegraph equation by using radial basis functions", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 38, (2014) 31-39.
20. Buhmann M. D., "Radial basis functions: theory and implementations", Cambridge university press, 12 (2003).
21. Lin Y., Xu C., "Finite difference/spectral approximations for the time-fractional diffusion equation", *Journal of Computational Physics*, 225 (2) (2007) 1533-1552.