حل عددی معادلات انتگرال –دیفرانسیل تأخیری فردهلم خطی مرتبهٔ بالا با ضرایب متغیر با استفاده از بسط چبیشف

اسمعیل بابلیان، فاطمه چیت‌ساز
دانشگاه خوارزمی، دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر
علی داوری*
دانشگاه اصفهان، پردیس خوانسار، گروه ریاضی

دریافت ۹۷/۰۵/۱۵　　پذیرش ۹۸/۰۹/۰۲

چکیده

ایدهٔ اصلی این مقاله، استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل تأخیری فردهلم خطی با مراتب بالا است. معمولاً حل این معادلات به‌روش‌های تحلیلی امکان‌پذیر نیست یا در صورت امکان بسیار مشکل است. در این روش معادله مورد نظر به‌وسیلهٔ روابط ماتریسی بین چندجمله‌ای‌های چبیشف و مشتقات آنها به دستگاه معادلات خطی تبدیل می‌شود. ماتریس‌های عملیاتی عملگرهای تأخیر و مشتق همراه با روش تائو برای محاسبهٔ ضرایب مجهول بسط چبیشف جواب استفاده می‌شوند. همگرایی روش بررسی شده است. مثال‌های عددی، اعتبار و کارایی روش ارائه شده را نشان می‌دهند. هم‌چنین نتایج حاصل از روش با نتایج موجود مقایسه شده است.

واژه‌های کلیدی: معادلهٔ دیفرانسیل تأخیری، معادله انتگرال-دیفرانسیل تأخیری فردهلم، روش تائو، ماتریس عملیاتی، چندجمله‌ای‌های چبیشف.

مقدمه

معادلات انتگرال-دیفرانسیل تأخیری در پدیده‌های گوناگون مانند مدل‌سازی مسائل زیست‌شناسی، فیزیک و مهندسی ظاهر می‌شوند [۱]-[۶]. در سال‌های اخیر، تمایل و نیاز به حل عددی معادلات انتگرال-دیفرانسیل تأخیری رو به افزایش است. از آن‌جاکه حل تحلیلی این معادلات مشکل است، ناگزیر به استفاده از روش‌های عددی برای حل این معادلات هستیم. روش‌های عددی متعددی مانند روش موجک‌هار، روش موجک لژاندر، روش موجک گالرکین، روش تجزیه آدمین، روش هم‌محلی تیلور، روش سری‌های والش و غیره برای حل این معادلات به‌کار گرفته شده‌اند [۷]-[۱۸].

در این مقاله یک روش حل برای یافتن جواب عددی معادله انتگرال-دیفرانسیل تأخیری فردهلم خطی مرتبهٔ s با ضرایب متغیر به‌صورت

$$\sum_{k=0}^{s} p_k(x)\, y^{(k)}(x)+\sum_{r=0}^{l} p_r^*(x)\, y^{(r)}(x-\tau)= f(x)+\int_{-1}^{1} k(x,t)y(t-\tau)dt,\quad \tau\ge 0 \qquad (۱)$$

تحت شرایط مرکب

*نویسنده مسئول　a_davari@sci.ui.ac.ir

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.9.4]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.527]

$$\sum_{k=0}^{s-1}\left(a_{ik}y^{(k)}(-1)+b_{ik}y^{(k)}(1)+c_{ik}y^{(k)}(0)\right)=\mu_i,\qquad i=0,1,\dots,s-1, \qquad (۲)$$

به‌طوری‌که p_k، p_r^*، k و f توابع پیوسته معلوم هستند، ارائه می‌دهیم. در این‌جا ضرایب a_{ik}، b_{ik}، c_{ik} و μ_i ثابت‌های حقیقی هستند.

روش ما شامل تبدیل مسئله مورد نظر به دستگاه معادلات خطی با استفاده از بسط جواب برحسب چندجمله‌ای‌های چبیشف است. ماتریس‌های عملیاتی عملگرهای تأخیر و مشتق به‌دست آورده می‌شود. این ماتریس‌ها همراه با روش تائو برای محاسبه ضرایب مجهول بسط به‌کار می‌روند.

روش تائو در ابتدا به‌وسیلهٔ لنچوز [۱۹] برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی مطرح شد، اورتیز [۲۰] آن را تعمیم داد.

روش شامل بسط جواب تقریبی مورد نظر بر حسب عناصر یک مجموعه کامل از چندجمله‌ای‌های متعامد است [۲۱]، [۲۲].

طی سال‌های اخیر تحقیقات متعددی از کاربردهای روش تائو برای حل مسائل مختلف انجام شده است [۲۳]-[۲۶].

بخش‌های این مقاله به این شرح است: بخش ۲ به روابط اصلی مورد نیاز از چندجمله‌ای‌های چبیشف در بخش‌های بعدی اختصاص داده شده است. بخش ۳ نحوهٔ پیاده‌سازی روش تائو چبیشف برای حل مسئله (۱)-(۲) را بیان می‌کند. سپس یک دستگاه معادلات خطی تشکیل داده و یک جواب تقریبی از مسئله مورد نظر معرفی می‌شود. در بخش ۴ همگرایی روش پیشنهادی بررسی می‌شود. در بخش ۵ روش پیشنهادی روی چند مثال عددی به‌کار برده می‌شود. مقایسه‌ای با روش‌های موجود انجام شده است. بخش ۶ به بیان نتایج مقاله می‌پردازد. لازم به ذکر است که برای انجام محاسبات از نرم‌افزار میپل استفاده کردیم.

مفاهیم و تعاریف مقدماتی

در این بخش مفاهیم، روابط ومعادلاتی که در بخش‌های بعد به آنها نیاز داریم را معرفی می‌کنیم.

چندجمله‌ای‌های متعامد چبیشف روی بازهٔ $[-1,1]$ به‌صورت $T_i(x)=\cos(i\arccos x)$ تعریف می‌شوند و با فرمول بازگشتی سه جمله‌ای زیر می‌توانند تعیین شوند:

$$T_{i+1}(x)=2xT_i(x)-T_{i-1}(x),\qquad i=1,2,3,\dots$$

که $T_0(x)=1$ و $T_1(x)=x$.

شرط تعامد چندجمله‌ای‌های چبیشف عبارت است از

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_i(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{cases}\pi & i=j=0\\[2ex] \dfrac{\pi}{2}\delta_{ij} & o.w.\end{cases} \qquad (۳)$$

تابع y تابعی انتگرال‌پذیر روی بازهٔ $[-1,1]$ است و بسط آن برحسب چندجمله‌ای‌های چبیشف بدین‌صورت در نظر گرفته می‌شود:

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.9.4]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.527]

$$y(x)=\sum_{j=0}^{\infty}{}' c_j T_j(x),$$

علامت پریم در Σ' به معنای ضریب $\frac{1}{2}$ برای جملهٔ اول است. ضرایب c_j بسط مذکور از این رابطه به‌دست می‌آیند:

$$c_j=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{y(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,\qquad j=0,1,2,\ldots$$

قابل ذکر است که در عمل تنها $n+1$ جمله اول بسط چبیشف در نظر گرفته می‌شود. پس داریم:

$$y_n(x)=\sum_{j=0}^{n}{}' c_j T_j(x),\tag{۴}$$

فرم ماتریسی رابطهٔ (۴) به‌صورت (۵) است:

$$y_n(x)=T(x)C,\tag{۵}$$

به‌علاوه

$$y_n^{(k)}(x)=T^{(k)}(x)C,\qquad k=0,1,\ldots s,\tag{۶}$$

که در آن بردار ضرایب چبیشف C و بردار چندجمله‌ای‌های چبیشف $T(x)$ به‌صورت (۷) تعریف می‌شوند:

$$T(x)=[T_0(x),T_1(x),\ldots,T_n(x)],\ \ C=[\frac{1}{2}c_0,c_1,\ldots,c_n]^t.\tag{۷}$$

به‌روش مشابه، تابع دو متغیره f نیز برای $-1\le x,t\le 1$ برحسب چندجمله‌ای‌های چبیشف به‌صورت (۸) تقریب زده می‌شود:

$$f_n(x,t)=\sum_{i=0}^{n}{}'\sum_{j=0}^{n}{}' f_{ij}T_i(x)T_j(x)=T(t)FT^t(x),\tag{۸}$$

که در آن ماتریس ضرایب چبیشف F بدین‌صورت است:

$$F=\frac{4}{\pi^2}\begin{bmatrix}\frac{f_{00}}{4} & \frac{f_{01}}{2} & \frac{f_{02}}{2} & \cdots & \frac{f_{0n}}{2}\\ \frac{f_{10}}{2} & f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n}\\ \frac{f_{20}}{2} & f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{f_{n0}}{2} & f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn}\end{bmatrix},$$

به‌طوری‌که

$$f_{ij}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f(x,t)\frac{T_i(t)T_j(x)}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-x^2}}dxdt,\quad i,j=0,1,\ldots,n.\tag{۹}$$

یک نتیجه مفید از بسط بر اساس سری‌های چبیشف به‌صورت (۱۰) به‌دست می‌آید [۸]:

$$W=\int_{-1}^{1}T^t(t)T(t)\,dt=[W_{ij}],\qquad i,j=0,1,\ldots,n,\tag{۱۰}$$

به‌طوری‌که

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.9.4]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.527]

$$W_{ij}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-(i+j)^2}+\dfrac{1}{1-(i-j)^2}, & \text{زوج } i+j,\\ 0, & \text{فرد } i+j.\end{cases}$$

به‌علاوه رابطهٔ بین توان‌های x^n و چندجمله‌ای‌های چبیشف $T_j(x)$ بدین‌صورت است [۲۲]:

$$x^{2m}=2^{-2m+1}{\sum_{j=0}^{m}}' \binom{2m}{m-j} T_{2j}(x), \qquad -1\le x\le 1 \tag{۱۱}$$

$$x^{2m+1}=2^{-2m}\sum_{j=0}^{m} \binom{2m+1}{m-j} T_{2j+1}(x), \qquad -1\le x\le 1 \tag{۱۲}$$

با در نظر گرفتن معادلات (۱۱) و (۱۲) برای $m=0,1,\dots,\dfrac{n}{2}$ فرم ماتریسی متناظر به‌صورت (۱۳) به‌دست می‌آید:

$$X(x)=T(x)M^t, \tag{۱۳}$$

که در آن

$$X(x)=[1,x,x^2,\dots,x^n],$$

برای n فرد داریم،

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\binom{0}{0}2 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \binom{1}{0}2^0 & 0 & \dots & 0\\ \frac{1}{2}\binom{2}{1}2^{-1} & 0 & \binom{2}{0}2^{-1} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \binom{n}{(n-1)/2}2^{1-n} & 0 & \dots & \binom{n}{0}2^{1-n}\end{bmatrix}, \tag{۱۴}$$

و برای n زوج داریم

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\binom{0}{0}2 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \binom{1}{0}2^0 & 0 & \dots & 0\\ \frac{1}{2}\binom{2}{1}2^{-1} & 0 & \binom{2}{0}2^{-1} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{1}{2}\binom{n}{n/2}2^{1-n} & 0 & \binom{n}{(n-2)/2}2^{1-n} & \dots & \binom{n}{0}2^{1-n}\end{bmatrix}. \tag{۱۵}$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.9.4]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.527]

حال از معادلات (۱۳)، (۱۴) و (۱۵) به رابطهٔ (۱۶) می‌رسیم.

$$T(x) = X(x)(M^t)^{-1}, \tag{۱۶}$$

از این‌رو، داریم.

$$T^{(k)}(x) = X^{(k)}(x)(M^t)^{(-1)}, \quad k = 0,1,\ldots,s. \tag{۱۷}$$

با استفاده از رابطهٔ

$$X^{(k)}(x) = X(x)B^k, \quad k = 0,1,\ldots,s, \tag{۱۸}$$

$X^{(k)}(x)$ را بر حسب $X(x)$ به‌دست می‌آوریم که در آن:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}. \tag{۱۹}$$

با جای‌گذاری از روابط (۱۷) و (۱۸) در معادلهٔ (۶) و استفاده از رابطهٔ (۱۳)، معادله (۲۰) نتیجه می‌شود:

$$y_n^{(k)}(x) = T(x)M^t(x)B^k(M^t)^{-1}C, \quad k = 0,1,\ldots,s. \tag{۲۰}$$

با جای‌گذاری $x - \tau$ به‌جای x در معادلهٔ (۵) رابطهٔ ماتریسی (۲۱) را داریم:

$$y(x-\tau) \simeq T(x-\tau)C. \tag{۲۱}$$

مشابه (۱۸) رابطهٔ ماتریسی (۲۲) بین $X(x-\tau)$ و $X(x)$ برقرار است.

$$X(x-\tau) = X(x)B_{-\tau}, \tag{۲۲}$$

که در آن

$$\mathbf{B}_{-\tau} = \begin{bmatrix} \binom{0}{0}(-\tau)^0 & \binom{1}{0}(-\tau)^1 & \binom{2}{0}(-\tau)^2 & \ldots & \binom{n}{0}(-\tau)^n \\ 0 & \binom{1}{1}(-\tau)^0 & \binom{2}{1}(-\tau)^1 & \ldots & \binom{n}{1}(-\tau)^{n-1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2}(-\tau)^0 & \ldots & \binom{n}{2}(-\tau)^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \binom{n}{n}(-\tau)^0 \end{bmatrix}.$$

با مشتق‌گیری از دو طرف معادلهٔ (۲۲) نسبت به x و استفاده از (۱۸) داریم:

$$X^{(r)}(x-\tau) = X^{(r)}(x)B_{-\tau} = X(x)B^rB_{-\tau}, \quad r = 0,1,\ldots,t. \tag{۲۳}$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.9.4]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.527]

حال با استفاده از (۱۷) داریم:

$$T^{(r)}(x-\tau)=X^{(r)}(x-\tau)(M^t)^{-1}=X(x)B^rB_{-\tau}(M^t)^{-1},\quad r=0,1,\dots,t, \tag{۲۴}$$

با جای‌گزینی (۱۳) در (۲۴) و استفاده از معادلهٔ (۶) داریم:

$$y_n^{(r)}(x-\tau)=T(x)M^tB^rB_{-\tau}(M^t)^{-1}C,\qquad r=0,1,\dots,t. \tag{۲۵}$$

بیان حل مسئله (۱)-(۲)

برای حل کردن معادله انتگرال-دیفرانسیل تأخیری فردهلم خطی (۱) تحت شرایط (۲)، در ابتدا توابع p_k، p_r^*، k و f را با $(n+1)$ جملهٔ اول بسط چبیشف متناظر آن تقریب می‌زنیم:

$$p_{k,n}(x)=T(x)D_k,\qquad k=0.1,\dots,s, \tag{۲۶}$$

$$p_{r,n}^*(x)=T(x)D_r^*,\qquad r=0.1,\dots,l, \tag{۲۷}$$

$$f_n(x)=T(x)F, \tag{۲۸}$$

$$k_n(x,t)=T(t)AT^t(x), \tag{۲۹}$$

که بردارهای $D_r^*=[\frac{1}{2}d_{r,0}^*,d_{r,1}^*,\dots,d_{r,n}^*]^t$، $D_k=[\frac{1}{2}d_{k,0},d_{k,1},\dots,d_{k,n}]^t$ و $F_k=[f_0,f_1,\dots,f_n]^t$ معلوم هستند و طبق رابطهٔ (۷) تعریف می‌شوند. ماتریس A معلوم است و طبق معادلهٔ (۸) تعریف می‌شود. C بردار مجهولات مسئله است. حال با استفاده از (۲۰) و (۲۶) داریم:

$$\begin{aligned}p_{k,n}(x)y_n^k(x)&=T(x)D_kT(x)M^t(x)B^k(M^t)^{-1}C\\&=D_k^tT^t(x)T(x)M^t(x)B^k(M^t)^{-1}C,\quad k=0,1,\dots,s.\end{aligned} \tag{۳۰}$$

حال فرض کنید

$$D_k^tT^t(x)T(x)=T(x)Q_k, \tag{۳۱}$$

که در آن Q_k یک ماتریس $(n+1)\times(n+1)$ است. برای تعیین Q_k معادله فوق می‌تواند بدین‌صورت نوشته شود.

$$\sum_{m=0}^{n}d_{k,m}T_m(x)T_j(x)=\sum_{m=0}^{n}[Q_k]_{mj}T_m(x),\qquad j=0,1,\dots,n. \tag{۳۲}$$

با ضرب کردن دو طرف تساوی (۳۲) در $T_i(x)$ و انتگرال‌گیری از ۱- تا ۱ نتیجه می‌شود:

$$\sum_{m=0}^{n}d_{k,m}\int_{-1}^{1}\frac{T_i(x)T_j(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=[\mathbf{Q}_k]_{mj}\int_{-1}^{1}\frac{T_i(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx,\ i,j=0,1,\dots,n. \tag{۳۳}$$

حال فرض کنید

$$w_{i,j,m}=\int_{-1}^{1}\frac{T_i(x)T_j(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,\qquad i,j,m=0,1,\dots,n, \tag{۳۴}$$

با استفاده از معادلات (۳)، (۳۳) و (۳۴) داریم:

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.9.4]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.527]

$$[Q_k]_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{m=0}^{n} d_{k,m} w_{i,j,m}, & i=j=0, \\ \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{m=0}^{n} d_{k,m} w_{i,j,m}, & i,j=0,1,\dots,n \text{ و } \left(i>0 \text{ یا } j>0\right). \end{cases} \quad (۳۵)$$

قابل توجه است که $w_{i,j,m}$ها به‌راحتی محاسبه می‌شوند. با به‌کار بردن معادلات (۳۰) و (۳۱) داریم:

$$p_{k,n}(x) y_n^k(x) = T(x) Q_k M^t(x) B^k (M^t)^{-1} C, \quad k=0,1,\dots,s. \quad (۳۶)$$

با استفاده از معادلات (۲۵) و (۲۷) داریم:

$$\begin{aligned} p_{r,n}^* y_n^{(r)}(x-\tau) &= T(x) D_r^* T(x) M^t B^r B_{-\tau} (M^t)^{-1} C \\ &= D_r^{*^t} T^t(x) T(x) M^t B^r B_{-\tau} (M^t)^{-1} C, \quad r=0,1,\dots,l. \end{aligned} \quad (۳۷)$$

هم‌چنین قرار می‌دهیم

$$D_r^{*t} T^t(x) T(x) = T(x) Q_r^*, \quad (۳۸)$$

که در آن Q_r^* یک ماتریس $(n+1)\times(n+1)$ است. با رابطه‌ای مشابه (۳۵) تعریف می‌شود.

از روابط (۳۷) و (۳۸) داریم:

$$p_{r,n}^* y_n^{(r)}(x-\tau) = T(x) Q_r^* M^t B^r B_{-\tau} (M^t)^{-1} C, \quad r=0,1,\dots,l. \quad (۳۹)$$

هم‌چنین با استفاده از (۱۰) ، (۲۵) و (۳۰) داریم

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} k(x,t) y_n(t-\tau)\, dt &= T(x) A \left(\int_{-1}^{1} T^t(x) T(x)\, dt\right) M^t B_{-\tau} (M^t)^{-1} C \\ &= T(x) A W M^t B_{-\tau} (M^t)^{-1} C. \end{aligned} \quad (۴۰)$$

با به‌کاربردن روابط (۲۸)، (۳۶)، (۳۹) و (۴۰) می‌توان معادلهٔ (۱) را بدین‌صورت نوشت:

$$T(x)\{(\sum_{k=0}^{s} Q_k M^t B^k + \sum_{r=0}^{t} Q_r^* M^t B^r B_{-\tau} - A W M^t B_{-\tau})(M^t)^{-1} C - F\} = T(x)\{ZC - F\} = 0,$$

که

$$Z = (\textstyle\sum_{k=0}^{s} Q_k M^t B^k + \sum_{r=0}^{t} Q_r^* M^t B^r B_{-\tau} - A W M^t B_{-\tau})(M^t)^{-1}. \quad (۴۱)$$

به‌عنوان یک روش تائو ما $n+1-s$ معادله با استفاده از روابط

$$(ZC - F)_i = 0, \quad i=0,1,\dots,n-s. \quad (۴۲)$$

تولید می‌کنیم.

به‌علاوه با جای‌گزینی از معادلهٔ (۵) در (۲) و استفاده از معادلهٔ (۲۰) به معادلهٔ (۴۳) می‌رسیم:

$$\sum_{k=0}^{s-1} \left(a_{ik} T(-1) + b_{ik} T(1) + c_{ik} T(0)\right) M^t B^k (M^t)^{-1} C = \mu_i, \quad i=0,1,\dots,s-1. \quad (۴۳)$$

قابل توجه است که:

$$T(1) = [1,1,\dots,1] \text{ و } T(-1) = [1,-1,\dots,(-1)^n].$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.9.4]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.527]

با حل دستگاه $n+1$ معادله و $n+1$ مجهول (۴۲) و (۴۳) بردار C به‌دست می‌آید و در نتیجه $y_n(x)$ در معادلهٔ (۵) را می‌توان محاسبه کرد.

لازم به ذکر است اگر به‌جای معادله (۱) معادلهٔ انتگرال-دیفرانسیل تأخیری فردهلم خطی به‌صورت (۴۴) داریم:

$$\sum_{k=0}^{s} p_k(x)\, y^{(k)}(x) + \sum_{r=0}^{l} p_r^*(x)\, y^{(r)}(x-\tau) = f(x) + \int_{-1}^{1} k(x,t) y(t-\tau) dt + \int_{-1}^{1} k^*(x,t) y(t) dt, \tag{۴۴}$$

که در آن k^* تابع دو متغیره پیوسته معلوم است، باید ماتریس Z در (۴۱) را با عبارت ماتریسی زیر عوض کنیم.

$$Z = \left(\sum_{k=0}^{s} Q_k M^t B^k + \sum_{r=0}^{t} Q_r^* M^t B^r B_{-\tau} - AWM^t B_{-\tau}\right)(M^t)^{-1} - A^* W, \tag{45}$$

که $k_n^*(x,t) = T(t) A^* T^t(x)$ است، و ماتریس A^* معلوم است و به‌صورت مشابه معادلهٔ (۸) به‌دست می‌آید.

برآورد خطا و تحلیل همگرایی

در این بخش به بررسی همگرایی روش عددی طرح شده می‌پردازیم.

قضیهٔ ۱. فرض کنیم y جواب معادلهٔ (۱) و y_n تقریبی از آن باشد که با رابطهٔ (۴) تعریف می‌شود. فرض کنیم ضرایب بسط متناظر از روش بخش ۳ به‌دست آمده باشد و توابع $p_k,\ k=0,1,\ldots,s$ ، $p_r^*,\ r=0,1,\ldots,l$ ، k و f پیوسته باشند. اگر $e(x)$ تفاضل عبارات حاصل از جای‌گذاری $y(x)$ و $y_n(x)$ در معادله (1) باشد در این صورت

$$\| e \|^2_{L^2(-1,1)} \le c_{0,1,\ldots,s}\; n^{-m} \| y^{(m)} \|^2_{L^2(-1,1)} + c'_{0,1,\ldots,l}\, (\frac{n}{2})^{-m} \| y^{(m)} \|^2_{L^2(-1-\tau,1-\tau)} . \tag{۴۶}$$

اثبات: تحت شرایط مفروض قضیه از (۱) داریم:

$$\begin{aligned}
| e(x) | &= \Big| \sum_{k=0}^{s} p_k(x)\big(y^{(k)}(x) - y_n^{(k)}(x) \big) + \sum_{r=0}^{l} p_r^*(x)\big(y^{(r)}(x-\tau) - y_n^{(r)}(x-\tau) \big) \\
&\quad - \int_{-1}^{1} k(x,t)(y(t-\tau) - y_n(t-\tau))\, dt \Big| \\
&\le \sum_{k=0}^{s} | p_k(x) | \, | y^{(k)}(x) - y_n^{(k)}(x) | + \sum_{r=0}^{l} | p_r^*(x) | \, | y^{(r)}(x-\tau) - y_n^{(r)}(x-\tau) | \\
&\quad + \int_{-1}^{1} | k(x,t) | \, | y(t-\tau) - y_n(t-\tau) |\, dt.
\end{aligned}$$

اگر فرض کنیم $M_1 = \max_{0\le k\le s} \| p_k \|_{L^\infty(-1,1)}$ و $M_2 = \max_{0\le r\le l} \| p_r^* \|_{L^\infty(-1,1)}$ به‌علاوه فرض کنیم $M_3 = \max_{-1\le x,t\le 1} | k(x,t) |$ و قرار دهیم $M = \max\{M_1, M_2, M_3\}$، در این صورت داریم:

$$\begin{aligned}
| e(x) | &\le M \sum_{k=0}^{s} | y^{(k)}(x) - y_n^{(k)}(x) | + M \sum_{r=0}^{l} | y^{(r)}(x-\tau) - y_n^{(r)}(x-\tau) | \\
&\quad + M \int_{-1}^{1} | y(t-\tau) - y_n(t-\tau) |\, dt.
\end{aligned}$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.9.4]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.527]

بدون کاستن از کلیت فرض کنیم $l=s=1$ در نتیجه

$$|e(x)|\le M\ \Big(\sum_{k=0}^{1}|\,y^{(k)}(x)-y_n^{(k)}(x)\,|+\sum_{r=0}^{1}|\,y^{(r)}(x-\tau)-y_n^{(r)}(x-\tau)\,|$$
$$+\int_{-1}^{1}|\,y(t-\tau)-y_n(t-\tau)\,|\,dt\ \Big).$$

پس

$$|e(x)|^2\le 2M^2\ \Big(\sum_{k=0}^{1}|\,y^{(k)}(x)-y_n^{(k)}(x)\,|^2+\sum_{r=0}^{1}|\,y^{(r)}(x-\tau)-y_n^{(r)}(x-\tau)\,|^2$$
$$+\Big(\int_{-1}^{1}|\,y(t-\tau)-y_n(t-\tau)\,|\,dt\Big)^2.$$

با انتگرال‌گیری از نامساوی فوق و استفاده از نامساوی کوشی- شوارتز داریم:

$$\|e\|^2_{L^2(-1,1)}\le 2M^2\ \Big(\sum_{k=0}^{1}\|y^{(k)}-y_n^{(k)}\|^2_{L^2(-1,1)}+\sum_{r=0}^{1}\|y^{(r)}-y_n^{(r)}\|^2_{L^2(-1-\tau,1-\tau)}$$
$$+\int_{-1}^{1}\Big(\int_{-1}^{1}|\,y(t-\tau)-y_n(t-\tau)\,|^2\ dt\Big)dx.$$

با توجه به روابط (۳۳) و (۳۶) و مرجع [۲۱] برای $y\in H_m(-1,1)$ و $1\le m\le n+1$ داریم:

$$\|y-y_n\|_{L^2(-1,1)}\le cn^{-m}\ \Big(\int_{-1}^{1}\Big(\frac{d^m y}{dx^m}\Big)^2dx\Big)^{\frac{1}{2}},$$

و

$$\Big\|\frac{dy}{dx}-\frac{d}{dx}y_n\Big\|_{L^2(-1,1)}\le cn^{\frac{3}{2}-m}\ \Big(\int_{-1}^{1}\Big(\frac{d^m y}{dx^m}\Big)^2dx\Big)^{\frac{1}{2}},$$

و در نتیجه برای هر $y\in H_m(a,b)$ و $1\le m\le n+1$ با فرض $h=b-a$ داریم:

$$\|y-y_n\|_{L^2(a,b)}\le ch^m n^{-m}\ \Big(\int_{a}^{b}\Big(\frac{d^m y}{dx^m}\Big)^2dx\Big)^{\frac{1}{2}},$$

و

$$\Big\|\frac{dy}{dx}-\frac{d}{dx}y_n\Big\|_{L^2(a,b)}\le ch^{m-1}n^{\frac{3}{2}-m}\ \Big(\int_{a}^{b}\Big(\frac{d^m y}{dx^m}\Big)^2dx\Big)^{\frac{1}{2}},$$

پس

$$\|e\|^2_{L^2(-1,1)}\le 2M^2\Big(c_0\ n^{-m}\ \|y^{(m)}\|^2_{L^2(-1,1)}+c_1\ n^{\frac{3}{2}-m}\ \|y^{(m)}\|^2_{L^2(-1,1)}+c_0'\ 2^m n^{-m}\ \|y^{(m)}\|^2_{L^2(-1-\tau,1-\tau)}$$
$$+c_1'\ 2^{m-1}n^{\frac{3}{2}-m}\ \|y^{(m)}\|^2_{L^2(-1-\tau,1-\tau)}+2c_0''\ 2^m n^{-m}\ \|y^{(m)}\|^2_{L^2(-1-\tau,1-\tau)}\Big)$$

با قرار دادن

$$c_{0,1}=2M^2(c_0+c_1\ n^{\frac{3}{2}})\ \text{و}\ c_{0,1}'=2M^2(c_0'+c_1'\ n^{\frac{3}{2}}+2c_0'')$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.9.4]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.527]

داریم:

$$\| e \|^2_{L^2(-1,1)} \le c_{0,1}\ n^{-m} \| y^{(m)} \|^2_{L^2(-1,1)} + c'_{0,1}\ (\frac{n}{2})^{-m} \| y^{(m)} \|^2_{L^2(-1-\tau,1-\tau)},$$

بنابراین نامساوی (۴۶) در حالت $l = s = 1$ به‌دست آمد. برای $l, s > 1$ روند قابل تعمیم است.

نامساوی (۴۶) نشان می‌دهد که خطا از مرتبهٔ $o((\frac{n}{2})^{-m})$ است و با افزایش n و m خطا کاهش می‌یابد. اگر n و m به بی‌نهایت میل کنند خطا به صفر میل می‌کند.

مثال‌های عددی

در این بخش روش طرح شده را برای چند مثال به‌کار می‌بریم و نتایج حاصل را بررسی می‌کنیم.

مثال ۱. معادلهٔ انتگرال - دیفرانسیل تأخیری فردهلم خطی مرتبهٔ اول زیر

$$y'(x) - y(x) + xy'(x-1) + y(x-1) = x - 2 + \int_{-1}^{1} (x+t)y(t-1)\, dt,$$

با شرط $y(-1) - 2y(0) + y(1) = 0$ را در نظر می‌گیریم [۱۸].

در این مثال داریم: $\tau = 1$ ، $p_0(x) = -1$، $p_1(x) = 1$، $p_0^*(x) = 1$، $p_1^*(x) = x$، $f(x) = x - 2$ و $k(x,t) = x + t$.

جواب دقیق این مسئله $y(x) = 3x + 4$ است.

با استفاده از تکنیک ارائه شده در بخش قبلی برای $n = 2$ جواب را به‌صورت (۴۷) تقریب می‌زنیم.

$$y_2(x) = T(x)C = \frac{c_0}{2}T_0(x) + c_1T_1(x) + c_2T_2(x), \qquad (۴۷)$$

داریم:

$$D_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\quad D_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad D_0^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad D_1^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\qquad F = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

قابل توجه است که $d_{00} = -2$، $d_{10} = 2$، $d_{00}^* = 2$، $d_{10}^* = 0$ و $f_0 = -4$، بنابراین

$$Q_0 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix},\qquad Q_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},\qquad Q_0^* = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$Q_1^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0.5 \\ 1 & 0.5 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\qquad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad B_{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.9.4]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.527]

و

$$W=\begin{bmatrix}2 & 0 & \frac{-2}{3}\\ 0 & \frac{2}{3} & 0\\ \frac{-2}{3} & 0 & \frac{14}{15}\end{bmatrix}.$$

بنابراین

$$Z=(Q_0M^t+Q_0M^tB+Q_0^*M^tB_{-1}+Q_1^*M^tBB_{-1}-AWM^tB_{-1})(M^t)^{-1}$$
$$=\begin{bmatrix}0 & \frac{-2}{3} & \frac{32}{3}\\ -2 & 3 & \frac{-22}{3}\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

با استفاده از معادلهٔ (۴۲) داریم:

$$-23c_1+92c_2=-2,\quad -2c_0+3c_1-223c_2=1, \tag{۴۸}$$

هم‌چنین با استفاده از (۴۳) داریم:

$$4c_2=0. \tag{۴۹}$$

با حل کردن دستگاه معادلات خطی (۴۸) و (۴۹) داریم:

$$c_0=8,\quad c_1=3,\quad c_2=0.$$

با جای‌گذاری ضرایب به‌دست آمده در معادلهٔ (۴۵) داریم $y_2(x)=3x+4$ که همان جواب دقیق مسئله است.

مثال ۲. معادلهٔ انتگرال –دیفرانسیل تأخیری فردهلم خطی مرتبهٔ سه با ضرایب متغیر

$$y'''(x)-(x-1)y''(x)+(x-1)y'(x)-y(x)+y'(x-1)=$$
$$e^{(x-1)}+x(ex-\frac{x}{e}-\frac{2}{e})+\int_{-1}^{1}(xt-x^2)y(t)\,dt,$$

با شرایط $y(0)=y'(0)=y''(0)=1$ را در نظر می‌گیریم.

با استفاده از معادلهٔ (۴۴) داریم:

$$\tau=1, p_0(x)=-1, p_1(x)=x-1, p_2(x)=-(x-1), p_3(x)=1, p_0^*(x)=0\ ،$$
$$p_1^*(x)=1, f(x)=e^{(x-1)}+x\left(ex-\frac{x}{e}-\frac{2}{e}\right), k(x,t)=0 \text{ و } k^*(x,t)=xt-x^2.$$

جواب دقیق مسئله $y(x)=e^x$ است.

تقریب جواب معادله انتگرال-دیفرانسیل تأخیری خطی در دسته‌ای از نقاط متناظر با $n=3$ و $n=4$ به‌دست آمده است. نتایج عددی در جدول ۱ قابل مشاهده است.

مثال ۳. معادلهٔ انتگرال-دیفرانسیل تأخیری فردهلم خطی مرتبهٔ دوم با ضرایب متغیر زیر را

$$(x+4)^2y''(x)-(x+4)y'(x)+y(x-1)-y'(x-1)=$$
$$ln(x+3)-\frac{1}{x+3}+3ln(3)-5ln(5)+\int_{-1}^{1}y(t)\,dt,$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.9.4]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.527]

جدول ۱. آنالیز خطای مثال ۲

	$n=3$		$n=4$	
x	$y_n(x)$	$\|y(x)-y_n(x)\|$	$y_n(x)$	$\|y(x)-y_n(x)\|$
0.5	1.6456	0.31e-02	1.6500	0.13e-02
0.4	1.4905	0.13e-02	1.4925	0.70e-03
0.3	1.3494	0.50e-03	1.3502	0.30e-03
0.2	1.2213	0.10e-03	1.2216	0.20e-03
0.1	1.1052	0.0000	1.1052	0.0000
0.0	1.0000	0.0000	1.0000	0.0000
-0.1	0.90484	0.0000	0.90484	0.0000
-0.2	0.81868	0.50e-04	0.81861	0.12e-03
-0.3	0.74056	0.50e-03	0.74040	0.42e-03
-0.4	0.66947	0.85e-03	0.66933	0.99e-03
-0.5	0.60443	0.21e-02	0.60461	0.19e-02

با شرایط $y(0)=ln(4)$ و $y'(0)=\frac{1}{4}$ در نظر بگیرید. جواب دقیق مسئله $y(x)=\ln(x+4)$ است.
با استفاده از معادلهٔ (۴۴) داریم:

$$\tau=1, p_0(x)=0 ,p_1(x)=-(x+4), p_2(x)=(x+4)^2,\ p_0^*(x)=1 ,p_1^*(x)=-1 ،$$
$$f(x)=ln(x+3)-\frac{1}{x+3}+3ln(3)-5ln(5), k(x,t)=0, k^*(x,t)=1.$$

جواب عددی برای معادله انتگرال-دیفرانسیل تأخیری خطی متناظر با $n=3$ و $n=4$ به‌دست می‌آید. نتایج عددی را در جدول ۲ ببینید.

جدول ۲. آنالیز خطای مثال ۳

	$n=3$		$n=4$	
x	$y_n(x)$	$\|y(x)-y_n(x)\|$	$y_n(x)$	$\|y(x)-y_n(x)\|$
0.5	1.50764	0.447e-02	1.50778	0.370e-02
0.4	1.48394	0.281e-02	1.48404	0.244e-02
0.3	1.45996	0.154e-02	1.46002	0.140e-02
0.2	1.43570	0.680e-03	1.43573	0.650e-03
0.1	1.41114	0.170e-03	1.41116	0.170e-03
0.0	1.38629	0.00000	1.38629	0.00000
-0.1	1.36114	0.170e-03	1.36116	0.180e-03
-0.2	1.33570	0.650e-03	1.33573	0.730e-03
-0.3	1.30994	0.144e-02	1.31000	0.167e-02
-0.4	1.28388	0.253e-02	1.28398	0.305e-02
-0.5	1.25752	0.391e-02	1.25766	0.490e-02

بحث و نتیجه‌گیری

این مقاله تأیید می‌کند که روش تقریبی ما که بر پایهٔ روش تائو-چبیشف است، معادلات انتگرال-دیفرانسیل تأخیری فردهلم خطی مرتبهٔ بالا با ضرایب متغیر را به دستگاه معادلات جبری خطی تبدیل می‌کند، روشی کارآمد است. نتایج عددی نشان می‌دهد که این روش برای حل مسئله می‌تواند مؤثر باشد. تقریب، با چند تغییر می‌تواند برای حل معادلات دیفرانسیل تأخیری و معادلات انتگرال-دیفرانسیل فردهلم به‌کار رود.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.9.4]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.527]

منابع

1. Jackiewicz Z., Rahman M., Welfert B. D., "Numerical solution of a Fredholm integro-differential equation modelling neural networks", Appl. Numer. Math. 56 (2006) 423-432.
2. Cao J., Wang J., "Delay-dependent robust stability of uncertain nonlinear systems with time delay", Appl. Math. Comput. 154 (2004) 289-297.
3. Wazwaz A. M., "A First Course in Integral Equations, World Scientific", River Edge, NJ, (1997).
4. Wang W., Lin C., "A new algorithm for integral of trigonometric functions with mechanization", Appl. Math. Comput. 164 (1) (2005) 71-82.
5. Rashed M. T., "Numerical solution of functional differential integral and integro-differential equations", Appl. Numer. Math. 156 (2004) 485-492.
6. Maleknejad K., Mahmoudi Y., "Numerical solution of linear Fredholm integral equation by using hybrid Taylor and block-pulse functions", Appl. Math. Comput. 149 (2004) 799-806.
7. Dehghan M., Shakeri F., "Solution of an integro-differential equation arising in oscillating magnetic fields using He’s homotopy perturbation method", Progr. In Electromagn. Res., PIER 78 (2008) 361-376.
8. Gulsu M., Ozturk Y., Sezer M., "A new collocation method for solution of mixed linear integro-differential-difference equations", Appl. Math. Comput. 216 (2010) 2183-2198.
9. Delves L. M., Mohamed J. L., "Computational Methods for Integral Equations", Cambridge University Press, Cambridge (1985).
10. Bellman R., Cook K., "Differential-Difference Equations", Academic Press (1963).
11. Maleknejad K., Aghazadeh N., "Numerical solutions of Volterra integral equations of the second kind with convolution kernel by using Taylor-series expansion method", Appl. Math. Comput. 161 (3) (2005) 915-922.
12. Karamete A., Sezer M., "A Taylor collocation method for the solution of linear integro-differential equations", Int. J. Comput. Math. 79 (9) (2002) 987-1000.
13. Tavassoli Kajani M., Ghasemi M., Babolian E., "Numerical solution of linear integro-differential equation by using sine-cosine wavelets", Appl. Math. Comput. 180 (2006) 569-574.
14. Razzaghi M., Yousefi S., "Legendre wavelets method for the nonlinear Volterra-Fredholm integral equations", Math. Comput. Simul. 70 (2005) 1-8.
15. Asady B., Tavassoli Kajani M., HadiVencheh A., Heydari A., "Solving second kind integral equations with hybrid Fourier and block-pulse functions", Appl. Math. Comput. 160 (14) (2005) 517-522.
16. Nas S., Yalcinbas S., Sezer M., "A Taylor polynomial approach for solving high order linear

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.9.4]

[DOI: 10.52547/mmr.6.4.527]

Fredholm integro-differential equations", Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. 31 (2) (2000) 213-225.

17. Zhao J., Corless R. M., "Compact finite difference method for integro-differential equations, Appl. Math. Comput. 177 (2006) 271-288.
18. Gulsu M., Sezer M., "Approximations to the solution of linear Fredholm integro-differential-difference equation of high order", J. Franklin Inst. 343 (2006) 720-737.
19. Lanczos C., "Trigonometric interpolation of empirical and analytic functions", J. Math. Phys. 17 (1938) 123-199.
20. Ortiz E. L., "The Tau method, SIAM J. Numer", Anal. Optim. 12 (1969) 480-492.
21. Canuto C., Hussaini M. Y., Quarteroni A., Zang T. A., "Spectral Methods: Fundamentals in Single Domains", Springer, Berlin (2006).
22. Mason J. C., Handscomb D. C., "Chebyshev Polynomials", CRC Press (2002).
23. Dehghan M., Saadatmandi A., "A Tau method for the one-dimensional parabolic inverse problem subject to temperature overspecification", Comput. Math. Appl. 52 (2006) 933-940.
24. Pour-Mahmoud J., Rahimi-Ardabili M. Y., Shahmorad S., "Numerical solution of the system of Fredholm integro-differential equations by the Tau method", Appl. Math. Comput. 168 (2005) 465-478.
25. Hosseini S. M., Shahmorad S., "A matrix formulation of the Tau method and Volterra linear integro-differential equations", Korean J. Comput. Appl. Math. 9 (2) (2002) 497-507.
26. Kalla S. L., Khajah H. G., "Tau approximation method of the Hubbell rectangular source integral", Radiat. Phys. Chem. 59 (1) (2000) 17-21.