

توسیع مرکزی جامع برای سوپر جبر لی حاصل از ضرب تنسوری یک جبر شرکت پذیر جابه‌جایی و یک سوپر جبر لی

ملیحه یوسف‌زاده

دانشگاه اصفهان، گروه ریاضی

پذیرش ۹۸/۰۳/۰۸

دریافت ۹۷/۰۵/۲۱

چکیده

بررسی نمایش‌های توسیع‌های مرکزی سوپر جبرهای لی به‌علت کاربردشان در بررسی رفتار سیستم‌های فیزیکی همواره مورد علاقه ریاضی‌دانان و هم‌چنین فیزیک‌دانان بوده است. در این راستا دستیابی به توسیع‌های مرکزی سوپر جبرهای لی بسیار مهم است و اولین سوال در این زمینه، یافتن توسیع‌های مرکزی جامع برای سوپر جبرهای لی است. بررسی توسیع مرکزی جامع جبرهای $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{F} = \mathfrak{G}$ ، به‌ازای یک جبر شرکت‌پذیر جابه‌جایی یک‌دار A و یک جبر لی با بعد متناهی ساده \mathfrak{F} ، در سال ۱۹۸۴ انجام گرفت. پس از آن در سال ۲۰۱۱، توسیع مرکزی جامع برای \mathfrak{G} ، برای حالتی که \mathfrak{F} یک سوپر جبر لی بعد متناهی کلاسیک پایه‌ای است، بررسی شد. در این مقاله توسیع مرکزی جامع را برای کلاسی از سوپر جبرهای به فرم $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{F}$ بررسی می‌کنیم؛ این کلاس، (سوپر) جبرهایی که در بالا به آن اشاره شد را در بر دارد. روش به‌کار گرفته شده در این مقاله، کاملاً متفاوت از روش‌های قبلی است و به‌علاوه نتایج آن‌ها را پوشش می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: سوپر جبرهای جریانی، توسیع مرکزی، دوهم‌دور، توسیع مرکزی جامع

مقدمه

در تحقیقات مرتبط با جبرها و سوپر جبرهای لی، بررسی نمایش جبرها و هم‌چنین بررسی مفهومی به‌نام توسیع مرکزی^۱، از مسایل مهمی هستند که توجه ریاضی‌دانان زیادی را به‌خود جلب کرده‌اند. مسئله نمایش جبرها به‌علت کاربردشان در بررسی سیستم‌های فیزیکی برای فیزیک‌دانان نیز اهمیت دارد. در این راستا، بررسی نمایش‌های تصویری (سوپر) جبرهای لی جایگاه ویژه‌ای دارد. نمایش‌های تصویری^۲ یک (سوپر) جبر لی \mathfrak{G} ، در واقع نمایش‌های توسیع‌های مرکزی از \mathfrak{G} هستند. بنابراین بررسی نمایش‌های تصویری یک (سوپر) جبر لی از یک سو مستلزم یافتن توسیع‌های مرکزی و از سوی دیگر نیازمند بررسی نمایش‌های آن‌ها است. در [۷]، به بررسی نمایش‌های تصویری یکانی^۳ از سوپر جبرهایی که به سوپر جبرهای جریانی^۴ معروف هستند پرداخته شده است؛ بدین ترتیب که ابتدا توسیع‌های مرکزی این جبرها شناخته و سپس نمایش‌های یکانی آنها دسته‌بندی شده است. سوپر جبرهای جریانی به‌صورت $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{F}$ هستند که A یک سوپر جبر شرکت‌پذیر سوپر جابه‌جایی و \mathfrak{F} یک سوپر جبر لی است (مثال ۵ را ملاحظه کنید).

مفهوم توسیع مرکزی از یک سوپر جبر لی \mathfrak{G} همانگونه که از نام آن تداعی می‌شود، دستیابی به سوپر جبر لی جدیدی است که مرکز آن گسترش یافته مرکز \mathfrak{G} است (تعریف ۱۰ را ملاحظه کنید). اولین سوالی که در بررسی

*نویسنده مسئول ma.yousofzadeh@ipm.ir

1. Central extension
2. Projective representation
3. Unitary
4. Current superalgebra

توسیع‌های مرکزی \mathcal{G} مطرح می‌شود، یافتن یک توسیع مرکزی جامع^۱ برای \mathcal{G} است. در [۵]، به بررسی توسیع مرکزی جامع جبرهای $\mathbb{F} \otimes A = \mathcal{G}$ ، به‌ازای یک جبر شرکت‌پذیر جابه‌جایی یک‌دار A و یک جبر لی بعد متناهی ساده \mathbb{F} ، پرداخته شده است. ثابت شده است که توسیع مرکزی جامع برای \mathcal{G} به‌صورت $\mathcal{G} \oplus \bar{\Omega}^1(A)$ است که در آن $\bar{\Omega}^1(A)$ مدول مشتقات کاهلر^۲ به پیمانانه فرم‌های دقیق است (به بخش ۳ مراجعه شود). پس از آن در [۴]، توسیع مرکزی جامع برای \mathcal{G} ، برای حالتی که \mathbb{F} یک سوپر جبر لی بعد متناهی کلاسیک پایه‌ای است، بررسی شد. در این مقاله توسیع مرکزی جامع را برای کلاسی از سوپر جبرهای جریانی بررسی می‌کنیم. روش به‌کار گرفته شده، کاملاً متفاوت از روش‌های قبلی است و به‌علاوه نتایج آن‌ها را پوشش می‌دهد. در بخش دوم مقدمات لازم در اختیار خوانندگان قرار داده می‌شود؛ مطالب به‌گونه‌ای بیان شده‌اند که خوانندگان ناآشنا با سوپر جبرهای لی نیز بتوانند مطالب را دنبال کنند و در نهایت قضیه اصلی در بخش سوم ثابت می‌شود.

توسیع مرکزی

در این بخش، مقدماتی که برای فصل بعد نیاز داریم را مطرح می‌کنیم. گرچه تمامی مطالب مورد نیاز بیان شده‌اند، از اثبات‌های معمول شناخته شده در مبحث سوپر جبرهای لی صرف‌نظر کرده‌ایم. در طول این مقاله، تمامی فضاهای برداری و ضرب‌های تانسوری روی یک میدان \mathbb{F} از مشخصه صفر در نظر گرفته می‌شوند.

تعریف ۱. الف) یک فضای برداری M همراه با تجزیه‌ای به‌صورت $M = M_0 \oplus M_1$ که در آن M_0 و M_1 زیرفضاهایی از M هستند، را یک سوپرفضای برداری می‌نامیم. در این جا $\{0, 1\}$ معرف گروه دو عضوی \mathbb{Z}_2 است. یک عضو $x \in M_0$ را زوج یا همگن از درجه ۰ گوئیم و می‌نویسیم $|x| = 0$. به‌طور مشابه یک عضو $x \in M_1$ را فرد یا همگن از درجه ۱ گوئیم و می‌نویسیم $|x| = 1$.

الف) از هم‌اکنون قرارداد می‌کنیم اگر در طول متن از نماد $|x|$ برای عضوی از یک سوپرفضای برداری استفاده کرده‌ایم، آن عضو را به‌طور پیش فرض همگن در نظر گرفته‌ایم.

ب) یک سوپرفضای برداری $A = A_0 \oplus A_1$ همراه با یک تابع دوخطی $A \times A \rightarrow A$ * را یک سوپر جبر گوئیم هرگاه

$$A_i * A_j \subseteq A_{i+j} \quad (i, j \in \mathbb{Z}_2).$$

تابع دوخطی " * " را ضرب در A می‌نامیم. به‌ازای $a, b \in A$ ، ضرب $a * b$ را برای سادگی به‌صورت ab می‌نویسیم. سوپر جبر $A = A_0 \oplus A_1$ با شرط $A_1 = \{0\}$ را یک جبر می‌نامیم.

• یک سوپر جبر A را یک‌دار گوئیم هرگاه $1 \in A$ موجود باشد طوری که به‌ازای هر عضو a از A ، $a = 1a = a1$ در این حالت $1 \in A_0$.

• سوپر جبر A را سوپر جابه‌جایی گوئیم هرگاه به‌ازای هر $a, b \in A$ ، $ab = (-1)^{|a||b|}ba$ و آن را سوپر پادجابه‌جایی گوئیم هرگاه به‌ازای هر $a, b \in A$ ، $ab = -(-1)^{|a||b|}ba$. سوپر جبر A را شرکت‌پذیر گوئیم هرگاه برای هر $a, b, c \in A$ ، $(ab)c = a(bc)$.

• سوپر جبر A را یک سوپر جبر لی گوئیم هرگاه A سوپر پادجابه‌جایی باشد و در سوپر اتحاد ژاکوبی صدق کند، یعنی به‌ازای هر $a, b, c \in A$

$$(ab)c = a(bc) - (-1)^{|b||a|}b(ac).$$

1. Universal
2. Kahler

معمولاً ضرب در یک سوپر جبر لی را با $[\cdot, \cdot]$ نمایش می دهیم.

• بُعد یک سوپر جبر را بُعد آن به عنوان یک فضای برداری تعریف می کنیم.

(ج) یک تبدیل خطی φ از یک سوپر جبر A به یک سوپر جبر B را یک همریختی گوییم هرگاه

$$\varphi(A_i) \subseteq B_i, i \in \mathbb{Z}_2, \text{ به این معنا که برای}$$

$$\varphi(a_1 a_2) = \varphi(a_1) \varphi(a_2), a_1, a_2 \in A$$

تکریمتی، بروریمتی و غیره به طور معمول تعریف می شوند.

مثال ۲. الف) $V := \mathbb{F}$ را همواره به عنوان یک سوپرفضای برداری در نظر می گیریم که برای آن $V_0 = \mathbb{F}$ و

$$V_1 = \{0\}$$

(ب) فرض کنید $W = W_0 \oplus W_1$ و $V = V_0 \oplus V_1$ دو سوپرفضای برداری باشند. در این صورت فضای برداری

$\mathcal{T} := \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ شامل تمامی تبدیلات خطی از V به W ، نیز یک سوپرفضای برداری است؛ در حقیقت

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \oplus \mathcal{T}_1, i \in \mathbb{Z}_2 \text{ که در آن برای}$$

$$\mathcal{T}_i := \{\varphi \in \mathcal{T} \mid \varphi(V_j) \subseteq W_{i+j} \quad \forall j \in \mathbb{Z}_2\}.$$

به علاوه $\text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ از درون ریختی های V همراه با ضرب به صورت

$$[x, y] = xy - (-1)^{|x||y|}yx \quad (x, y \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)),$$

که در آن xy معرف ترکیب x و y است، یک سوپر جبر لی است.

(ج) فرض کنید m و n دو عدد صحیح مثبت باشند، برای

$$\mathcal{L} := \text{gl}(m, n) := \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \mid A_1: n \times n \text{ ماتریس و } A_4: m \times m \text{ ماتریس} \right\}$$

و

$$\mathcal{L}_0 := \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{L} \mid A_2 = 0, A_3 = 0 \right\}, \mathcal{L}_1 := \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{L} \mid A_1 = 0, A_4 = 0 \right\},$$

$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1$ همراه با ضرب به صورت

$$[x, y] := xy - (-1)^{|x||y|}yx \quad (x, y \in \mathcal{L}),$$

که در آن ضرب xy ضرب معمول ماتریس هاست، یک سوپر جبر لی است.

تعریف ۳. فرض کنید \mathbb{F} یک سوپر جبر و M یک سوپرفضای برداری باشد.

الف) یک تبدیل خطی $d: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ را یک مشتق^۱ از \mathbb{F} گوییم هرگاه برای هر $x, y \in \mathbb{F}$

$$d[xy] = [d(x), y] - (-1)^{|x||y|}[d(y), x].$$

فضای برداری شامل همه مشتقات \mathbb{F} را با $\text{der}(\mathbb{F})$ نمایش می دهیم.

(ب) فرض کنید $\alpha: \mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow M$ یک تابع دوخطی باشد.

• تابع α را سوپرمتقارن گوییم اگر برای $x, y \in \mathbb{F}$

$$\alpha(x, y) = (-1)^{|x||y|}\alpha(y, x).$$

• تابع α را سوپرپادمقارن گوییم اگر برای $x, y \in \mathbb{F}$

$$\alpha(x, y) = -(-1)^{|x||y|}\alpha(y, x).$$

• تابع α را پایا گوییم اگر برای هر $x, y, z \in \mathbb{F}$

$$\alpha([x, y], z) = \alpha(x, [y, z])$$

• تابع α را زوج یا همگن از درجه 0 (به طور متناظر، فرد یا همگن از درجه 1) می نامیم اگر برای $i, j \in \mathbb{Z}_2$

$$\alpha(\mathfrak{f}_i, \mathfrak{f}_j) \subseteq M_{i+j} \text{ (به‌طور متناظر، } \alpha(\mathfrak{f}_i, \mathfrak{f}_j) \subseteq M_{i+j+1}\text{)}$$

مجموعه همه توابع دوخطی پایا و سوپرمتقارن از $\mathfrak{f} \times \mathfrak{f}$ به \mathbb{F} را با $\text{Sym}(\mathfrak{f})^{\mathfrak{f}}$ نمایش می‌دهیم و آنها را فرم‌های سوپرمتقارن پایا می‌نامیم (مثال ۲ الف را ملاحظه کنید).

(ج) یک تابع دوخطی $\omega: \mathfrak{f} \times \mathfrak{f} \rightarrow M$ یک دوهم‌دور^۱ با ضرایب در M نامیده می‌شود اگر برای هر $x, y, z \in \mathfrak{f}$

$$\omega(x, y) = -(-1)^{|x||y|} \omega(y, x) \bullet$$

$$\omega([x, y], z) = \omega(x, [y, z]) - (-1)^{|x||y|} \omega(y, [x, z]) \bullet$$

مجموعه تمامی دوهم‌دوره‌های \mathfrak{f} با ضرایب در M با $Z^2(\mathfrak{f}, M)$ نمایش داده می‌شود. یک دوهم‌دور ω را یک دوهم‌مرز^۲ گوئیم هرگاه تبدیل خطی $f: \mathfrak{f} \rightarrow M$ چنان وجود داشته باشد که برای هر $x, y \in \mathfrak{g}$ شرط $\omega(x, y) = f([x, y])$ برآورده شود. مجموعه همه دوهم‌مرزهای \mathfrak{f} با ضرایب در M را با $B^2(\mathfrak{f}, M)$ نمایش می‌دهیم. فضای خارج‌قسمتی

$$H^2(\mathfrak{f}, M) := Z^2(\mathfrak{f}, M) / B^2(\mathfrak{f}, M)$$

دومین کوهومولوژی از \mathfrak{f} با ضرایب در M نامیده می‌شود. دو عضو از $Z^2(\mathfrak{f}, M)$ را کوهومولوژی-معادل گوئیم هرگاه تفاضل آنها یک دوهم‌مرز باشد.

یادداشت ۴. برای یک سوپرفضای برداری $M = M_0 \oplus M_1$ و $\pi_0: M \rightarrow M_0$ و $\pi_1: M \rightarrow M_1$ را به‌ترتیب توابع

تصویری کانونی روی M_0 و M_1 در نظر می‌گیریم. اگر $\omega: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow M$ یک دوهم‌دور برای یک سوپر جبر لی \mathfrak{g} باشد، برای $i = 0, 1$ ، تعریف می‌کنیم

$$\omega_i: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow M$$

$$\omega_i(x) := \begin{cases} \pi_i \circ \omega(x) & x \in (\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0) \oplus (\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1) \\ \pi_{i+1} \circ \omega(x) & x \in (\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_1) \oplus (\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_0). \end{cases}$$

به‌راحتی دیده می‌شود ω_0 یک دوهم‌دور زوج و ω_1 یک دوهم‌دور فرد است و به‌علاوه $\omega = \omega_0 + \omega_1$. در نتیجه $Z^2(\mathfrak{g}, M)$ یک سوپرفضای برداری است و $B^2(\mathfrak{g}, M)$ یک سوپرزیرفضاست و از این‌رو، $H^2(\mathfrak{g}, M)$ یک سوپرفضای برداری است.

مثال ۵. الف) فرض کنید V یک سوپرفضای برداری و W یک فضای برداری باشند. در این صورت $U := V \otimes W$ نیز یک سوپرفضای برداری است؛ در واقع

$$U_0 := V_0 \otimes W \text{ و } U_1 := V_1 \otimes W.$$

ب) فرض کنید A یک جبر شرکت‌پذیر جابه‌جایی و \mathfrak{f} یک سوپر جبر لی باشد. در این صورت سوپرفضای برداری $\mathfrak{f} \otimes_{\mathbb{F}} A = \mathfrak{g}$ همراه با براکت

$$[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

$$(a \otimes x, b \otimes y) \mapsto ab \otimes [x, y] \quad (a, b \in A, \quad x, y \in \mathfrak{f})$$

یک سوپر جبر لی است. اگر A یک‌دار و \mathfrak{f} کامل^۳ باشد یعنی $\mathfrak{f} = [\mathfrak{f}, \mathfrak{f}]$ ، آن‌گاه \mathfrak{g} نیز کامل است.

تعریف ۶. سوپر جبر لی معرفی شده در مثال ۵ ب) را یک سوپر جبر جریان می‌نامیم.

مثال ۷. فرض کنید \mathfrak{g} یک سوپر جبر لی ساده کلاسیک پایه‌ای با فرم دوخطی پایای ناتباهیده زوج f و B جبر

چند جمله‌ای‌های کوتاه‌شده^۴ $\mathbb{F}t \oplus \mathbb{F}$ باشد، در این صورت فرم تعریف شده به‌وسیله

1. 2-cocycle
2. 2-coboundary
3. Perfect
4. Truncated

$$(1, 1) = (1, t) = (t, 1) = 1, \quad (t, t) = 0$$

یک فرم دوخطی متقارن ناتباهیده روی B است. سوپر جبر لی جریانی $t := B \otimes \mathfrak{g}$ کامل است ولی ساده نیست زیرا $\mathbb{F}t \otimes \mathfrak{g}$ ایده آلی نابديهی از t است. به علاوه، سوپر جبر لی t مجهز به فرم دوخطی سوپرمتقارن پایای ناتباهیده زوج

$$\kappa: t \otimes t \rightarrow \mathbb{F}$$

$$(a \otimes x, b \otimes y) \mapsto (a, b)f(x, y) \quad (x, y \in \mathfrak{g}, a, b \in B)$$

است.

مثال ۸. فرض کنید ω یک دوهم دور زوج از یک سوپر جبر $(\mathcal{G}, [\cdot, \cdot]_\omega)$ با ضرایب در یک سوپرفضای M باشد. قرار

دهید $\hat{\mathcal{G}}_\omega := \mathcal{G} \oplus M = (\mathcal{G}_0 \oplus M_0) \oplus (\mathcal{G}_1 \oplus M_1)$ و تعریف کنید:

$$[\cdot, \cdot]_\omega: \hat{\mathcal{G}}_\omega \times \hat{\mathcal{G}}_\omega \rightarrow \hat{\mathcal{G}}_\omega, \quad (x + m, x' + m') \mapsto [x, x'] + \omega(x, x')$$

که در آن $x, x' \in \mathcal{G}$ و $m, m' \in M$. در این صورت $\hat{\mathcal{G}}_\omega$ همراه با $[\cdot, \cdot]_\omega$ یک سوپر جبر لی است. دقت کنید زوج بودن ω برای برقراری شرط $[(\hat{\mathcal{G}}_\omega)_i, (\hat{\mathcal{G}}_\omega)_j] \subseteq (\hat{\mathcal{G}}_\omega)_{i+j}$ (به زای $i, j \in \mathbb{Z}_2$) الزامی است.

لم ۹. فرض کنید ω_1 و ω_2 دو دوهم دور زوج کوهومولوژی-معادل از یک سوپر جبر لی کامل \mathcal{G} (یعنی $[\mathcal{G}, \mathcal{G}] = \mathcal{G}$) با ضرایب در یک سوپرفضای برداری M باشند، در این صورت $\hat{\mathcal{G}}_{\omega_1}$ با $\hat{\mathcal{G}}_{\omega_2}$ یکرخت است.

اثبات. تبدیل خطی $f: \mathcal{G} \rightarrow M$ را به گونه ای در نظر بگیرید که برای $x, y \in \mathcal{G}$

$$\omega_2(x, y) - \omega_1(x, y) = f[x, y].$$

زیرا ω_1 و ω_2 زوج هستند و \mathcal{G} کامل است، f یک تبدیل خطی زوج است. حال تعریف می کنیم

$$\theta: \hat{\mathcal{G}}_{\omega_1} \rightarrow \hat{\mathcal{G}}_{\omega_2}$$

$$x + m \mapsto x + f(x) + m \quad (x \in \mathcal{G}, m \in M).$$

به راحتی دیده می شود برای $x, y \in \hat{\mathcal{G}}_{\omega_1}$ $\theta([x, y]_{\omega_1}) = [\theta(x), \theta(y)]_{\omega_2}$. هم چنین می دانیم f زوج است، پس θ نیز زوج است و از این رو، θ یک همریختی است. به علاوه نگاشت

$$\theta': \hat{\mathcal{G}}_{\omega_2} \rightarrow \hat{\mathcal{G}}_{\omega_1}$$

$$x + m \mapsto x - f(x) + m \quad (x \in \mathcal{G}, m \in M).$$

وارون θ است، پس θ یک یکرختی است.

تعریف ۱۰. گوییم یک سوپر جبر لی \mathfrak{L} یک توسیع مرکزی از یک سوپر جبر لی \mathcal{G} است هرگاه برریختی $\pi: \mathfrak{L} \rightarrow \mathcal{G}$

که هسته آن زیرمجموعه ای از مرکز \mathfrak{L} است، وجود داشته باشد؛ به عبارت دیگر

$$\ker(\pi) \subseteq Z(\mathfrak{L}) := \{x \in \mathfrak{L} \mid [x, y] = 0 \quad \forall y \in \mathfrak{L}\}.$$

یک توسیع مرکزی $\hat{\mathcal{G}}$ از \mathcal{G} ، متناظر با برریختی $\hat{\pi}: \hat{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G}$ ، را یک توسیع مرکزی جامع گوییم هرگاه برای هر توسیع مرکزی \mathfrak{L} از \mathcal{G} ، متناظر با برریختی $\pi: \mathfrak{L} \rightarrow \mathcal{G}$ ، همریختی $\varphi: \hat{\mathcal{G}} \rightarrow \mathfrak{L}$ وجود داشته باشد به گونه ای که

$$\pi \circ \varphi = \hat{\pi}.$$

یادداشت ۱۱. الف) اگر \mathfrak{L} یک توسیع مرکزی از یک سوپر جبر لی \mathcal{G} متناظر با برریختی $\pi: \mathfrak{L} \rightarrow \mathcal{G}$ باشد، در این

صورت به عنوان فضاهای برداری $\mathfrak{L} \simeq \mathcal{G} \oplus \ker(\pi)$ علت نام گذاری توسیع مرکزی هم همین تجزیه است.

ب) یک سوپر جبر لی \mathcal{G} توسیع مرکزی جامع دارد اگر و فقط اگر کامل باشد یعنی $[\mathcal{G}, \mathcal{G}] = \mathcal{G}$ ، $[\mathcal{G}, \mathcal{G}] = \mathcal{G}$ ، قضیه های ۸، ۱۰ و ۱۴. در این حالت توسیع مرکزی جامع با تقریب یکرختی یکتاست و هم چنین نگاشت φ در تعریف ۱۰ یگانه است.

ج) نمادهای مثال ۸ را در نظر بگیرید. $\hat{\mathcal{G}}_\omega$ یک توسیع مرکزی از \mathcal{G} ، متناظر با تابع تصویری کانونی $\hat{\mathcal{G}} = \mathcal{G} \oplus$

$M \rightarrow \mathcal{G}$ است و به علاوه هر توسیع مرکزی از \mathcal{G} به همین طریق به دست می‌آید [بخش ۴].
از هم‌اکنون فرض می‌کنیم \mathbb{F} یک سوپرجبر لی کامل با بعد متناهی باشد که به یک فرم سوپرمتقارن پایایی ناتباهیده همگن K مجهز است. مثال ۲ الف) را یادآوری می‌کنیم و توجه می‌کنیم که چون K همگن است، برای اعضای همگن $x, y \in \mathbb{F}$

$$\kappa(x, y) = 0 \quad \text{اگر } |\kappa| + |x| + |y| = 1. \quad \text{آن‌گاه} \quad (۱)$$

فضای دوگان \mathbb{F} را با \mathbb{F}^* نمایش می‌دهیم. در این صورت نگاشت

$$\varphi: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}^* \\ x \mapsto \kappa(x, \cdot) \quad (x \in \mathbb{F})$$

یک نگاشت دوسویی است. بنابراین برای هر درون‌ریختی S از \mathbb{F} ، یگانه درون‌ریختی S^* وجود دارد که

$$\kappa(Sx, y) = (-1)^{|x||y|} \kappa(S^*y, x) \quad (x, y \in \mathbb{F}).$$

لم ۱۲. (NY گزاره ۳، ۵) قرار دهید

$$\text{der}_-(\mathbb{F}) := \{D \in \text{der}(\mathbb{F}) \mid D^* = -D\}$$

و

$$\text{cent}_+(\mathbb{F}) := \{S \in \text{End}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}) \mid S^* = S, \quad S[a, b] = [S(a), b] \quad (\forall a, b \in \mathbb{F})\}.$$

در این صورت سوپرفضای برداری $\text{der}_-(\mathbb{F})$ با $Z^2(\mathbb{F}, \mathbb{F})$ و سوپرفضای برداری $\text{cent}_+(\mathbb{F})$ با $\text{Sym}(\mathbb{F})^{\mathbb{F}}$ یکرخت است.

تعریف ۱۳. فرض کنید A یک جبر شرکت‌پذیر جابه‌جایی یک‌دار و M یک سوپرفضای برداری باشد. یک تبدیل خطی

$$F: A \otimes A \rightarrow M \quad \text{را یک تابع هوششیلد^۱ گوییم اگر برای } a, b, c \in A$$

$$F(a \otimes b) = -F(b \otimes a) \bullet$$

$$F(ab \otimes c) = F(a \otimes bc) + F(b \otimes ac) \bullet$$

مثال ۱۴. فرض کنید A یک جبر شرکت‌پذیر جابه‌جایی یک‌دار، \mathbb{F} یک سوپرجبر لی و M یک سوپرفضای برداری باشد.

قرار دهید $\mathbb{F} \otimes A = \mathfrak{g}$.

الف) اگر $f: A \rightarrow M$ یک تبدیل خطی و $D \in \text{der}_-(\mathbb{F})$ ، آن‌گاه

$$\eta_{f,D}: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow M, \quad \eta_{f,D}(a \otimes x, b \otimes y) := f(ab)\kappa(Dx, y) \quad (a, b \in A, \quad x, y \in \mathbb{F})$$

یک دوهم‌دور از \mathfrak{g} است [مثال ۷، ۱۲، ۳]. چون $\eta_{f,D}$ نسبت به f و D خطی است، اگر $D = D_0 + D_1$ تجزیه D به

تبدیلات خطی زوج و فرد باشند و $\pi_i: M \rightarrow M_i \quad (i = 0, 1)$ تابع تصویری کانونی باشد، آن‌گاه

$$\eta_{f,D} = \eta_{\pi_0 \circ f, D_0} + \eta_{\pi_0 \circ f, D_1} + \eta_{\pi_1 \circ f, D_0} + \eta_{\pi_1 \circ f, D_1}.$$

حال فرض کنید D همگن باشد و $f = \pi_i \circ f$ که $i = 0, 1$ اگر $a, b \in A$ و $x, y \in \mathbb{F}$ اعضای همگنی باشند،

(۲، ۱) نتیجه می‌دهد که

$$\kappa(Dx, y) = 0 \quad \text{اگر } |\kappa| + |D| + |x| + |y| = 1.$$

بنابراین درجه $f(ab)\kappa(Dx, y) \in M$ به وسیله $|x| + |y| + |D| + |\kappa| = 0$ با شرط تعیین

می‌شود. بنابراین چون

$$|f(ab)\kappa(Dx, y)| = i,$$

$$i = |D| + |\kappa| \quad \text{اگر و فقط اگر}$$

ب) فرض کنید $F: A \otimes A \rightarrow M$ یک تابع هوششیلد و $S \in \text{cent}_+(\mathbb{F})$ در این صورت $\xi_{F,S}: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow M$, $\xi_{F,S}(a \otimes x, b \otimes y) := F(a \otimes b)\kappa(Sx, y)$ ($a, b \in A$, $x, y \in \mathbb{F}$). یک دوهم‌دور از \mathfrak{g} است [۷, مثال ۳, ۱۲]. همانند حالت قبل، اگر $i \in \{0, 1\}$ و $F = \pi_i \circ F$ و به‌علاوه S همگن باشد، این دوهم‌دور زوج است اگر و فقط اگر $i = |S| + |\kappa|$.

تعریف ۱۵. فرم دوخطی κ ، پایا-مشتق نامیده می‌شود اگر $\text{der}(\mathbb{F}) = \text{der}_-(\mathbb{F})$.

در زیر قضیه ۳, ۱۶ از [۷] را بیان می‌کنیم؛ این قضیه دوهم‌دورها را به طور کامل مشخص می‌کند: **قضیه ۱۶.** مثال ۱۴ را در نظر بگیرید و فرض کنید κ پایا-مشتق باشد. با در نظر گرفتن لم ۱۲، سوپرفضای برداری $\text{der}_-(\mathbb{F})$ را با $Z^2(\mathbb{F}, \mathbb{F})$ و سوپرفضای برداری $\text{cent}_+(\mathbb{F})$ را با $\text{Sym}(\mathbb{F})^\dagger$ یکی‌گیری می‌کنیم و فرض می‌کنیم اعضای D_1, \dots, D_n از $\text{der}(\mathbb{F}) = \text{der}_-(\mathbb{F})$ پایه‌ای برای $Z^2(\mathbb{F}, \mathbb{F})$ تشکیل دهند و $S_1, \dots, S_m \in \text{cent}_+(\mathbb{F})$ به‌گونه‌ای باشند که پایه‌ای برای $\text{Sym}(\mathbb{F})^\dagger$ تشکیل دهند. در این صورت برای هر دوهم‌دور ω از $\mathfrak{g} = A \otimes \mathbb{F}$ با مقادیر در یک سوپرفضای برداری M ، توابع خطی $f_i: A \rightarrow M$ و توابع هوششیلد $F_j: A \times A \rightarrow M$ وجود دارند طوری که

$$\omega = \sum_{i=1}^n \eta_{f_i, D_i} + \sum_{j=1}^m \xi_{F_j, S_j}.$$

یادداشت ۱۷. دقت می‌کنیم D_i ها و S_j ها در قضیه قبل را می‌توان همگن در نظر گرفت. در این حالت، هر دوهم‌دور زوج به‌صورت

$$\sum_{i=1}^n \eta_{f_i, D_i} + \sum_{j=1}^m \xi_{F_j, S_j}$$

است که f_i ها و F_j ها همگن هستند طوری که $|f_i| + |D_i| = |\kappa|$ و $|F_j| + |S_j| = |\kappa|$.

توسیع مرکزی جامع و جبرهای جریان

در این بخش قضیه اصلی مقاله را ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم \mathbb{F} یک سوپر جبر لی کامل با بعد متناهی است که به یک فرم سوپرمتقارن پایای ناتباهیده همگن K مجهز است و \mathcal{A} یک جبر شرکت پذیر جابه‌جایی یک‌دار است. توسیع مرکزی جامع برای سوپر جبر جریان $\mathbb{F} \otimes \mathcal{A}$ را برحسب مدول مشتقات کاهلر به‌دست می‌آوریم.

فرض کنید \mathcal{A} یک جبر شرکت پذیر جابه‌جایی یک‌دار باشد. یک فضای برداری M همراه با یک تابع دوخطی

$$\cdot: \mathcal{A} \times M \rightarrow M$$

$$(ab) \cdot m = a \cdot (b \cdot m) \quad (a, b \in \mathcal{A}, m \in M) \bullet$$

$$1 \cdot m = m \bullet$$

برای سادگی در نوشتن از این به بعد ممکن است از نوشتن عمل مدولی "0" و همچنین از نوشتن پرانتزها صرف‌نظر کنیم. \mathcal{A} -زیر مدول‌ها به‌طور طبیعی تعریف می‌شوند و برای دو \mathcal{A} -مدول M و N ، یک تبدیل خطی $\phi \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(M, N)$ را یک هم‌ریختی مدولی نامیم هرگاه

$$\phi(ax) = a\phi(x).$$

تعریف ۱۸. فرض کنید M یک \mathcal{A} -مدول باشد. یک تبدیل خطی $d: \mathcal{A} \rightarrow M$ یک مشتق از \mathcal{A} در M نامیده می‌شود هرگاه

$$d(ab) = ad(b) + bd(a).$$

مجموعه همه مشتقات \mathcal{A} در M را با $der(\mathcal{A}, M)$ نمایش می‌دهیم و هر عضو آن را یک مشتق از \mathcal{A} در M می‌نامیم. مشتقات \mathcal{A} در \mathcal{A} را مشتقات \mathcal{A} می‌نامیم.

مثال ۱۹. فضای برداری $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ همراه با عمل

$$a \cdot (b \otimes c) := ab \otimes c$$

برای $a, b, c \in \mathcal{A}$ یک \mathcal{A} -مدول است. همچنین چون \mathcal{A} شرکت‌پذیر است، \mathcal{A} به‌طور طبیعی یک \mathcal{A} -مدول است
گزاره ۲۰. الف) تابع ضربی

$$m_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \quad a \otimes b \mapsto ab$$

یک هم‌ریختی مدولی است؛ به‌ویژه $K := \ker(m_{\mathcal{A}})$ یک \mathcal{A} -زیرمدول از $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ است. (ب) فضای برداری $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ همراه با ضرب

$$(a \otimes b)(c \otimes d) := ac \otimes bd \quad (a, b, c, d \in \mathcal{A})$$

یک جبر است و K زیرجبری از $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ است.

ج) $K^2 := \text{span}_{\mathbb{F}}\{xy \mid x, y \in K\}$ زیرمدولی از K است، به‌ویژه فضای خارج‌قسمتی

$$\Omega^1(\mathcal{A}) := K/K^2$$

همراه با عمل مدولی القایی

$$\mathcal{A} \times K/K^2 \rightarrow K/K^2$$

$$(a, x + K^2) \mapsto ax + K^2 \quad (a \in \mathcal{A}, x \in K)$$

یک \mathcal{A} -مدول است که آن را مدول مشتقات کاهلر می‌نامیم.

اثبات. الف) به راحتی بررسی می‌شود.

ب) اولین ادعا واضح است. حال فرض کنید $\sum_{i=1}^n (a_i \otimes b_i)$ و $\sum_{i=1}^m (c_i \otimes d_i)$ اعضای K باشند. در این صورت

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{A}}\left(\sum_{i=1}^n (a_i \otimes b_i) \sum_{i=1}^m (c_i \otimes d_i)\right) &= m_{\mathcal{A}}\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i c_j \otimes b_i d_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i c_j b_i d_j \\ &= \sum_{i=1}^n a_i b_i \left(\sum_{j=1}^m c_j d_j\right) = 0. \end{aligned}$$

پس $\sum_{i=1}^n (a_i \otimes b_i) \sum_{i=1}^m (c_i \otimes d_i) \in \ker(m_{\mathcal{A}}) = K$

ج) با استفاده از قسمت (ب)،

$$K^2 := \text{span}_{\mathbb{F}}\{xy \mid x, y \in K\} \subseteq K.$$

همچنین با در نظر گرفتن نمادهای اثبات قسمت دوم، برای $x \in \mathcal{A}$ داریم

$$\begin{aligned} x\left(\sum_{i=1}^n (a_i \otimes b_i) \sum_{i=1}^m (c_i \otimes d_i)\right) &= x\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i c_j \otimes b_i d_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x a_i c_j \otimes b_i d_j \\ &= \sum_{i=1}^n (x a_i \otimes b_i) \sum_{i=1}^m (c_i \otimes d_i) \in K^2, \end{aligned}$$

بنابراین K^2 زیرمدولی از K است از این رو، عمل مدولی معرفی شده القا می شود. فرض کنید $x \in K$ در فضای خارج قسمتی $\Omega^1(\mathcal{A})$ را با $[[x]]$ نمایش می دهیم. و دقت می کنیم برای $x, y \in K$ داریم $[[xy]] = 0$. بنابراین برای $a, b \in \mathcal{A}$ داریم

$$[[(\mathbf{1} \otimes ab) - (b \otimes a) - (a \otimes b) + (ab \otimes \mathbf{1})]] = [[(1 \otimes a - a \otimes 1)(1 \otimes b - b \otimes 1)]] = 0. \quad (2)$$

لم ۲۱. تبدیل خطی

$$d_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \rightarrow \Omega^1(\mathcal{A}), \quad a \mapsto [[1 \otimes a - a \otimes 1]]$$

یک مشتق از \mathcal{A} در $\Omega^1(\mathcal{A})$ است.

اثبات. ابتدا یادآوری می کنیم \mathcal{A} جابه جایی است. برای $a, b \in \mathcal{A}$ با استفاده از ۱۸، داریم

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{A}}(ab) &= [[(1 \otimes ab) - (ab \otimes 1)]] \\ &= [[(\mathbf{1} \otimes ab) - (ab \otimes \mathbf{1})]] + [[-(1 \otimes ab) + (b \otimes a) + (a \otimes b) - (ab \otimes 1)]] \\ &= [[(\mathbf{1} \otimes ab) - (ab \otimes \mathbf{1}) - (1 \otimes ab) + (b \otimes a) + (a \otimes b) - (ab \otimes 1)]] \\ &= [[-(ba \otimes 1) - (ab \otimes 1) + (b \otimes a) + (a \otimes b)]] \\ &= [[b(1 \otimes a - a \otimes 1)]] + [[a(1 \otimes b - b \otimes 1)]] \\ &= b[[1 \otimes a - a \otimes 1]] + a[[1 \otimes b - b \otimes 1]] \\ &= bd_{\mathcal{A}}(a) + ad_{\mathcal{A}}(b) = ad_{\mathcal{A}}(b) + bd_{\mathcal{A}}(a). \end{aligned}$$

بدین ترتیب اثبات کامل می شود.

لم ۲۲. به عنوان یک \mathcal{A} -مدول، $\Omega^1(\mathcal{A})$ به وسیله $im(d_{\mathcal{A}})$ تولید می شود.

اثبات. فرض کنید $\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i \in K$ در این صورت $\sum_{i=1}^n a_i b_i = 0$ داریم

$$\begin{aligned} [[\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i]] &= [[\sum_{i=1}^n (a_i \mathbf{1} \otimes b_i)]] = [[\sum_{i=1}^n (a_i \mathbf{1} \otimes b_i - a_i b_i \otimes \mathbf{1} + a_i b_i \otimes \mathbf{1})]] \\ &= [[\sum_{i=1}^n (a_i \mathbf{1} \otimes b_i - a_i b_i \otimes \mathbf{1})]] + [[\sum_{i=1}^n a_i b_i \otimes \mathbf{1}]] \\ &= \sum_{i=1}^n [[(a_i(1 \otimes b_i - b_i \otimes 1)]] \\ &= \sum_{i=1}^n a_i [[(1 \otimes b_i - b_i \otimes 1)]] \\ &= \sum_{i=1}^n (a_i(d_{\mathcal{A}}(b_i))) \in Ad_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

این مطلب، اثبات را کامل می کند.

گزاره ۲۳. فرض کنید \mathcal{A} یک جبر شرکت پذیر جابه جایی یک دار باشد. در این صورت

$$G: \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \overline{\Omega^1(\mathcal{A})} := \Omega^1(\mathcal{A})/im(d_{\mathcal{A}})$$

$$a \otimes b \mapsto \overline{a \cdot d_{\mathcal{A}} b} \quad (a, b \in \mathcal{A})$$

یک تابع هوشیلاست؛ منظور از $a \cdot d_{\mathcal{A}} b$ در این جا، کلاس هم ارزی $a \cdot d_{\mathcal{A}} b$ در فضای خارج قسمتی $\Omega^1(\mathcal{A})$ است. به علاوه اگر M یک سوپرفضا و $F: \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow M$ یک تابع هوشیلاست باشد، آن گاه تبدیل خطی

$\bar{F}: \bar{\Omega}^1(\mathcal{A}) \rightarrow M$ با شرط $\bar{F} \circ G = F$ وجود دارد.

اثبات. ابتدا یادآوری می‌کنیم $d_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \rightarrow \Omega^1(\mathcal{A})$ یک مشتق است، پس برای $a, b \in \mathcal{A}$ داریم

$$d_{\mathcal{A}}(ab) = a \cdot d_{\mathcal{A}}(b) + b \cdot d_{\mathcal{A}}(a),$$

بنابراین

$$G(a \otimes b) = \overline{a \cdot d_{\mathcal{A}}(b)} = \overline{-b \cdot d_{\mathcal{A}}(a)} = -G(b \otimes a) \quad (a, b \in \mathcal{A}).$$

هم‌چنین برای اعضای همگن $a, b \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} & (ab) \cdot d_{\mathcal{A}}(c) - a \cdot d_{\mathcal{A}}(bc) - b \cdot d_{\mathcal{A}}(ac) \\ &= (ab) \cdot d_{\mathcal{A}}(c) - ((ac) \cdot d_{\mathcal{A}}(b) + (ab) \cdot d_{\mathcal{A}}(c)) - b \cdot d_{\mathcal{A}}(ac) \\ &= -(ac) \cdot d_{\mathcal{A}}(b) - b \cdot d_{\mathcal{A}}(ac) = -d_{\mathcal{A}}(bac) \in \text{im}(d_{\mathcal{A}}). \end{aligned}$$

بنابراین

$$G(ab, c) - G(a, bc) - G(b, ac) = \overline{(ab) \cdot d_{\mathcal{A}}(c)} - \overline{a \cdot d_{\mathcal{A}}(bc)} - \overline{b \cdot d_{\mathcal{A}}(ac)} = 0.$$

این مطلب نشان می‌دهد که G یک تابع هوششیلد است.

سپس فرض کنید M یک سوپرفضای برداری و $F: \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow M$ یک تابع هوششیلد باشد. چون برای $a \in \mathcal{A}$ داریم

$$F(a \otimes 1) = -F(1 \otimes a) \cdot$$

$$F(a, 1) = F(a1 \otimes 1) = F(a \otimes 1) + F(1 \otimes a) \cdot$$

پس $F(a \otimes 1) = F(1 \otimes a) = 0$ بنابراین برای $a \in \mathcal{A}$

$$F(d_{\mathcal{A}}(a)) = F(1 \otimes a - a \otimes 1) = 0.$$

در نتیجه $\text{im}(d_{\mathcal{A}}) \subseteq \ker(F)$ و از این‌رو، تبدیل خطی F ، تبدیل خطی $\bar{F}: \bar{\Omega}^1(\mathcal{A}) \rightarrow M$ را القا می‌کند؛ در واقع برای $a, b \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \bar{F} \circ G(a \otimes b) &= \bar{F}(\overline{ad_{\mathcal{A}}b}) = F(ad_{\mathcal{A}}b) = F(a(1 \otimes b - b \otimes 1)) \\ &= F(a \otimes b) - F(ab \otimes 1) \\ &= F(a \otimes b). \end{aligned}$$

بدین ترتیب اثبات کامل می‌شود.

اکنون آماده‌ایم که قضیه اصلی مقاله را بیان کنیم. با توجه به این که یک سوپرجبر لی بعدمتناهی کلاسیک پایه‌ای، مجهز به یک فرم دوخطی ناتباهیده سوپرمتقارن زوج است، قضیه اصلی این بخش، نتایج [۴] (روی یک میدان) را نیز پوشش می‌دهد. روش استفاده شده در [۴] همان روش استفاده شده در مقاله [۵] ([۱]، [۲]، [۳] و [۶] را نیز ملاحظه کنید) بر اساس یافتن یک پایه شواله^۱ است که در حالت سوپر به‌کار گرفته شده است. این روش وابسته به ساختار شناخته شده سوپرجبرهای لی کلاسیک پایه‌ای است، در حالی که روش ما برای هر سوپرجبر لی کامل بعد متناهی مجهز به یک فرم دوخطی سوپرمتقارن پایای ناتباهیده همگن به‌کار گرفته می‌شود و از این‌رو، نتایج بیش‌تری به‌دست می‌دهد؛ برای مثال، \mathbb{F} را می‌توان سوپرجبر لی ساده بعدمتناهی کلاسیک $q(n)$ در نظر گرفت که یک سوپرجبر لی بعدمتناهی کلاسیک پایه‌ای نیست. به‌عنوان مثالی دیگر، قضیه اصلی ما توسعه مرکزی جامع سوپرجبرهای لی $\mathcal{A} \otimes t$ ، که t همانند مثال ۲،۷ معرفی می‌شود، را نیز به‌دست می‌دهد.

قضیه ۲۴. فرض کنید K ، پایا-مشتق باشد. با در نظر گرفتن $\text{lm } 12$ ، سوپرفضای برداری $der_{-}(\mathbb{F})$ را با $Z^2(\mathbb{F}, \mathbb{F})$ و

1. Chevalley basis

سوپرفضای برداری $\text{cent}_+(\mathfrak{f})$ را با $\text{Sym}(\mathfrak{f})^{\mathfrak{f}}$ یکی گیری می کنیم و $D_1, \dots, D_s, \dots, D_t$ از مشتقات همگن \mathfrak{f} را به گونه ای در نظر می گیریم که $\{[D_1], \dots, [D_t]\}$ از کلاس های کوهومولوژی، پایه ای برای $H^2(\mathfrak{f})$ باشد و

$$|D_{s+1}| + |\kappa| = \dots = |D_t| + |\kappa| = 1 \quad \text{و} \quad |D_1| + |\kappa| = \dots = |D_s| + |\kappa| = 0$$

هم چنین زیرمجموعه $\{S_1, \dots, S_p, \dots, S_m\}$ از $\text{cent}_+(\mathfrak{f})$ شامل درون ریختی های همگن را پایه ای برای $\text{Sym}(\mathfrak{f})^{\mathfrak{f}}$ در نظر می گیریم طوری که

$$|S_{p+1}| + |\kappa| = \dots = |S_m| + |\kappa| = 1 \quad \text{و} \quad |S_1| + |\kappa| = \dots = |S_p| + |\kappa| = 0$$

سوپر جبر لی $\mathfrak{g} = \mathcal{A} \otimes \mathfrak{f}$ را در نظر بگیرید و قرار دهید

$$\hat{M} := (\oplus_{i=1}^t \mathcal{A}) \oplus (\oplus_{i=1}^m \bar{\Omega}^1(\mathcal{A})).$$

در این صورت \hat{M} یک سوپرفضای برداری است که

$$\hat{M}_0 = (\oplus_{i=1}^s \mathcal{A}) \oplus (\oplus_{i=1}^p (\bar{\Omega}^1(\mathcal{A})))$$

و

$$\hat{M}_1 = (\oplus_{i=s+1}^t \mathcal{A}) \oplus (\oplus_{i=p+1}^m (\bar{\Omega}^1(\mathcal{A}))).$$

تعریف کنید

$$\alpha: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \hat{M}$$

$$(a \otimes x, b \otimes y) \mapsto (ab\kappa(D_i x, y))_{1 \leq i \leq t} + \overline{(a \cdot d_{\mathcal{A}}(b)\kappa(S_j x, y))}_{1 \leq j \leq m}.$$

در این صورت α یک دوهم دور زوج است و $\hat{\mathfrak{g}}\alpha$ توسیع مرکزی جامع از \mathfrak{g} است.

اثبات. این که α یک دوهم دور زوج است از مثال ۱۴ حاصل می شود. فرض کنید ω یک دوهم دور زوج با ضرایب در یک سوپرفضای M باشد. از یادداشت ۱۶ می دانیم که تبدیلات خطی همگن f_1, \dots, f_t از \mathcal{A} به M و توابع همگن هوشیلد F_1, \dots, F_m روی $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ وجود دارند که

$$|f_i| + |D_i| = |F_j| + |S_j| = |\kappa| \quad (1 \leq i \leq t, \quad 1 \leq j \leq m)$$

و ω با $\omega = \sum_{i=1}^t \eta_{f_i, D_i} + \sum_{j=1}^m \zeta_{F_j, S_j}$ کوهومولوژی-معادل است. از گزاره ۲۳ می دانیم که برای هر $\bar{F}_j: \bar{\Omega}^1(\mathcal{A}) \rightarrow M$ وجود دارد که برای هر $a, b \in \mathcal{A}$ $\bar{F}_j(a \cdot d_{\mathcal{A}}(b)) = F_j(a \otimes b)$ به ویژه، F_j همگن از درجه $|F_j|$ است. حال تعریف کنید

$$\theta: \hat{M} \rightarrow M$$

$$(a_i)_{1 \leq i \leq t} + (\bar{x}_j)_{1 \leq j \leq m} \mapsto \sum_{i=1}^t f_i(a_i) + \sum_{j=1}^m \bar{F}_j(\bar{x}_j),$$

که در آن a_1, \dots, a_t اعضای از \mathcal{A} و x_1, \dots, x_m اعضای از $\bar{\Omega}^1(\mathcal{A})$ هستند. می دانیم به ازای $1 \leq i \leq s$ ، $1 \leq j \leq p$ و برای $1 \leq i \leq t$ ، $s+1 \leq i \leq t$ و $|f_i| = |\kappa| + |D_i| = 1$ ، هم چنین برای $1 \leq j \leq p$ و برای $p+1 \leq j \leq m$ و $|F_j| = |\kappa| + |S_j| = 0$ ، بنابراین θ یک تبدیل خطی زوج است.

سپس یادآوری می کنیم $\mathcal{A}_1 = \{0\}$ ، پس برای اعضای $a, b \in \mathcal{A}$ و $x, y \in \mathfrak{f}$ داریم

$$\begin{aligned} \omega(a \otimes x, b \otimes y) &= \sum_{i=1}^t \eta_{f_i, D_i}(a \otimes x, b \otimes y) + \sum_{j=1}^m \zeta_{F_j, S_j}(a \otimes x, b \otimes y) \\ &= \sum_{i=1}^t f_i(ab)\kappa(D_i x, y) + \sum_{j=1}^m F_j(a \otimes b)\kappa(S_j x, y) \\ &= \sum_{i=1}^t f_i(ab)\kappa(D_i x, y) + \sum_{j=1}^m \bar{F}_j(a \cdot d_{\mathcal{A}}(b))\kappa(S_j x, y) \end{aligned}$$

$$= \theta((\kappa(D_i x, y)ab)_{1 \leq i \leq t} + (\kappa(S_j x, y) \overline{a \cdot d_A(b)})_{1 \leq j \leq m})$$

$$= \theta(\alpha(a \otimes x, b \otimes y)).$$

این بدان معناست که $\theta \circ \alpha = \hat{\omega}$ حال لم ۹ را در نظر بگیرید و تعریف کنید

$$\Phi: \hat{\mathfrak{g}}_\alpha \rightarrow \hat{\mathfrak{g}}_{\hat{\omega}} \simeq \hat{\mathfrak{g}}_\omega$$

$$x + a \mapsto x + \theta(a) \quad (x \in \mathfrak{g}, \quad a \in \hat{M}).$$

برای $a, b \in \hat{M}$ و $x, y \in \mathfrak{g}$ داریم

$$[\Phi(x + a), \Phi(y + b)]_{\hat{\omega}} = [x + \theta(a), y + \theta(b)]_{\hat{\omega}} = [x, y] + \hat{\omega}(x, y)$$

$$= [x, y] + \theta(\alpha(x, y))$$

$$= \Phi([x, y] + \alpha(x, y))$$

$$= \Phi([x + \theta(a), y + \theta(b)]_\alpha).$$

اما θ زوج است، پس Φ نیز زوج است، از این رو، Φ یک همریختی است. این مطلب اثبات را کامل می‌کند.

منابع

1. Bloch S., "The dilogarithm and extensions of Lie algebras", Algebraic K-theory, Evanston 1980, Springer Lecture Notes in Math., N. 854 (1981).
2. Chevalley C., "Sur certains groupes simples, Tohoku Math", J. (2) 7, No. 1-2 (1955) 14–66.
3. Garland H., "The arithmetic theory of loop groups", Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 52 (1980) 5-136
4. Iohara K., Koga Y., "Central extensions of Lie superalgebras", Comment. Math. Helv. 86, No. 4 (2011) 985-986.
5. Kassel Ch., "Kähler differentials and coverings of complex simple lie algebras extended over a commutative algebra", J. Pure and Appl. Algebra 34 (1984) 265-275.
6. Kassel Ch., Loday J-L., "Extensions centrales d'algèbres de Lie", Annales de l'Institut Fourier, Tome 32, No. 4, (1982) 119-142.
7. Neeb K-H., Yousofzadeh M., "Current superalgebras and unitary representations", J. Pure and Applied Alg. 222(10) (2018) 3303-3333.
8. Neher E., "An introduction to universal central extensions of Lie superalgebras, in: Proceedings of the "Groups, Rings, Lie and Hopf Algebras"", Conference, St. John's, NF, 2001, in: Math. Appl., Vol. 555, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, (2003) 141-166.