



Kharazmi University

## Inference on lifetime performance index of two-parameter exponential distribution: Censored and record data

Ali Akbar Jafari<sup>1</sup> , Abbas Pak<sup>2</sup> 

1. Department of Statistics, Yazd University, Yazd, Iran. ✉E-mail: [aajafari2004@yazd.ac.ir](mailto:aajafari2004@yazd.ac.ir)

2. Department of ComputerSciences, Shahrekord University, Shahrekord, Iran. E-mail: [abba.pak1982@gmail.com](mailto:abba.pak1982@gmail.com)

---

### Article Info

#### Article type:

Research Article

#### Article history:

Received:

9 August 2020

Received in revised form:

16 December 2020

Accepted:

21 April 2021

Published online:

31 December 2022

#### Keywords:

Performance capability index, Generalized pivotal quantity, Censoring; Record.

### ABSTRACT

#### Introduction

Improving the quality, compliance rate and product life is a priority in manufacturing industries. If the performance of a process is evaluated by the lifetime of a product, it is clear that a larger lifetime indicates better product quality and higher process capability, and this process is accepted. For instance, the lifetime of electronic components exhibits a larger-the-better type of quality characteristic. The process capability index is one of the indicators for evaluating the capability of a process. To measure the larger-the-better quality characteristic, a process capability index has been defined as  $C_L = \frac{\mu-L}{\sigma}$ ,  $0 \leq L < \infty$ , where  $\mu$  and  $\sigma$  are the mean and standard deviation of the process, respectively, and  $L$  is the lower specification limit.

In various manufacturing and service processes, the assumption of normality is often not valid. The two-parameter exponential distribution has many applications in engineering, biological studies, epidemiology, and medical sciences. In engineering analysis, the location parameter is called the threshold value or warranty time and the scale parameter is the expected average as well as warranty life. If the lifetime of a manufactured product follows a two-parameter exponential distribution with location parameter  $\theta$  and scale parameter  $\lambda$ , then the capability index becomes  $C_L = 1 - \frac{1}{\lambda}(L - \theta)$ .

#### Material and methods

Since the performance capability index has been used in industries, point estimation, construction of confidence intervals, and testing the hypothesis about this index have been considered. However, the classical

---

inference cannot be applied to  $C_L$ . Therefore, we utilized the concepts of generalized pivotal quantity and generalized test variable for inference on this parameter. Here, we suppose that different kinds of schemes such as double type II censoring, progressive censoring, record values, and k-record values. In each case, the maximum likelihood and uniformly minimum variance unbiased estimators are derived. Then, a generalized confidence interval and a generalized p-value are suggested. The generalized confidence interval is evaluated by Monte Carlo simulation, and the presented approaches are illustrated using some real examples.

### Results and discussion

We study the coverage probability and expected length of the proposed generalized confidence interval for  $C_L$  under a progressive censoring scheme. We found that the coverage probability is close to the confidence coefficient. Also, it does not depend on the values of parameters and sample size. Besides, the expected length decreases when  $\lambda$  decreases (or the sample size increases). The shortest expected length of the generalized confidence interval is when the value of  $L$  is close to the location parameter  $\theta$ .

### Conclusion

The following conclusions were drawn from this research.

- The minimum variance unbiased estimator for  $C_L$  has a closed-form under all considered schemes.
- The proposed generalized inference for  $C_L$  is a satisfactory and easy approach.
- This article contains all results in other papers such as Lee et al. (2011) and Gunasekera, and Wijekularathna (2019).
- Different indicators have been introduced to evaluate the process's capability. Some of the most important ones that are widely used in manufacturing industries have been introduced by Wooluru et al. (2014). The methods introduced in this paper, can be generalized and used for these process capability indicators.

---

**How to cite:** Jafari, A., Pak, A. (2022). Inference on lifetime performance index of two-parameter exponential distribution: Censored and record data. *Mathematical Researches*, 8 (4), 19-43.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

---



Kharazmi University

# استنباط درباره شاخص عملکرد طول عمر در توزیع نمایی دو پارامتری: داده‌های سانسور شده و رکورد

علی اکبر جعفری<sup>۱</sup> ✉، عباس پاک<sup>۲</sup>

۱. نویسنده مسئول، گروه آمار، دانشگاه یزد، یزد، ایران. رایانامه: [aajafari2004@yazd.ac.ir](mailto:aajafari2004@yazd.ac.ir)

۲. گروه علوم کامپیوتر، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران. رایانامه: [abba.pak1982@gmail.com](mailto:abba.pak1982@gmail.com)

## چکیده

## اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

برای اندازه‌گیری قابلیت و پتانسیل یک فرایند معمولاً از شاخص قابلیت فرایند استفاده می‌شود. در این مقاله، به استنباط درباره این شاخص در توزیع نمایی دوپارامتری پرداخته می‌شود. شاخص قابلیت فرایند بر اساس داده‌های سانسورهای دوگانه نوع دوم، سانسور پیشرونده نوع دوم، مقادیر  $k$ -رکورد و رکورد بالایی مورد استنباط قرار می‌گیرد. در هریک از موارد، برآوردگر ماکسیمم درستنمایی و برآوردگر ناریب با کمترین واریانس بطوریکنواخت را برای این پارامتر بدست آورده و یک فاصله اطمینان تعمیم‌یافته و یک  $p$ -مقدار تعمیم‌یافته برای آزمون کردن فرض برای آن ارائه می‌شود. همچنین، این فاصله اطمینان تعمیم‌یافته با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. در انتها، چند مثال کاربردی برای تشریح روش‌ها آورده می‌شوند.

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۵/۱۹

تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۹/۲۶

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۲/۰۱

تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۱۰/۱۰

## واژه‌های کلیدی:

شاخص قابلیت فرایند، کمیت محوری تعمیم‌یافته، سانسور، رکورد.

استناد: جعفری، علی اکبر؛ پاک، عباس؛ (۱۴۰۱). استنباط درباره شاخص عملکرد طول عمر در توزیع نمایی دو پارامتری: داده‌های سانسور شده و رکورد. پژوهش‌های ریاضی، ۸ (۴)، ۱۹-۴۳.



© نویسندگان.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

## ۱- مقدمه

در صنایع تولیدی، بالابردن کیفیت، نرخ تطابق و طول عمر محصول در اولویت قرار دارد. اگر قابلیت یک فرایند با طول عمر بقای یک محصول ارزیابی شود، واضح است که طول عمر بیشتر نشان‌دهنده کیفیت بهتر محصول و قابلیت بالاتر فرایند است و این فرایند مورد قبول قرار می‌گیرد. همچنین، برآورده شدن انتظارات مشتری یکی از معیارهای ارزیابی فرایند است. از ابزارهای مؤثر برای اندازه‌گیری و ارزیابی قابلیت‌هایی کارا و بالقوه یک فرایند، شاخص‌های قابلیت فرایند هستند که بهد طور گستره برای انجام این کار استفاده می‌شوند. از این شاخص‌ها در صنایع الکترونیک برای تعیین اینکه مدارهای همبسته و نیمه‌رسانا دارای سطح کیفی مورد نظر هستند، بهره برده می‌شوند برخی از شاخص‌های قابلیت فرایند که به‌طور وسیع و معمول در صنایع تولیدی مورد استفاده قرار می‌گیرند توسط وولورو و همکاران (۲۰۱۴) مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته‌اند. منگ و همکاران (۲۰۲۰) درباره پیچیده بودن مساله آزمون فرض برای شاخص عملکردها در حالت غیرنرمال بحث کردند.

برای اندازه‌گیری مشخصه کیفیت از نوع بزرگتر-بتر<sup>۱</sup>، یک شاخص قابلیت فرایند توسط مونتگومری (۱۹۸۵) به صورت زیر تعریف شده است:

$$C_L = \frac{\mu - L}{\sigma}, \quad 0 \leq L < \infty, \quad (1)$$

که  $\mu$  و  $\sigma$  به ترتیب میانگین و انحراف استاندارد فرایند هستند و  $L$  کران پایین مشخص است. از این نوع مشخصه می‌توان به سختی، مقاومت کششی، چسبندگی و ماندگاری را نام برد.

توزیع نمایی دو پارامتری کاربردهای زیادی در مهندسی، مطالعات زیستی، اپیدمیولوژی و علوم پزشکی دارد. در تحلیل قابلیت و مهندسی، پارامتر مکان، مقدار آستانه یا زمان ضمانت نامیده می‌شود و پارامتر مقیاس، میانگین مورد انتظار عمر به‌علاوه عمر ضمانت شده است. در پزشکی، پارامترهای مکان و مقیاس به ترتیب به زمان موثر تضمین شده و اضافی مشهور هستند. در مطالعات زیستی و اپیدمیولوژی، پارامترهای مکان و مقیاس به ترتیب دوره تاخیر و میانگین زمان بیماری خوانده می‌شوند. برای کاربردهای بیشتر به زلن (۱۹۶۶) و لاولس (۱۹۸۲) مراجعه کنید.

فرض کنید که  $X$  نشان‌دهنده طول عمر یک محصول تولیدی است که دارای توزیع نمایی دو پارامتری است. تابع چگالی احتمال  $X$  به صورت زیر است:

<sup>۱</sup> Larger-the-better type

$$f_X(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x-\theta}{\lambda}}, \quad x \geq \theta \geq 0, \quad \lambda > 0,$$

که در آن  $\theta$  و  $\lambda$  به ترتیب پارامترهای مکان و مقیاس هستند. میانگین و انحراف استاندارد در توزیع نمایی دو پارامتری به ترتیب  $\mu = E(X) = \theta + \lambda$  و  $\sigma = \sqrt{Var(X)} = \lambda$  هستند. بنابراین شاخص  $C_L$  در (۱) به صورت زیر در می‌آید:

$$C_L = 1 - \frac{1}{\lambda}(L - \theta). \quad (2)$$

این شاخص با نرخ تطابق که به صورت  $P_r = P(X \geq L) = \exp(C_L - 1)$  تعریف می‌شود رابطه مستقیم دارد. در واقع، هنگامی که طول عمر یک محصول از یک مقدار مشخص بیشتر باشد، آن محصول به عنوان یک انطباق در نظر گرفته می‌شود.

برای استنباط درباره شاخص  $C_L$  در (۲) برای توزیع نمایی دو پارامتری، لی و همکاران (۲۰۱۱) برآوردگر ناریب با کمترین واریانس بطوریکنواخت (UMVUE) بر اساس نمونه‌های سانسور شده نوع دوم از راست را به دست آوردند و بر اساس آن یک روش برای آزمون کردن فرض برای  $C_L$  ارائه کردند. بر اساس مفاهیم متغیر آزمون تعمیم‌یافته و کمیت محوری تعمیم‌یافته که به ترتیب توسط تسو و ویراهاندی (۱۹۸۹) و ویراهاندی (۱۹۹۳) معرفی شده‌اند، گاناسکرا و ویجکولاراتنا (۲۰۱۸) یک فاصله اطمینان تعمیم‌یافته و  $p$ -مقدار تعمیم‌یافته بر اساس نمونه‌های سانسور شده نوع دوم از راست برای  $C_L$  معرفی کردند.

در این مقاله، به استنباط درباره شاخص  $C_L$  در توزیع نمایی دو پارامتری می‌پردازیم. ابتدا، این استنباط بر اساس نمونه‌های سانسور دوگانه نوع دوم انجام می‌گیرد. نتایج در این حالت‌ها دربرگیرنده نتایج لی و همکاران (۲۰۱۱) و گاناسکرا و ویجکولاراتنا (۲۰۱۸) هستند. در ادامه، استنباط درباره شاخص  $C_L$  بر اساس سانسور پیشرونده نوع دوم،  $k$ -رکورد و رکورد بالایی انجام می‌گیرد. روش ارائه شده در این مقاله، قابل استفاده برای استنباط درباره سایر شاخص قابلیت فرایند (معرفی شده در وولورو و همکاران، ۲۰۱۴) است.

ساختار مقاله بدین صورت است. در بخش دوم، داده‌های سانسور دوگانه نوع دوم و پیشرونده نوع دوم را در نظر گرفته و برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی و UMVUE برای  $C_L$  را به دست آورده و یک فاصله اطمینان تعمیم‌یافته و یک  $p$ -مقدار تعمیم‌یافته برای آزمون کردن این پارامتر ارائه می‌کنیم. در بخش سوم داده‌های  $k$ -رکورد و رکورد بالایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در بخش چهارم، با استفاده از شبیه‌سازی به ارزیابی

این فاصله اطمینان در حالت سانسور پیشرونده نوع دوم می‌پردازیم. چند مثال کاربردی در بخش پنجم ارائه می‌شوند.

## ۲- استنباط بر اساس داده‌های سانسور

در این بخش، به استنباط درباره شاخص قابلیت فرایند،  $C_L$ ، بر اساس سانسورهای دوگانه نوع دوم و پیشرونده نوع دوم پرداخته می‌شود. ابتدا برآورد نقطه‌ای آن را مورد بحث قرار می‌دهیم. سپس در مورد انجام آزمون فرض‌های

$$H_0: C_L \leq C_0 \quad \text{vs.} \quad H_1: C_L > C_0, \quad (3)$$

و ساختن فاصله اطمینان روشی را ارائه می‌کنیم.

### ۲-۱- سانسور دوگانه نوع دوم

فرض کنید  $X_{(i)}$  نشان‌دهنده  $i$ امین آماره ترتیبی است. فرض کنید  $X_{(r+1)} \leq X_{(r+2)} \leq \dots \leq X_{(n-s)}$  یک نمونه سانسور شده دوگانه از یک توزیع نمایی دو پارامتری است که  $r$  نمونه از چپ و  $s$  نمونه از راست سانسور شده‌اند. در این بخش فرض می‌کنیم  $n^* = n - r - p = \sum_{i=1}^{r+1} \frac{1}{(n-i+1)^2}$ ،  $q = \sum_{i=1}^{r+1} \frac{1}{(n-i+1)}$  و  $s$

$$a = \begin{cases} 0 & r = 0 \\ q & r \neq 0 \end{cases}$$

برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای  $\theta$  و  $\lambda$  بر اساس این داده‌ها به صورت زیر هستند (کامبو، ۱۹۷۸ و بالاکریشن، ۱۹۹۰):

$$\hat{\theta}^D = X_{(r+1)} + a\hat{\lambda}^D, \quad \hat{\lambda}^D = \frac{1}{n^*} \left( \sum_{i=1}^{n^*} X_{(r+i)} + sX_{(n-s)} - (n-r)X_{(r+1)} \right),$$

همچنین،  $X_{(r+1)}$  و  $\hat{\lambda}^D$  از یکدیگر مستقل هستند و

$$V = \frac{X_{(r+1)} - \theta}{\lambda} \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{r+1} \frac{V_i}{2(n-i+1)}, \quad U = \frac{2n^*\hat{\lambda}^D}{\lambda} \sim \chi^2_{(2n^*-2)}, \quad (4)$$

که  $V_i$ ها متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با توزیع کای‌اسکور با ۲ درجه آزادی هستند (چنگ و همکاران، ۲۰۱۳ را ببینید). بنابراین، برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی برای شاخص  $C_L$  در (۲) به صورت زیر است:

$$\hat{C}_L^D = 1 - \frac{1}{\hat{\lambda}^D} (L - \hat{\theta}^D) = 1 + a - \frac{1}{\hat{\lambda}^D} (L - X_{(r+1)}).$$

به آسانی می‌توان نشان داد که

$$\hat{C}_L^D \stackrel{d}{=} 1 + a - \frac{2n^*}{U} (1 - C_L - V),$$

که  $V \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{r+1} \frac{V_i}{2(n-i+1)}$  و  $V_i$ ها متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با توزیع کای‌اسکور با ۲ درجه آزادی هستند. همچنین،  $V$  و  $U \sim \chi^2_{(2n^*-2)}$  تصادفی مستقل هستند که بنابراین

$$E(\hat{C}_L^D) = 1 + a - \frac{n^*}{n^* - 2} (1 - C_L - q),$$

$$Var(\hat{C}_L^D) = \frac{n^{*2}}{(n^* - 2)^2(n^* - 3)} [(n^* - 2)p + (1 - C_L - q)^2].$$

بنابراین  $\hat{C}_L^D$  یک برآورد اریب برای  $C_L$  است.  $(\hat{\theta}^D, \hat{\lambda}^D)$  یک آماره بسنده کامل است. پس،  $UMVUE$  برای  $C_L$  به صورت زیر است:

$$\tilde{C}_L^D = 1 - q - \frac{n^* - 2}{n^*} (1 + a - \hat{C}_L^D) = 1 - q - \frac{n^* - 2}{n^*} \left( \frac{1}{\hat{\lambda}^D} (L - X_{(r+1)}) \right). \quad (5)$$

به آسانی می‌توان نشان داد که

$$Var(\tilde{C}_L^D) = \frac{1}{n^* - 3} [(n^* - 2)p + (1 - C_L - q)^2].$$

فرض کنید  $\hat{C}_L^D$  مقدار مشاهده شده آماره  $\hat{C}_L^D$  است. تعریف کنید

$$T^D = 1 - V - \frac{(1 + a - \hat{C}_L^D)U}{2n^*}, \quad (6)$$

که  $V$  و  $U$  متغیرهای تصادفی مستقل هستند و در (۴) تعریف شده‌اند.  $T^D$  یک کمیت محوری تعمیم‌یافته برای  $C_L$  است چون برای مقدار داده‌شده  $\hat{C}_L^D$ ، توزیع  $T^D$  به پارامتر مجهول بستگی ندارد و نیز مقدار مشاهده شده  $T^D$  برابر با  $C_L$  است که به پارامتر مزاحم وابسته نیست.

برای آزمون کردن فرض‌ها در (۳) می‌توان یک متغیر آزمون تعمیم‌یافته بر اساس کمیت محوری تعمیم‌یافته در (۶) به صورت زیر تعریف کرد:

$$T^{D*} = T^D - C_L.$$

توزیع  $T^{D*}$  به پارامتر مزاحم بستگی ندارد و مقدار مشاهده آن برابر صفر است که به پارامتر بستگی ندارد. همچنین،  $T^{D*}$  به‌طور تصادفی نزولی است. بنابراین  $p$ -مقدار تعمیم‌یافته برای آزمون کردن فرض‌ها در (۳) برابر است با

$$p = P(T^{D*} \leq 0 | H_0) = P(T^D \leq C_0). \quad (7)$$

برای ساختن فاصله اطمینان بر اساس کمیت محوری تعمیم‌یافته در (۶) و محاسبه  $p$ -مقدار تعمیم‌یافته در (۷) می‌توان از الگوریتم زیر استفاده کرد:

**الگوریتم:** برای  $n, r, s$  و  $\hat{C}_L^D$  داده شده

گام ۱- متغیرهای تصادفی مستقل  $V_i \sim \chi^2_{(2)}$  ( $i = 1, \dots, r+1$ ) و  $U \sim \chi^2_{(2n^*-2)}$  را تولید کنید.

گام ۲- مقدار  $V = \sum_{i=1}^{r+1} \frac{V_i}{2(n-i+1)}$  را محاسبه کنید.

گام ۳- مقدار  $T^D$  در (۶) را محاسبه کنید.

گام ۴- گام‌های ۱ تا ۳ را  $M$  بار (مثلاً ۱۰۰۰۰ بار) تکرار کنید و مقادیر به دست آمده برای  $T^D$  را  $T_1^D, T_2^D, \dots, T_M^D$  بنامید.

گام ۴- مقادیر  $T_1^D, T_2^D, \dots, T_M^D$  را مرتب کنید و  $T_{(1)}^D, T_{(2)}^D, \dots, T_{(M)}^D$  بنامید.

گام ۵- یک فاصله اطمینان تعمیم‌یافته با ضریب اطمینان  $1 - \alpha$  برای  $C_L$  برابر است با  $(T_{(M\alpha/2)}^D, T_{(M(1-\alpha/2))}^D)$ ، و یک برآورد برای  $p$ -مقدار تعمیم‌یافته در (۷) برابر است با میانگین تعداد مواردی که  $T_i^D$ ها کمتر از  $C_0$  هستند.

**تذکر:** اگر  $r = 0$  و  $n - s = s^*$  آنگاه سانسور دوگانه نوع دوم به سانسور نوع دوم از راست تبدیل می‌شود و در واقع یک نمونه از توزیع نمایی دو پارامتری با سانسور نوع دوم از راست در اختیار داریم (برای جزئیات بیشتر به ایشیتین و زوبل، ۱۹۵۴ و ایشیتین، ۱۹۶۰ مراجعه کنید). بر اساس (۵)، UMVUE برای  $C_L$  در سانسور نوع دوم از راست به صورت زیر درمی‌آید:

$$\tilde{C}_L^T = 1 - \frac{1}{n} - \frac{s^* - 2}{s^*} \left( \frac{1}{\hat{\lambda}^T} (L - X_{(1)}) \right),$$

که

$$\hat{\lambda}^T = \frac{1}{s^*} \left( \sum_{i=1}^{s^*} X_{(i)} + (n - s^*)X_{(s^*)} - nX_{(1)} \right) = \frac{1}{s^*} \left( \sum_{i=2}^{s^*} (n - i + 1)(X_{(i)} - X_{(i-1)}) \right).$$

این برآوردگر با برآوردگر ارائه‌شده توسط لی و همکاران (۲۰۱۱) یکسان است. همچنین، کمیت محوری تعمیم‌یافته در (۶) با کمیت محوری تعمیم‌یافته ارائه شده توسط گاناسکرا و ویجکولاراتنا (۲۰۱۸) برای  $C_L$  در سانسور نوع دوم از راست یکسان است اگرچه روش ارائه شده توسط آنها متفاوت است. تذکر: اگر  $r = 0$  و  $s = 0$  آنگاه یک نمونه تصادفی کامل (بدون سانسور)  $X_1, X_2, \dots, X_n$  از توزیع نمایی دو پارامتری با پارامترهای مکان  $\theta$  و مقیاس  $\lambda$  در اختیار داریم. برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای  $\theta$  و  $\lambda$  بر اساس این داده‌ها به صورت زیر هستند (لاولس، ۱۹۸۲):

$$\hat{\theta} = X_{(1)}, \quad \hat{\lambda} = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n (X_i - X_{(1)}) \right) = \bar{X} - X_{(1)},$$

که از یکدیگر مستقل هستند و بنابراین، برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی برای شاخص  $C_L$  به صورت زیر است:

$$\hat{C}_L = 1 - \frac{1}{\hat{\lambda}} (L - \hat{\theta}) = 1 - \frac{1}{\bar{X} - X_{(1)}} (L - X_{(1)}).$$

همچنین،  $UMVUE$  برای  $C_L$  به صورت زیر است:

$$\tilde{C}_L = 1 - \frac{1}{n} - \frac{n-2}{n} (1 - \hat{C}_L) = 1 - \frac{1}{n} - \frac{n-2}{n} \left( \frac{1}{\bar{X} - X_{(1)}} (L - X_{(1)}) \right).$$

فرض کنید  $\hat{C}_L$  مقدار مشاهده شده آماره  $\hat{C}_L$  است. یک کمیت محوری تعمیم‌یافته برای  $C_L$  بر اساس (۶) به صورت

$$T = 1 - \frac{V}{2n} - \frac{(1 - \hat{C}_L)U}{2n},$$

است که  $V$  و  $U$  متغیرهای تصادفی مستقل هستند و

$$V = \frac{2n(\hat{\theta} - \theta)}{\lambda} \sim \chi_{(2)}^2, \quad U = \frac{2n\hat{\lambda}}{\lambda} \sim \chi_{(2n-2)}^2.$$

## ۲-۲- سانسور پیشرونده نوع دوم

در این جا، داده‌های حاصل از سانسور پیشرونده نوع دوم از راست بر اساس  $n$  واحد با توزیع نمایی دو پارامتری را در نظر می‌گیریم. فرض کنید که این ثابت در نظر گرفته شده که تنها  $m$  شکست مشاهده خواهد شد و وقتی در زمان  $X_{(1)}$  اولین شکست رخ داد، از  $n - 1$  واحد سالم،  $r_1$  واحد به تصادف از آزمایش حذف می‌شوند. هنگامی که در زمان  $X_{(2)}$  دومین شکست رخ داد، از  $n - r_1 - 2$  واحد سالم،  $r_2$  واحد به تصادف از آزمایش حذف می‌شوند. این کار ادامه پیدا می‌کند تا اینکه  $m$  امین شکست یعنی  $X_{(m)}$  رخ دهد و تمام  $r_m = n - r_1 - \dots - r_{m-1} - m$  واحد سالم از آزمایش حذف می‌شوند. در این جا مشاهدات به صورت  $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$  هستند. برای جزئیات بیشتر می‌توانید به بالاکریشان و آگاروالا (۲۰۰۰) و بالاکریشان (۲۰۰۷) مراجعه نمایید.

ویوروس و بالاکریشان (۱۹۹۴) نشان دادند که در توزیع نمایی دوپارامتری، برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی پارامترهای  $\theta$  و  $\lambda$  بر اساس این داده‌ها به صورت زیر هستند (بالاکریشان و کرامر، ۲۰۱۴، صفحه ۲۷۰)

$$\hat{\theta}^P = X_{(1)}, \quad \hat{\lambda}^P = \frac{1}{m} \left( \sum_{i=1}^m (r_i + 1)(X_{(i)} - X_{(1)}) \right),$$

که از یکدیگر مستقل هستند و

$$V = \frac{2n(\hat{\theta}^P - \theta)}{\lambda} \sim \chi_{(2)}^2, \quad U = \frac{2m\hat{\lambda}^P}{\lambda} \sim \chi_{(2m-2)}^2. \quad (۸)$$

بنابراین، برآوردگر ماکسیمم درستنمایی برای شاخص  $C_L$  در (۳) به صورت زیر است:

$$\hat{C}_L^P = 1 - \frac{1}{\hat{\lambda}^P} (L - \hat{\theta}^P) = 1 - \frac{1}{\hat{\lambda}^P} (L - X_{(1)}).$$

به آسانی می‌توان نشان داد که

$$\hat{C}_L^P \stackrel{d}{=} 1 - \frac{2m}{U} \left( 1 - C_L - \frac{V}{2n} \right),$$

که  $U$  و  $V$  متغیرهای تصادفی مستقل هستند که  $U \sim \chi_{(2m-2)}^2$  و  $V \sim \chi_{(2)}^2$ . بنابراین

$$E(\hat{C}_L^P) = 1 - \frac{m}{m-2} \left( 1 - C_L - \frac{1}{n} \right),$$

$$\text{Var}(\hat{C}_L^P) = \frac{m^2}{(m-2)^2(m-3)} \left[ \frac{m-2}{n^2} - \left( 1 - C_L - \frac{1}{n} \right)^2 \right].$$

بنابراین  $\hat{C}_L^P$  یک برآورد اریب برای  $C_L$  است.  $(\hat{\theta}, \hat{\lambda})$  یک آماره بسنده کامل است. پس، UMVUE برای  $C_L$  به صورت زیر است:

$$\tilde{C}_L^P = 1 - \frac{1}{n} - \frac{m-2}{m} (1 - \hat{C}_L^P) = 1 - \frac{1}{n} - \frac{m-2}{m} \left( \frac{1}{\hat{\lambda}^P} (L - X_{(1)}) \right).$$

به آسانی می‌توان نشان داد که

$$Var(\tilde{C}_L^P) = \frac{1}{n-3} \left[ \frac{m-2}{n^2} + \left( 1 - C_L - \frac{1}{n} \right)^2 \right].$$

فرض کنید  $\hat{C}_L^P$  مقدار مشاهده شده آماره  $\hat{C}_L^P$  است. تعریف کنید

$$T^P = 1 - \frac{V}{2n} - \frac{(1 - \hat{C}_L^P)U}{2m}, \quad (9)$$

که  $U$  و  $V$  متغیرهای تصادفی مستقل هستند و در (۸) تعریف شده‌اند.  $T^P$  یک کمیت محوری تعمیم‌یافته برای  $C_L$  است.

### ۳- استنباط بر اساس داده‌های رکورد و $k$ -رکورد

فرض کنید  $X_1, X_2, \dots$  یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع است. مشاهده  $X_j$  یک رکورد بالایی نامیده می‌شود اگر مقدار آن، از تمام مقادیر قبلی بزرگتر باشد. یعنی  $X_j > X_i$  برای تمام  $i < j$ . فرض می‌کنیم که  $X_j$  در زمان  $j$  رخ داده است. بنابراین، دنباله زمان رکورد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_1 = 1, \quad T_n = \min\{j: X_j > X_{T_{n-1}}\}, \quad n = 2, 3, \dots$$

دنباله مقادیر رکورد بالایی،  $R_1, \dots, R_n$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R_n = X_{T_n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

اولین مطالعه آماری از مقادیر رکورد و زمان‌های رکورد توسط چاندلر (۱۹۵۲) انجام شد و مطالعات زیادی در مورد اینگونه داده‌ها توسط نویسندگان دیگر انجام شده است. آرنولد و همکاران (۱۹۹۸) یک مرجع مفید در زمینه نمادگذاری و خواص رکوردها است.

رکورد بالایی به  $k$ -رکورد بالایی تعمیم‌داده شده است و در اصطلاح  $k$ امین بزرگترین  $X$  مشاهده شده معنی می‌شود. در حالت خاص، اگر  $k = 1$  آنگاه این فرایند به رکورد بالایی تبدیل می‌شود. دنباله  $k$ -رکورد بالایی

توسط دزیوب دزیلا و کوپوچونسکی (۱۹۷۶) تعریف شده است. برای یک تعریف رسمی، تعریف ارائه شده توسط آرنولد و همکاران (۱۹۹۸)، صفحه ۴۸، در حالت پیوسته را در نظر می‌گیریم. فرض کنید که  $X_{i:m}$  نشان‌دهنده نامین آماره ترتیبی در یک نمونه به اندازه  $m$  است. برای ثابت  $k$ ، دنباله مقادیر  $k$ -رکورد بالایی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R_{n(k)} = X_{T_{n(k)}-k+1:T_{n(k)}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\text{که } T_{1(k)} = k \text{ و}$$

$$T_{n(k)} = \min \{j: j > T_{n-1(k)}, X_j > X_{T_{n-1(k)}-k+1:T_{n-1(k)}}\}, \quad n = 2, 3, \dots$$

توجه کنید که اولین  $k$ -رکورد بالایی، کوچکترین مشاهده یک دنباله متناهی به صورت  $X_1, X_2, \dots, X_k$  است.

فرض کنید  $R_{1(k)}, R_{2(k)}, \dots, R_{m(k)}$  مقادیر  $k$ -رکورد بالایی از توزیع نمایی با پارامتر مکان  $\theta$  و پارامتر مقیاس  $\lambda$  است. احمدی و دوست‌پرست (۲۰۰۸) نشان دادند که برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها بر اساس این داده‌های  $k$ -رکورد به صورت زیر هستند:

$$\hat{\theta}^R = R_{1(k)}, \quad \hat{\lambda}^R = \frac{k}{m} (R_{m(k)} - R_{1(k)}). \quad (10)$$

که از یکدیگر مستقل هستند و

$$V = \frac{2k(\hat{\theta}^R - \theta)}{\lambda} \sim \chi_{(2)}^2, \quad U = \frac{2m\hat{\lambda}^R}{\lambda} \sim \chi_{(2m-2)}^2. \quad (11)$$

بنابراین، برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی برای شاخص  $C_L$  در (۳) به صورت زیر است:

$$\hat{C}_L^R = 1 - \frac{1}{\hat{\lambda}^R} (L - \hat{\theta}^R) = 1 - \frac{m}{k(R_{m(k)} - R_{1(k)})} (L - R_{1(k)}). \quad (12)$$

به آسانی می‌توان نشان داد که

$$\hat{C}_L^R \stackrel{d}{=} 1 - \frac{2m}{U} \left(1 - C_L - \frac{V}{2k}\right),$$

که  $V$  و  $U$  متغیرهای تصادفی مستقل هستند و  $V \sim \chi_{(2)}^2$  و  $U \sim \chi_{(2m-2)}^2$ . بنابراین

$$E(\hat{C}_L^R) = 1 - \frac{m}{m-2} \left(1 - C_L - \frac{1}{k}\right),$$

$$\text{Var}(\hat{C}_L^R) = \frac{m^2}{(m-2)^2(m-3)} \left[ \frac{m-2}{m^2} + \left(1 - C_L - \frac{1}{k}\right)^2 \right].$$

بنابراین  $\hat{C}_L^R$  یک برآورد اریب برای  $C_L$  است.  $(\hat{\theta}, \hat{\lambda})$  یک آماره بسنده کامل است. پس،  $UMVUE$  برای  $C_L$  به صورت زیر است:

$$\tilde{C}_L^R = 1 - \frac{1}{k} - \frac{m-2}{m} (1 - \hat{C}_L^R) = 1 - \frac{1}{k} - \frac{m-2}{k(R_{m(k)} - R_{1(k)})} (L - R_{1(k)}).$$

به آسانی می‌توان نشان داد که

$$Var(\tilde{C}_L^R) = \frac{1}{m-3} \left[ \frac{m-2}{m^2} + \left( 1 - C_L - \frac{1}{k} \right)^2 \right].$$

فرض کنید  $\hat{C}_L^R$  مقدار مشاهده شده آماره  $\hat{C}_L^R$  است. تعریف کنید

$$T^R = 1 - \frac{V}{2k} - \frac{U(1 - \hat{C}_L^R)}{2m},$$

که  $U$  و  $V$  متغیرهای تصادفی مستقل هستند و در (۱۱) تعریف شده‌اند.  $T^R$  یک کمیت محوری تعمیم‌یافته برای  $C_L$  است

**نکته:** اگر  $k = 1$  آنگاه  $k$ -رکورد بالایی به رکورد بالایی تبدیل می‌شود و تمامی استنباط‌های گفته‌شده در این بخش برای  $C_L$  بر اساس رکورد بالایی قابل استفاده است. برای جزئیات بیشتر در مورد رکورد بالایی از توزیع نمایی دو پارامتری می‌توانید اصغرزاده و عبدی (۲۰۱۱) را ببینید.

**نکته:** توجه کنید که  $\hat{\theta}^R$  و توزیع آن به اندازه نمونه بستگی ندارند. بنابراین، در این حالت برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی در (۱۰) بطورمجانبی دارای توزیع نرمال نیستند. بنابراین،  $\hat{C}_L^R$  در (۱۲) بطورمجانبی دارای توزیع نرمال نیست.

#### ۴- مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش، با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو به ارزیابی فاصله اطمینان تعمیم‌یافته می‌پردازیم و احتمال پوشش و متوسط طول آن را به دست می‌آوریم. در اینجا داده‌های حاصل از الگوی سانسور پیش‌رونده نوع دوم از راست در نظر می‌گیریم. پارامتر  $\lambda$  را مقادیر ۰/۰۱، ۱ و ۵، در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که  $\theta = 1$ . مقدار  $m$  را برابر ۱۸، ۱۳ و ۱۰ در نظر گرفته و از آنجایی که باید  $m < n$  پس  $n$  را مقادیر ۲۰ و ۳۰ در نظر گرفتیم. (توجه کنید که با در نظر گرفتن سایر مقادیر پارامترها، نتایج یکسانی حاصل می‌گردند) برای  $m, n, \theta$  و  $\lambda$  داده‌شده، مقادیر  $\hat{\theta}$  و  $\hat{\lambda}$  را از روابط زیر تولید می‌کنیم:

$$\hat{\theta}^P \sim \frac{\lambda}{2n} \chi_{(2)}^2 + \theta, \quad \hat{\lambda}^P \sim \frac{\lambda}{2m} \chi_{(2m-2)}^2.$$

برای مقدار داده شده  $L$ ، مقدار  $\hat{C}_L^P$  را به دست می‌آوریم. با استفاده از شبیه‌سازی (مشابه با الگوریتم ۱) با  $M = 10000$  بار تکرار، یک فاصله اطمینان تعمیم‌یافته با ضریب ۹۵ درصد برای  $C_L$  بر اساس کمیت محوری تعمیم‌یافته  $T^P$  در (۹) ایجاد می‌کنیم. شبیه‌سازی را ۱۰۰۰۰ بار تکرار کرده و متوسط تعداد مواردی که پارامتر  $C_L$  در فاصله اطمینان ایجاد شده قرار می‌گیرد را می‌شماریم تا احتمال پوشش فاصله اطمینان را به دست آوریم. همچنین، متوسط طول فاصله اطمینان‌های ایجاد شده را به دست می‌آوریم. نتایج در جدول‌های ۱ و ۲ آورده شده‌اند. از این جدول‌ها نتایج زیر استخراج می‌شوند:

- ۱- احتمال پوشش فاصله اطمینان تعمیم‌یافته ارائه شده همواره نزدیک به ضریب اطمینان ۹۵ درصد است. در واقع، احتمال پوشش به مقادیر پارامترها و اندازه  $n$  و  $m$  وابستگی ندارد.
- ۲- فاصله اطمینان تعمیم‌یافته زمانی کوتاه‌ترین طول را دارد که  $L = 1$ . این موارد در جدول‌ها تیره شده‌اند. به نظر می‌رسد که این حالت زمانی رخ می‌دهد که مقدار  $L$  برابر با پارامتر  $\theta$  است.
- ۳- با افزایش  $\lambda$ ، طول فاصله اطمینان کاهش می‌یابد.
- ۴- با افزایش  $m$ ، طول فاصله اطمینان افزایش می‌یابد.
- ۵- با کاهش  $m$ ، طول فاصله اطمینان افزایش می‌یابد.
- ۶- فاصله اطمینان زمانی بیشترین طول را دارد که  $\lambda$  و  $m$  کوچک ولی  $n$  بزرگ است.

جدول ۱: احتمال پوشش و متوسط طول فاصله اطمینان تعمیم‌یافته برای  $C_L$  با  $n = 20$

$L$	احتمال پوشش								
	$m = 18$			$m = 13$			$m = 10$		
	$\lambda = 0.01$	$\lambda = 1$	$\lambda = 5$	$\lambda = 0.01$	$\lambda = 1$	$\lambda = 5$	$\lambda = 0.01$	$\lambda = 1$	$\lambda = 5$
0.01	0.954	0.954	0.951	0.948	0.949	0.950	0.948	0.946	0.947
0.1	0.949	0.947	0.948	0.947	0.952	0.950	0.945	0.953	0.947
0.5	0.952	0.947	0.950	0.951	0.952	0.951	0.946	0.950	0.948
1	0.950	0.952	0.950	0.948	0.946	0.948	0.950	0.954	0.948
2	0.952	0.950	0.956	0.953	0.955	0.946	0.947	0.946	0.950
5	0.951	0.951	0.949	0.954	0.949	0.952	0.948	0.946	0.948
10	0.954	0.950	0.952	0.950	0.950	0.952	0.945	0.949	0.948
$L$	متوسط طول								
	$m = 18$			$m = 13$			$m = 10$		
	$\lambda = 0.01$	$\lambda = 1$	$\lambda = 5$	$\lambda = 0.01$	$\lambda = 1$	$\lambda = 5$	$\lambda = 0.01$	$\lambda = 1$	$\lambda = 5$
0.01	99.49	1.06	0.33	122.10	1.30	0.38	143.03	1.53	0.43
0.1	90.42	0.98	0.31	110.83	1.18	0.36	130.69	1.40	0.41
0.5	50.41	0.59	0.26	61.66	0.71	0.28	72.80	0.83	0.32
1	<b>0.20</b>	<b>0.20</b>	<b>0.20</b>	<b>0.21</b>	<b>0.21</b>	<b>0.21</b>	<b>0.23</b>	<b>0.23</b>	<b>0.23</b>
2	100.14	0.98	0.26	123.37	1.19	0.27	145.10	1.40	0.31
5	401.58	3.94	0.78	490.00	4.89	0.95	577.07	5.73	1.12
10	901.07	9.01	1.78	1110.54	11.02	2.17	1305.56	12.94	2.55

جدول ۲: احتمال پوشش و متوسط طول فاصله اطمینان تعمیم‌یافته برای  $C_L$  با  $n = 30$

$L$	احتمال پوشش								
	$m = 18$			$m = 13$			$m = 10$		
	$\lambda = 0.01$	$\lambda = 1$	$\lambda = 5$	$\lambda = 0.01$	$\lambda = 1$	$\lambda = 5$	$\lambda = 0.01$	$\lambda = 1$	$\lambda = 5$
0.01	0.948	0.952	0.948	0.950	0.953	0.951	0.954	0.949	0.950
0.1	0.946	0.949	0.955	0.951	0.947	0.948	0.954	0.951	0.953
0.5	0.952	0.951	0.952	0.951	0.950	0.952	0.953	0.953	0.951
1	0.952	0.953	0.950	0.949	0.945	0.948	0.950	0.953	0.950
2	0.951	0.952	0.947	0.954	0.950	0.952	0.955	0.954	0.949
5	0.946	0.951	0.943	0.952	0.952	0.951	0.951	0.953	0.954
10	0.949	0.951	0.954	0.954	0.951	0.950	0.952	0.955	0.954
$L$	متوسط طول								
	$m = 18$			$m = 13$			$m = 10$		
	$\lambda = 0.01$	$\lambda = 1$	$\lambda = 5$	$\lambda = 0.01$	$\lambda = 1$	$\lambda = 5$	$\lambda = 0.01$	$\lambda = 1$	$\lambda = 5$
0.01	99.83	1.04	0.28	122.60	1.27	0.32	145.25	1.50	0.37
0.1	91.14	0.95	0.26	111.14	1.16	0.30	132.08	1.38	0.34
0.5	50.26	0.56	0.20	61.82	0.67	0.22	74.08	0.79	0.24
1	<b>0.13</b>	<b>0.13</b>	<b>0.13</b>	<b>0.14</b>	<b>0.14</b>	<b>0.14</b>	<b>0.14</b>	<b>0.14</b>	<b>0.14</b>
2	100.66	0.98	0.21	123.31	1.20	0.25	146.86	1.42	0.28
5	403.35	3.98	0.79	493.74	4.91	0.95	589.32	5.85	1.14
10	908.06	9.07	1.78	1112.41	11.11	2.19	1326.60	13.16	2.59

### ۵- چند مثال تشریحی

در این بخش، به تشریح استنباط‌های بحث‌شده در بخش‌های قبل برای شاخص قابلیت فرایند،  $C_L$ ، در توزیع نمایی دو پارامتری با استفاده از چند مثال پرداخته می‌شود. در هر یک از طرح‌های نمونه‌گیری (یا الگوی داده‌ها)، برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی (MLE)، UMVUE و کران‌های پایین (Lower) و بالایی (Upper) فاصله اطمینان تعمیم‌یافته با ضریب اطمینان ۹۵ درصد برحسب مقادیر مختلف  $L$  رسم شده‌اند.

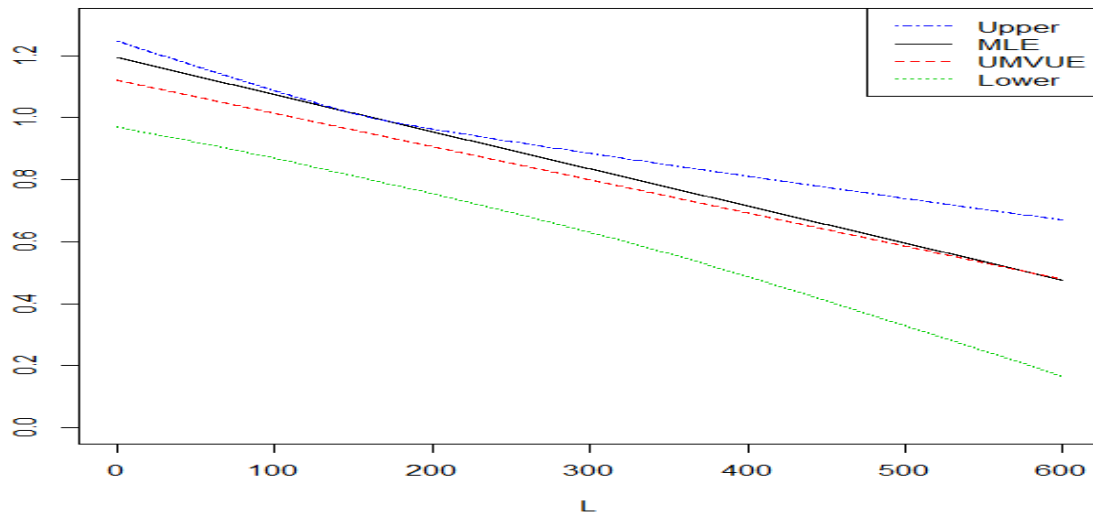
**مثال ۵-۱-** این مجموعه داده از گرابس (۱۹۷۱) برگرفته شده‌اند و نشان‌دهنده مسافت‌های پیموده شده توسط ۱۹ محموله نظامی است که در هنگام خدمت خراب شده‌اند. داده‌ها بر حسب مایل به صورت زیر هستند:

۱۶۲، ۲۰۰، ۲۷۱، ۳۰۲، ۳۹۳، ۵۰۸، ۵۳۹، ۵۲۹، ۷۰۶، ۷۷۷،  
۸۸۴، ۱۰۰۸، ۱۱۰۱، ۱۱۸۲، ۱۴۶۳، ۱۹۸۴، ۲۳۵۵، ۲۸۸۰

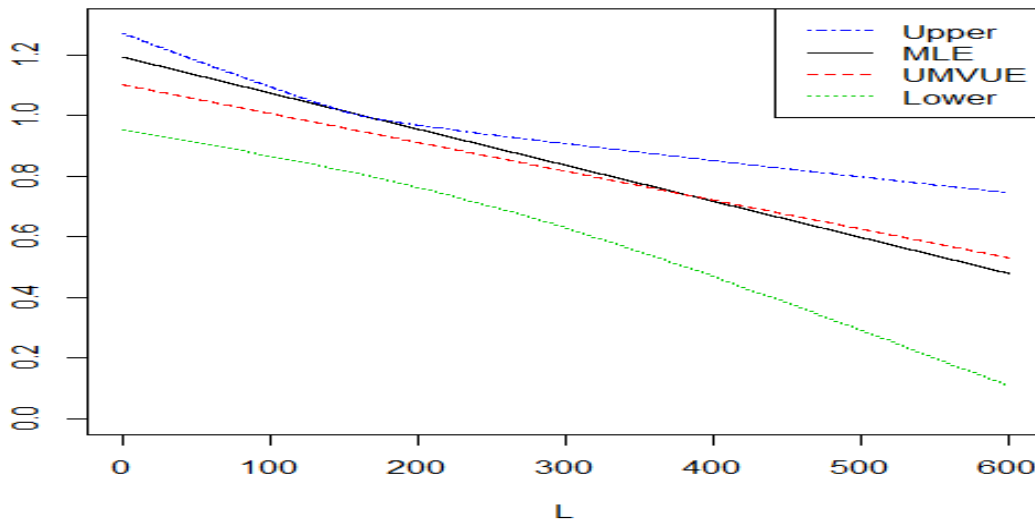
این داده‌ها توسط انگل‌هارد و بین (۱۹۷۸) مورد بررسی قرار گرفته است و نشان داده شده است که توزیع نمایی دو پارامتری برای این داده‌ها مناسب است.

این داده‌ها توسط وو و همکاران (۲۰۰۷) مورد مطالعه قرار گرفته است. برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی برای  $\theta$  و  $\lambda$  به ترتیب ۱۶۲ و  $835/21$  هستند. نتایج استنباط درباره شاخص قابلیت فرایند،  $C_L$ ، در شکل ۱ آورده شده‌اند. همانگونه که مشاهده می‌شود که طول فاصله اطمینان ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. هنگامی که مقدار  $L$  برابر با ۱۶۲ (مقدار برآورد ماکسیمم درست‌نمایی  $\theta$ ) است، فاصله اطمینان دارای کوتاهترین طول است.

فرناندز (۲۰۰۷) فرض کرد که تنها ۱۰ مشاهده اول از داده‌های بالا در دسترس هستند. در این حالت، یک نمونه سانسور شده نوع دوم از راست با  $n = 19$  و  $s^* = 10$  را در اختیار داریم. بنابراین، برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی برای  $\theta$  و  $\lambda$  به ترتیب ۱۶۲ و  $840/2$  هستند. نتایج استنباط درباره شاخص قابلیت فرایند،  $C_L$ ، در شکل ۲ آورده شده‌اند. همانگونه که مشاهده می‌شود که طول فاصله اطمینان ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. هنگامی که مقدار  $L$  برابر با ۱۶۲ (مقدار برآورد ماکسیمم درست‌نمایی  $\theta$ ) است، فاصله اطمینان دارای کوتاهترین طول است.



شکل ۱: نمودار برآوردگرها همراه با کران‌های فاصله اطمینان برای داده‌های کامل مثال ۵-۱.



شکل ۲: نمودار برآوردگرها همراه با کران‌های فاصله اطمینان برای داده‌های سانسور شده مثال ۵-۱.

مثال ۵-۲- داده‌های این مثال از لاولس (۱۹۸۲) برگرفته شده است و نشان‌دهنده طول بهبودی (بر حسب سال) ۲۰ بیمار مبتلا به لوسمی (سرطان خون) است که با یک دارو درمان شده‌اند. این داده‌ها به صورت زیر هستند:

1.013 1.034 1.109 1.169 1.266 1.509 1.533 1.563 1.716 1.929  
1.965 2.061 2.344 2.546 2.626 2.778 2.951 3.413 4.118 5.136

وو (۲۰۰۷) و چنگ و همکاران (۲۰۱۳) یک طرح سانسور دوگانه نوع دوم با حذف  $r = 2$  کوچکترین مشاهدات و  $s = 5$  بزرگترین مشاهدات در نظر گرفتند. بر این اساس، مشاهدات سانسور شده دوگانه نوع دوم به صورت زیر هستند:

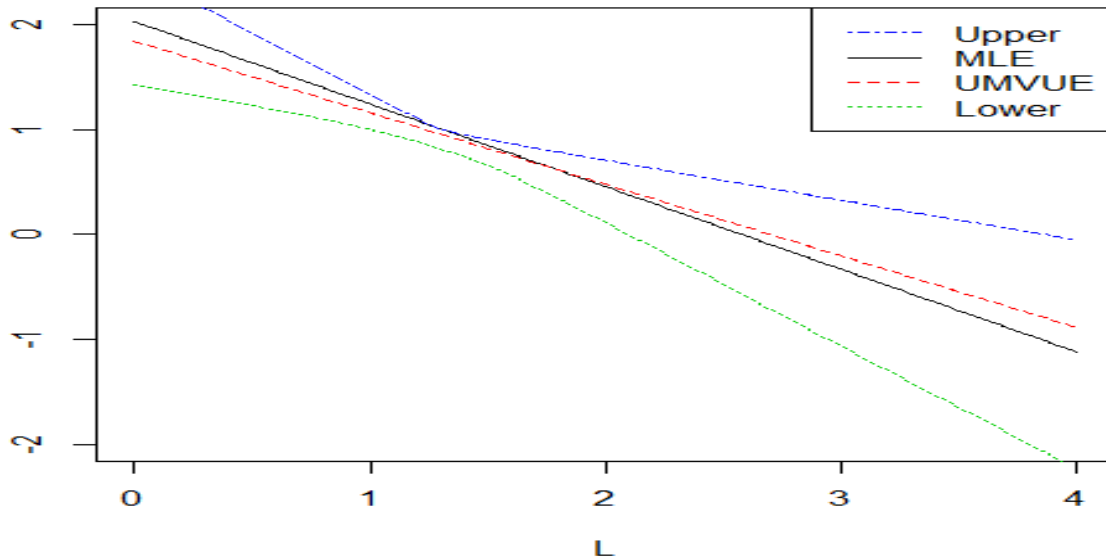
$$(X_3, \dots, X_{15}) = (1.109, 1.169, 1.266, 1.509, 1.533, 1.563, \\ 1.716, 1.929, 1.965, 2.061, 2.344, 2.546, 2.626)$$

برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی برای  $\theta$  و  $\lambda$  به ترتیب  $1/310$  و  $1/270$  هستند. نتایج استنباط درباره شاخص قابلیت فرایند،  $C_L$ ، در شکل ۳ آورده شده‌اند. همانگونه که مشاهده می‌شود که طول فاصله اطمینان ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. هنگامی که مقدار  $L$  برابر با  $1/310$  (مقدار برآوردگر ماکسیمم درستنمایی  $\theta$ ) است، فاصله اطمینان دارای کوتاهترین طول است.

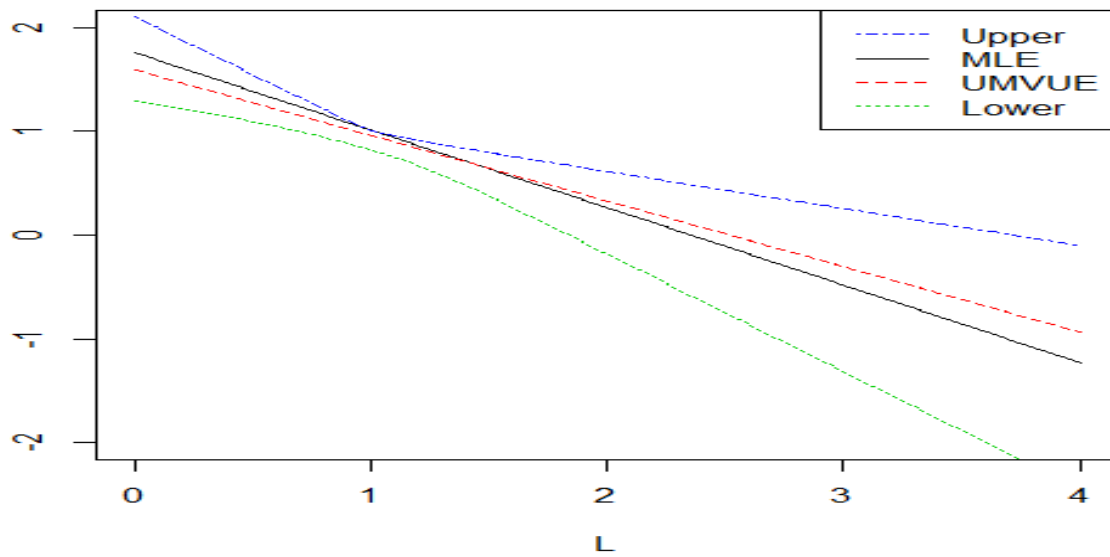
وو (۲۰۱۰) و چنگ و همکاران (۲۰۱۳) یک سانسور پیشرونده نوع دوم با  $n = 20$  و  $m = 13$  را در نظر گرفتند که الگوی سانسور به صورت  $(r_1, r_2, r_3, \dots, r_{13}) = (1, 1, 0, \dots, 0, 5)$  است. بر این اساس، مشاهدات این سانسور به صورت زیر هستند:

$$(X_1, \dots, X_{13}) = (1.013, 1.034, 1.109, 1.266, 1.509, 1.533, \\ 1.563, 1.929, 1.965, 2.061, 2.344, 2.546, 2.626)$$

برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی برای  $\theta$  و  $\lambda$  به ترتیب  $1/13$  و  $1/34$  هستند. نتایج استنباط درباره شاخص قابلیت فرایند،  $C_L$ ، در شکل ۴ آورده شده‌اند. همانگونه که مشاهده می‌شود که طول فاصله اطمینان ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. هنگامی که مقدار  $L$  برابر با  $1/13$  (مقدار برآوردگر ماکسیمم درستنمایی  $\theta$ ) است، فاصله اطمینان دارای کوتاهترین طول است.



شکل ۳: نمودار برآوردگرها همراه با کران‌های فاصله اطمینان برای داده‌های سانسور دوگانه نوع دوم مثال ۵-۲.



شکل ۴: نمودار برآوردگرها همراه با کران‌های فاصله اطمینان برای داده‌های سانسور پیشرونده نوع دوم مثال ۵-۲.

مثال ۵-۳- داده‌های زیر نشان‌دهنده زمان (بر حسب دقیقه) بین ۴۸ تماس‌های تلفنی پشت‌سرهم به یک مرکز تلفن را نشان می‌دهد. این داده‌ها توسط کاستیلو و همکاران (۲۰۰۵) ارائه شده است. آنها نشان دادند که این داده‌ها از یک توزیع نمایی دو پارامتری پیروی می‌کنند.

1.34 0.14 0.33 1.68 1.86 1.31 0.83 0.33 2.20 0.62  
 3.20 1.38 0.96 0.28 0.44 0.59 0.25 0.51 1.61 1.85  
 0.47 0.41 1.46 0.09 2.18 0.07 0.02 0.64 0.28 0.68  
 1.07 3.25 0.59 2.39 0.27 0.34 2.18 0.41 1.08 0.57  
 0.35 0.69 0.25 0.57 1.90 0.56 0.09 0.28

اصغرزاده و همکاران (۲۰۱۹)، مقادیر رکورد بالایی این مشاهدات را در نظر گرفتند. این مقادیر به صورت زیر هستند:

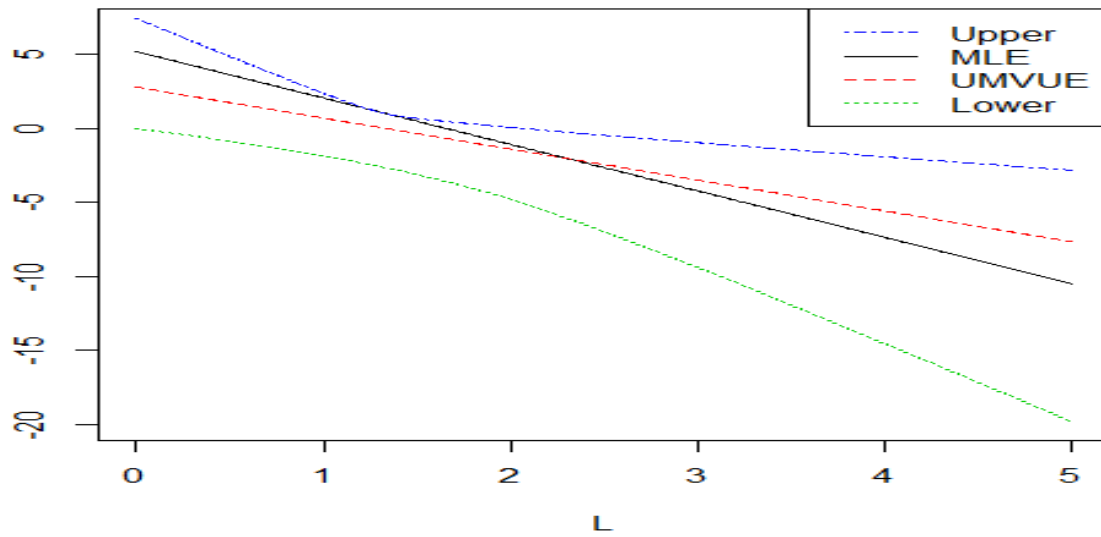
$$(R_1, \dots, R_6) = (1.34, 1.68, 1.86, 2.20, 3.20, 3.25)$$

برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی برای  $\theta$  و  $\lambda$  به ترتیب  $1/34$  و  $0/318$  هستند. نتایج استنباط درباره شاخص قابلیت فرایند،  $C_L$ ، در شکل ۵ آورده شده‌اند. همان‌گونه که مشاهده می‌شود که طول فاصله اطمینان ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. هنگامی که مقدار  $L$  برابر با  $1/34$  (مقدار برآوردگر ماکسیمم درستنمایی  $\theta$ ) است، فاصله اطمینان دارای کوتاهترین طول است.

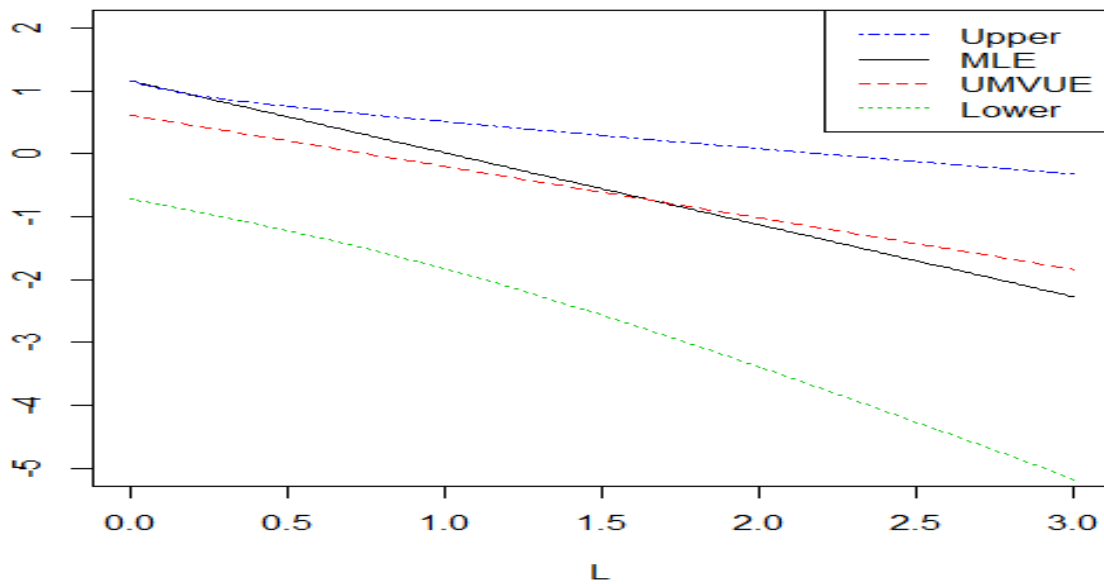
در این قسمت، مقادیر ۲-رکورد را در نظر گرفتیم. این مقادیر به صورت زیر هستند:

$$(R_{1(2)}, \dots, R_{6(2)}) = (0.14, 0.33, 1.34, 1.68, 1.86, 2.20, 3.20)$$

برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی برای  $\theta$  و  $\lambda$  به ترتیب  $0/140$  و  $0/874$  هستند. نتایج استنباط درباره شاخص قابلیت فرایند،  $C_L$ ، در شکل ۶ آورده شده‌اند. همان‌گونه که مشاهده می‌شود که طول فاصله اطمینان ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. هنگامی که مقدار  $L$  برابر با  $0/140$  (مقدار برآوردگر ماکسیمم درستنمایی  $\theta$ ) است، فاصله اطمینان دارای کوتاهترین طول است.



شکل ۵: نمودار برآوردگرها همراه با کران‌های فاصله اطمینان برای داده‌های رکورد مثال ۵-۳.



شکل ۶: نمودار برآوردگرها همراه با کران‌های فاصله اطمینان برای داده‌های ۲-رکورد مثال ۵-۳.

## ۶- نتیجه گیری

در این مقاله، تحت سانسورهای دوگانه نوع دوم، سانسور پیشرونده نوع دوم، مقادیر  $k$ -رکورد و رکورد بالایی به استنباط درباره شاخص قابلیت فرایند  $G_L$  در توزیع نمایی دوپارامتری پرداخته شده است. برآوردگر ماکسیمم درستنمایی، برآوردگر ناریب با کمترین واریانس بطوریکنواخت، یک فاصله اطمینان تعمیم یافته و یک  $p$ -مقدار تعمیم یافته برای آزمون ارائه شد. این مقاله، در حالت سانسور در برگیرنده نتایج برخی مقالات مانند لی و همکاران (۲۰۱۱) و گاناسکرا و ویجکولاراتنا (۲۰۱۸) است. نتایج شبیه سازی برای ارزیابی و احتمال پوشش و متوسط طول فاصله اطمینان تعمیم یافته تحت سانسور پیشرونده نوع دوم نشان داد که احتمال پوشش این فاصله اطمینان همواره نزدیک به سطح اطمینان است و هنگامی که مقدار  $L$  نزدیک به پارامتر مکان  $\theta$  است طول فاصله اطمینان از سایر موارد کوتاهتر است. تحت این سانسور، فاصله اطمینان زمانی بیشترین طول را دارد که  $\lambda$  و  $m$  کوچک ولی  $n$  بزرگ است. بنابراین، پیشنهاد می شود که یک روش مناسب در این حالت ارائه شود.

توجه کنید که روش های تقریبی برای ساختن فاصله اطمینان و آزمون فرض درباره  $G_L$  قابل ارائه نیستند. نکته ای که می توان به آن توجه کرد این است که شاخص ها و نسبت های متفاوتی برای ارزیابی قابلیت فرایند ارائه شده اند. برخی از مهمترین آنها که در صنایع تولیدی به طور وسیع مورد استفاده قرار می گیرند توسط وولورو و همکاران (۲۰۱۴) معرفی شده اند. روش های معرفی شده در این مقاله، علاوه بر  $G_L$ ، قابل تعمیم و استفاده برای این شاخص های قابلیت فرایند هستند. منگ و همکاران (۲۰۲۰) از استنباط تعمیم یافته برای آزمون فرض برای شاخص  $C_{pk}$  در برخی توزیع ها از جمله توزیع نمایی دوپارامتری استفاده کردند که در برخی صنایع تولیدی مانند ماشین دریل قابل کاربرد هستند.

## Reference

1. Ahmadi, J. and Doostparast, M. (2008). Statistical inference based on k-records. *Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization*, 1(1): 67-82.
2. Arnold, B.C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H.N. (1998). *Records*. New York: Wiley.
3. Asgharzadeh, A. and Abdi, M. (2011). Confidence intervals and joint confidence regions for the two-parameter exponential distribution based on records. *Communications for Statistical Applications and Methods*, 18(1), 103-110.

4. Asgharzadeh, A., Bagheri, S.F., Ibrahim, N.A. and Abubakar, M. R. (2020). Optimal confidence regions for the two-parameter exponential distribution based on records. *Computational Statistics*, 35(1):309-326.
5. Balakrishnan, N. (1990). On the maximum likelihood estimation of the location and scale parameters of exponential distribution based on multiply Type II censored samples. *Journal of Applied Statistics*, 17(1):55-61.
6. Balakrishnan, N. (2007). Progressive censoring methodology: An appraisal. *Test*, 16(2):211-259.
7. Balakrishnan, N. and Aggarwala, R. (2000). *Progressive Censoring: Theory, Methods, and Applications*. Birkhauser, Boston.
8. Balakrishnan, N. and Cramer, E. (2014). *The Art of Progressive Censoring*. Birkhauser, New York.
9. Castillo, E., Hadi, A.S., Balakrishnan, N., Sarabia, J.M. (2005). Extreme value and related models with applications in engineering and science. Wiley, Hoboken
10. Chandler, K.N. (1952). The distribution and frequency of record values. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 14(2):220-228.
11. Cheng, C., Chen, J. and Bai, J. (2013). Exact inferences of the two-parameter exponential distribution and Pareto distribution with censored data. *Journal of Applied Statistics*, 40(7):1464-1479.
12. Dziubdziela, W. and Kopocinski, B. (1976). Limiting properties of the k-th record values, *Zastosowania Matematyki*. 15, 187–190.

13. Engelhardt, M. and Bain, L. J. (1978). Tolerance limits and confidence limits on reliability for the two-parameter exponential distribution. *Technometrics*, 20(1):37-39.
14. Epstein, B. (1960). Estimation of the parameters of two parameter exponential distributions from censored samples. *Technometrics*, 2(3):403-406.
15. Epstein, B. and Sobel, M. (1954). Some theorems relevant to life testing from an exponential distribution. *The Annals of Mathematical Statistics*, 25(2):373-381.
16. Fernandez, A.J. (2007). On calculating generalized confidence intervals for the two-parameter exponential reliability function. *Statistics*, 41(2):129-135.
17. Grubbs, F.E. (1971). Approximate fiducial bounds on reliability for the two parameter negative exponential distribution. *Technometrics*, 13(4):873-876.
18. Gunasekera, S. and Wijekularathna, D. K. (2019). Generalized confidence limits for the performance index of the exponentially distributed lifetime. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 48(3):755-773.
19. Kambo, N. (1978). Maximum likelihood estimators of the location and scale parameters of the exponential distribution from a censored sample. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 7(12):1129-1132.
20. Kamps, U. (1995). *A Concept of Generalized Order Statistics*. B.G. Teubner Stuttgart, Germany.
21. Lawless, J.E. (1982). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, John Wiley & Sons, New York.
22. Lee, H.M., Wu, J.W., Lei, C.L. and Hung, W.L. (2011). Implementing lifetime performance index of products with two-parameter exponential distribution. *International Journal of Systems Science*, 42(8):1305-1321.

23. Meng, F., Yang, J. and Huang, S. (2020). Hypothesis testing of process capability index Cpk from the perspective of generalized fiducial inference. *Quality and Reliability Engineering International*. doi: 10.1002/qre.2814.
24. Montgomery, D.C. (1985). *Introduction to Statistical Quality Control*, John Wiley & Sons, New York.
25. Tsui, K.W. and Weerahandi, S. (1989). Generalized p-values in significance testing of hypotheses in the presence of nuisance parameters. *Journal of the American Statistical Association*, 84(406), 602-607.
26. Viveros, R. and Balakrishnan, N. (1994). Interval estimation of parameters of life from progressively censored data. *Technometrics*, 36(1), 84-91.
27. Weerahandi, S. (1993). Generalized confidence intervals. *Journal of the American Statistical Association*, 88(423), 899-905.
28. Wu, S.-F. (2007). Interval estimation for the two-parameter exponential distribution based on the doubly type II censored sample. *Quality & quantity*, 41(3):489-496.
29. Wu, S.-F. (2010). Interval estimation for the two-parameter exponential distribution under progressive censoring. *Quality & Quantity*, 44(1):181-189.
30. Wooluru, Y., Swamy, D.R. and Nagesh, P. (2014). The process capability analysis-A tool for process performance measures and metrics-A case study. *International Journal for Quality Research*, 8(3), 399-416.
31. Zelen, M. (1966). Application of exponential models to problems in cancer research. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A*, 129(3):368-398.