(نشریه علوم دانشگاه خوارزمی)

بررسی تقارن‌های هندسی و قوانین بقا برای متریک هذلولوی در هندسهٔ $SL(2,R)$

روح‌اله بخشنده چمازکتی

دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، دانشکدهٔ علوم پایه، گروه ریاضی

دریافت ۹۷/۰۶/۳۱ پذیرش ۹۸/۱۱/۰۷

چکیده

در این مقاله به محاسبهٔ تقارن‌های لی (تقارن‌های کیلینگ) و تقارن‌های نوتری متریک هذلولوی می‌پردازیم. هم‌چنین یک آنالیز جبر تقارن‌های لی و نوتری متناظر با این متریک هذلولوی را بیان کرده و قوانین بقا با استفاده از تقارن‌های نوتری محاسبه شده‌اند.

واژه‌های کلیدی: تقارن لی، تقارن نوتری، قانون بقا، متریک ریمانی، محک ناوردایی، فضا زمان.

مقدمه

امروزه روش گروه تقارن نقش بسیار مهمی در تحلیل معادلات دیفرانسیل از جمله انتگرال‌گیری از معادلات دیفرانسیل معمولی، دسته‌بندی معادلات دیفرانسیل ناوردا، خطی‌سازی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، شکل کلی جواب عمومی، حساب تغییرات، قوانین بقا و کاربردهای فراوان در فیزیک و ریاضیات دارد [۱۱]، [۱۲].

تقارن‌های لی ابزاری قدرتمند برای محاسبهٔ جواب‌های دقیق معادلات دیفرانسیل غیرخطی و کاهش دستگاه معادلات دیفرانسیل به معادلات ساده‌تر است. مقالات متعددی در سال‌های اخیر در این باره نوشته شده است [۱]، [۲]، [۴]، [۵]، [۱۳]، [۱۴].

هم‌چنین تقارن‌های یک معادله دیفرانسیل رابطهٔ نزدیکی با قوانین بقا دارد. قضیهٔ نوتر [۱۰] روشی را برای یافتن قوانین بقای معادلات دیفرانسیل به‌دست آمده از یک لاگرانژین فراهم می‌سازد. یک روش معروف و گام‌به‌گام تعیین قوانین بقا برای دستگاه معادلات اویلر-لاگرانژ استفاده از تقارن‌های نوتری است که با استفاده از قضیهٔ نوتر به‌دست می‌آید [۱]، [۲]، [۳]، [۴]، [۵]، [۸]، [۹].

در سال‌های اخیر تلاش‌های فراوانی برای یافتن و تحلیل تقارن‌های نوتری، تقارن‌های لی و یافتن قوانین بقا برای متریک‌های ریمانی و فضا زمان‌ها به انجام رسیده است. در [۴] و [۵] نویسندگان به محاسبه و تحلیل تقارن‌های نوتری و کیلینگ انواعی از متریک‌های ریمانی و به‌خصوص متریک تخت فریدمن پرداخته‌اند. در [۱۳] و [۱۴] ارتباط بین تقارن‌های لی و تقارن‌های نقطه‌ای در مورد چند فضازمان خاص بررسی شده است. در [۱۴] تقارن‌های نقطه‌ای لی و تقارن‌های نوتری به‌طور هم‌زمان به‌وسیلهٔ انتگرال‌های اولیهٔ خطی و درجهٔ دوم برای فضازمان شوارتزچایلد و فضازمان فریدمن-رابرتسون-واکر محاسبه شده‌اند. هم‌چنین در [۱۲] قضیه‌ای ثابت شده است که ارتباط بین تقارن‌های لی معادلات ژئودزیک یک متریک ریمانی را با هم‌راستایی‌های آن متریک نشان می‌دهد. برای نمونه نتایج برای فضای اینشتین و فضاهای با انحنای ثابت به‌کار گرفته شده است.

*نویسنده مسئول r_bakhshandeh@nit.ac.ir

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.10.5]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.541]

هدف از این مقاله محاسبه و آنالیز تقارن‌های لی، تقارن‌های نوتری و قوانین بقا برای متریک ریمانی در هندسهٔ $SL(2,R)$ به‌صورت (۱) است [۶].

$$ds^2 = dr^2 + \cosh^2(r)\sinh^2(r)d\theta^2 + (d\phi + \sinh^2(r)d\theta)^2, \qquad (۱)$$

که (r,θ) مختصات قطبی نقاط مشترک یک تار و صفحهٔ پایه هذلولوی است و ϕ یک مختصات تاری است. بنابراین میدان تانسوری متریک متقارن g بدین‌صورت نمایش داده می‌شود:

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh^2(r)\cosh(2r) & \sinh^2(r) \\ 0 & \sinh^2(r) & 1 \end{pmatrix}$$

مختصات اقلیدسی متناظر با مختصات هذلولوی (r,θ,ϕ) بدین‌صورت است:

$$x = \tan\phi, \qquad y = \tanh(r).\frac{\cos(\theta-\phi)}{\cos(\phi)}, \qquad z = \tanh(r).\frac{\sin(\theta-\phi)}{\cos(\phi)},$$

که $r\in[0,\infty), \theta\in[-\pi,\pi)$ و $\phi\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ با توسیع روی R است.

به‌صورت کلی این مقاله در بخش‌های زیر تنظیم شده است:

در بخش دوم به محاسبهٔ تقارن‌های لی (تقارن‌های کیلینگ) متریک هذلولوی (۱) پرداخته شده است. در بخش سوم با استفاده از قضیهٔ نوتر، تقارن‌های نوتری متریک بررسی شده، محاسبه شده‌اند و در بخش چهارم قوانین بقا با استفاده از تقارن‌های نوتری محاسبه شده‌اند. در بخش آخر، بخش پنجم، برای یک نتیجه‌گیری در آنالیز جبر لی یک مقایسه بین جبر تقارن‌های لی و نوتری انجام شده و مطالبی به‌صورت خلاصه بیان شده است.

تقارن‌های نقطه‌ای لی

۱. محاسبهٔ تقارن‌های لی وابسته به متریک

فرض کنید (M,g) یک منیفلد ریمانی با بعد n باشد. در مختصات فضا زمان موضعی $x(s) = (x^1(s),\ldots,x^n(s))$ معادلات ژئودزیک عبارتند از دستگاهی متشکل از معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی مرتبهٔ دوم

$$\ddot{x}^i(t) + \Gamma^i_{jk}\dot{x}_j(t)\dot{x}_k(t) = 0, \qquad i = 1,2,\ldots,n, \qquad (۲)$$

که Γ^i_{jk} نماد کریستوفل و "." مشتق نسبت به طول قوس s است. حال دستگاه معادلات با n معادله دیفرانسیل مرتبهٔ دوم (۲) به‌صورت (۳) را در نظر می‌گیریم:

$$R_i(s, x(s), x^{(1)}(s), x^{(2)}(s)) = 0, \quad i = 1,\ldots,n. \qquad (۳)$$

که $x^{(j)}(s)$ به‌ازای $j = 1,2$ همان مشتق مرتبه j ام نسبت به پارامتر s است.

تبدیلات گروه لی یک پارامتری را که روی فضای (s,x) عمل می‌کند به‌صورت (۴) درنظر می‌گیریم:

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.10.5]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.541]

$$\bar{s}=s+\varepsilon\xi(s,x(s))+O(\varepsilon^2),\qquad \bar{x}^{\alpha}(s)=x^{\alpha}(s)+\varepsilon\phi^{\alpha}(s,x(s))+O(\varepsilon^2),\qquad (۴)$$

که $\alpha=1,\dots,n$ است. مولد بینهایت کوچک X متناظر با تبدیلات گروهی (۴) را

$$X=\xi(s,x)\frac{\partial}{\partial s}+\eta^{\alpha}(s,x)\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}},\qquad (۵)$$

تعریف می‌کنیم. امتداد مرتبG دوم X عبارت است از:

$$X^{[2]}=X+\eta^{\alpha}_{,(1)}(s,x,x^{(1)})\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}_{,(1)}}+\eta^{\alpha}_{,(2)}(s,x,\dots,x^{(2)})\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}_{,(2)}},\qquad (۶)$$

که ضرائب آن عبارتند از:

$$\eta^{\alpha}_{,(1)}=D\eta^{\alpha}_{,(0)}-x^{\alpha}_{,(1)}D\xi,\qquad \eta^{\alpha}_{,(2)}=D\eta^{\alpha}_{,(1)}-x^{\alpha}_{,(2)}D\xi\qquad (۷)$$

که $\eta^{\alpha}_{,(0)}=\eta^{\alpha}(s,x)$ و D عملگر مشتق کل است. ناوردایی دستگاه (۳) تحت تبدیلات گروه لی یک پارامتری (۴) منجر به مجک ناوردایی خواهد شد [۳]، [۷]. درواقع X یک تقارن نقطه‌ای لی برای دستگاه (۳) است اگر و تنها اگر

$$X^{[2]}R_i\,|_{R_i=0}=0.\qquad (۸)$$

با استفاده از (۸) دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به‌دست می‌آید که به آن معادلات تعیین‌کننده گوییم. با حل این دستگاه تقارن‌های نقطه‌ای لی به‌دست می‌آیند.

قضیهٔ ۲. جبر لی تقارن‌های نقطه‌ای g متناظر با متریک هذلولوی (۱) به‌وسیلهٔ مولدهای بینهایت کوچک (۹) تولید می‌شود:

$$\begin{aligned}
X_1&=\frac{\partial}{\partial s},\\
X_2&=s\frac{\partial}{\partial s},\\
X_3&=\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial r}+2\coth(2r)\cos(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}+\tanh(r)\cos(\theta)\frac{\partial}{\partial\varphi},\\
X_4&=\cos(\theta)\frac{\partial}{\partial r}-2\coth(2r)\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}-\tanh(r)\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\varphi},\\
X_5&=\frac{\partial}{\partial\varphi},\\
X_6&=\frac{\partial}{\partial\theta}.
\end{aligned}\qquad (۹)$$

که جابه‌جاگرهای غیر صفر آن عبارتند از:

$$[X_1,X_2]=X_1,\quad [X_3,X_4]=-2X_5-4X_6,\quad [X_3,X_6]=-X_4,\quad [X_4,X_6]=X_3.\qquad (۱۰)$$

اثبات: متریک هذلولوی (۱) را در نظر می‌گیریم. نمادهای کریستوفل غیرصفر این متریک عبارتند از، [۶]:

$$\begin{aligned}
&\Gamma^{r}_{\theta\theta}=-12\sinh(2r)(1+4\sinh^2(r)),\qquad \Gamma^{r}_{\theta\phi}=\Gamma^{r}_{\phi\theta}=-12\sinh(2r),\\
&\Gamma^{\theta}_{r\theta}=\Gamma^{\theta}_{\theta r}=2(1+4\sinh^2(r))\sinh(2r),\qquad \Gamma^{\theta}_{r\phi}=\Gamma^{\theta}_{\phi r}=2\sinh(2r),
\end{aligned}\qquad (۱۱)$$

$$\Gamma^{\phi}_{r\theta}=\Gamma^{\phi}_{\theta r}=-2\sinh^2(r)\tanh(r),\qquad \Gamma^{\phi}_{r\phi}=\Gamma^{\phi}_{\phi r}=-\tanh(r).$$

حال با جای‌گذاری (۱۱) در معادلات (۲) دستگاه معادلات ژئودزیک (۱۲) برای متریک (۱) به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} R_1:\ddot{r}-12\sinh(2r)(1+4\sinh^2(r))\dot{\theta}^2-\sinh(2r)\dot{\theta}\dot{\phi}=0\\ R_2:\ddot{\theta}+4(1+4\sinh^2(r))\sinh(2r)\dot{r}\dot{\theta}+4\sinh(2r)\dot{r}\dot{\phi}=0,\\ R_3:\ddot{\varphi}-4\sinh^2(r)\tanh(r)\dot{r}\dot{\theta}-2\tanh(r)\dot{r}\dot{\phi}=0.\end{cases}\tag{۱۲}$$

گیریم X میدان برداری

$$X=S(s,r,\theta,\phi)\frac{\partial}{\partial s}+R(s,r,\theta,\phi)\frac{\partial}{\partial r}+T(s,r,\theta,\phi)\frac{\partial}{\partial \theta}+P(s,r,\theta,\phi)\frac{\partial}{\partial \phi},\tag{۱۳}$$

مولد بینهایت کوچک نظیر به تبدیلات گروه لی یک پارامتری

$$\begin{aligned}\bar{s}&\mapsto s+\varepsilon\cdot S(s,r,\theta,\phi),\\ \bar{r}&\mapsto r+\varepsilon\cdot R(s,r,\theta,\phi),\\ \bar{\theta}&\mapsto \theta+\varepsilon\cdot T(s,r,\theta,\phi),\\ \bar{\phi}&\mapsto \phi+\varepsilon\cdot P(s,r,\theta,\phi).\end{aligned}$$

باشد. امتداد مرتبهٔ دوم X را با استفاده از روابط (۶) و (۷) می‌یابیم و با اعمال شرط ناوردایی (۸) روی (۱۲) مولدهای بینهایت کوچک (۹) به‌دست می‌آیند که با محاسبهٔ ساده کروشه لی این میدان‌های برداری حکم برقرار است.

تقارن‌های نوتری

فرض کنید n معادله دیفرانسیل معمولی (۲) به‌صورت

$$E_i(s,x(s),x^{(1)}(s),x^{(2)}(s))=0,\quad i=1,\dots,n.\tag{۱۶}$$

باشد. میدان برداری

$$Y=\bar{\xi}(s,x^{\mu})\frac{\partial}{\partial s}+\bar{\eta}^{\nu}(s,x^{\mu})\frac{\partial}{\partial x^{\nu}},\tag{۱۷}$$

را که $\mu,\nu=1,2,3,4,5$ با امتداد مرتبهٔ اول

$$Y^{[1]}=Y+\left(\bar{\eta}^{\nu}_{,s}+\bar{\eta}^{\nu}_{,\mu}\dot{x}^{\mu}-\bar{\xi}_{,s}\dot{x}^{\nu}-\bar{\xi}_{,s}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}\right)\frac{\partial}{\partial \dot{x}^{\nu}},\tag{۱۸}$$

در نظر می‌گیریم. در این‌صورت Y را یک تقارن نوتری لاگرانژین

$$\mathsf{L}(s,x^{\mu},\dot{x}^{\mu})=g_{\mu\nu}(x^{\sigma})\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}\tag{۱۹}$$

گوییم هرگاه تابع پیمانه‌ای $A(s,x^{\mu})$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$Y^{[1]}\mathsf{L}+(D_s\bar{\xi})\mathsf{L}=D_sA,\tag{۲۰}$$

که

$$D_s = \partial\partial s + \dot{x}^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \qquad (۲۱)$$

است. چون معادلات اولر-لاگرانژ (معادلات ژئودزیک) متریک مفروض معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ دوم هستند بنابراین می‌توان لاگرانژین را مرتبهٔ اول به‌صورت $\mathsf{L}(s, x_i, \dot{x}_i)$ در نظر گرفت که "." مشتق نسبت به پارامتر طبیعی طول قوس s است. در این‌صورت با ساده کردن (۲۰) به دستگاه

$$\dot{x}^{\mu} = g(s, x^{\mu}), \qquad (۲۲)$$

می‌رسیم که با حل این دستگاه تقارن‌های نوتری پدید می‌آید.

قضیهٔ ۳. جبر لی متناظر با تقارن‌های نوتری متریک هذلولوی (۱) به‌وسیلهٔ میدان‌های برداری (۲۳) تولید می‌شود:

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \frac{\partial}{\partial s},\\
Y_2 &= \sin(\theta)\frac{\partial}{\partial r} + 2\coth(2r)\cos(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta} + \tanh(r)\cos(\theta)\frac{\partial}{\partial\varphi},\\
Y_3 &= \cos(\theta)\frac{\partial}{\partial r} - 2\coth(2r)\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta} - \tanh(r)\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\varphi},\\
Y_4 &= \frac{\partial}{\partial\varphi},\\
Y_5 &= \frac{\partial}{\partial\theta}.
\end{aligned} \qquad (۲۳)$$

اثبات: لاگرانژین متریک (۱) برابر است با:

$$\mathsf{L} = \dot{r}^2 + \sinh^2(r)\cosh(2r)\dot{\theta}^2 + \sinh^2(r)\dot{\theta}\dot{\phi} + \dot{\phi}^2, \qquad (۲۴)$$

که در اینجا "." مشتق نسبت به پارامتر طبیعی طول قوس s است. معادلات اویلر-لاگرانژ (معادلات ژئودزیک) وابسته به (۲۴) عبارتند از:

$$\begin{cases}
E_1 : (\sinh^2(r) - \cosh(2r))\ddot{\phi} + 2\sinh^2(r)\sinh(2r)\dot{r}\dot{\theta} + \sinh^2(r)\dot{r}\dot{\phi} = 0,\\
E_2 : \ddot{r} - \sinh(r)(\sinh(r)\sinh(2r) + \cosh(2r))\dot{\theta}^2 - \sinh(2r)\dot{\theta}\dot{\phi} = 0,\\
E_3 : \sinh(r)\cosh^2(r)\ddot{\theta} + 2\cosh(r)[\sinh(r) + \cosh(2r)]\dot{r}\dot{\theta} - 2\cosh(r)\dot{r}\dot{\phi} = 0.
\end{cases} \qquad (۲۵)$$

فرض کنید $Y = \bar{\xi}\frac{\partial}{\partial s} + \bar{\eta}^1\frac{\partial}{\partial r} + \bar{\eta}^2\frac{\partial}{\partial\theta} + \bar{\eta}^3\frac{\partial}{\partial\phi}$ تقارن نوتری (۲۴) باشد. با قرار دادن $A = 0$ در معادلهٔ (۲۰) داریم:

$$Y^{[1]}\mathsf{L} + (D_s\bar{\xi})\mathsf{L} = 0, \qquad (۲۶)$$

با جای‌گذاری امتداد مرتبهٔ اول Y از فرمول (۱۸) تقارن‌های نوتری (۲۳) را می‌یابیم.

قوانین بقا

روشی برای تعیین قوانین بقا برای دستگاه معادلات اویلر-لاگرانژ، استفاده از تقارن‌های نوتری طبق قضیهٔ نوتر است [۱۰]. در واقع قوانین بقا برای دستگاه (۱۶) با استفاده از معادلهٔ (۲۷) به‌دست می‌آید:

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.10.5]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.541]

$$D_s T_i = 0. \qquad (۲۷)$$

قضیهٔ ۴. اگر Y یک تقارت نوتری برای لاگرانژین $\mathsf{L}(s, x^\mu, \dot{x}^\mu)$ باشد آن‌گاه

$$T = \bar{\xi}\mathsf{L} + (\bar{\eta}^\mu - \dot{x}^\mu \bar{\xi})\partial\mathsf{L}\partial\dot{x}^\mu - A, \qquad (۲۸)$$

یک انتگرال اولیه برای (۲۲) نظیر به Y است که $A = A(s, x^\mu)$ تابع پیمانه‌ای است.

بنابر قضیهٔ ۴ می‌توان قوانین بقا را برای تقارن‌های نوتری (۲۳) محاسبه کرد. برای این‌کار رابطهٔ (۲۸) به‌صورت (۲۹) نتیجه می‌شود:

$$T = \bar{\xi}\mathsf{L} + (\bar{\eta}^1 - \dot{r}\bar{\xi})\partial\mathsf{L}\partial\dot{r} + (\bar{\eta}^2 - \dot{\theta}\bar{\xi})\partial\mathsf{L}\partial\dot{\theta} + (\bar{\eta}^3 - \dot{\phi}\bar{\xi})\partial\mathsf{L}\partial\dot{\phi} - A, \qquad (۲۹)$$

که $A = 0$ در نظر می‌گیریم. در این‌صورت شار بقا برای هرکدام از تقارن‌های نوتری نظیر به متریک هذلولوی عبارتند از:

- اگر $Y_1 = \dfrac{\partial}{\partial s}$ باشد:

$$T = -\dot{r}^2 - \sinh^2(r)\cosh(2r)\dot{\theta}^2 - \sinh^2(r)\dot{\theta}\dot{\phi} - \dot{\phi}^2,$$

- اگر $Y_2 = \sin(\theta)\dfrac{\partial}{\partial r} + 2\coth(2r)\cos(\theta)\dfrac{\partial}{\partial\theta} + \tanh(r)\cos(\theta)\dfrac{\partial}{\partial\varphi},$ باشد:

$$T = 2\sin(\theta)\dot{r} + [4\coth(2r)\cosh(2r) + \tanh(r)]\cos(\theta)\sinh^2(r)\dot{\theta}$$
$$+ [2\coth(2r)\sinh^2(r) + 2\tanh(r)]\cos(\theta)\dot{\phi},$$

- اگر $Y_3 = \cos(\theta)\dfrac{\partial}{\partial r} - 2\coth(2r)\sin(\theta)\dfrac{\partial}{\partial\theta} - \tanh(r)\sin(\theta)\dfrac{\partial}{\partial\varphi},$ باشد:

$$T = 2\cos(\theta)\dot{r} - [4\coth(2r)\cosh(2r) + \tanh(r)\sinh^2(r)]\sin(\theta)\dot{\theta}$$
$$-2[\coth(2r)\sinh^2(r) + \tanh(r)]\sin(\theta)\dot{\phi},$$

- اگر $Y_4 = \dfrac{\partial}{\partial\varphi},$ باشد:

$$T = 2\sinh^2(r)\cosh(2r)\dot{\theta} + \sinh^2(r)\dot{\phi},$$

- اگر $Y_5 = \dfrac{\partial}{\partial\theta}$ باشد آن‌گاه:

$$T = \sinh^2(r)\dot{\theta} + 2\dot{\phi}.$$

نتیجه‌گیری

تقارن نقطه‌ای لی (تقارن‌های بردار کیلینگ) مربوط به متریک هذلولوی هندسه $SL(n,R)$ شامل تقارن‌های نوتری است و فقط یک عضو $s\dfrac{\partial}{\partial s}$ نسبت به آن بیش‌تر دارد. هم‌چنین تقارن نقطه‌ای $X_5 = \dfrac{\partial}{\partial\theta}$ با همهٔ تقارن‌های دیگر جابه‌جا می‌شود و جبر لی نظیر به تقارن‌های نقطه‌ای لی متریک هیپربولیک (۱) نیم‌ساده یا حل‌پذیر نیست زیرا فرم کیلینگ آن

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

تباهیده است. به‌علاوه جبر لی نظیر را می‌توان به‌صورت تجزیه لوی به‌صورت $g = a \propto h$ نوشت که $a = \langle X_1, X_2, X_5 \rangle$ رادیکال جبر بوده و $h = \langle X_3, X_4, X_5 + 12X_6 \rangle$ نیم‌ساده است.

قدردانی

از حمایت دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل از طریق اعتبار پژوهشی شمارۀ BNUT/391024/99 تقدیر و تشکر می‌کنم.

منابع

1. Bakhshandeh-Chamazkoti R., "Symmetry analysis of the charged squashed Kaluza–Klein black hole metric", Math. Meth. Appl. Sci. 39 (2016) 3163-3172.
2. Bakhshandeh-Chamazkoti R., "Geometry of the curved traversable wormholes of (3+1)-dimensional spacetime metric", International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, Vol. 14 (2017) 1750048.
3. Bluman G., Cheviakov A. F., Anco S., "Application of symmetry methods to partial differential equations, New York: (2010) Springer.
4. Bokhari H., Kara A. H., Kashif A. R., Zaman F., "Noether Symmetries Versus Killing Vectors and Isometries of Spacetimes", Int. J. Theor. Phys. 45 (2006) 1063.
5. Bokhari H., Kara A. H., "Noether versus Killing symmetry of conformally flat Friedmann metric", General Relativity and Gravitation, Vol. 39 (2007) 2053-2059.
6. Erjavec Z., "Minimal surfaces in $SL(n,R)$ geometry", Glasnik Matematicki, 50 (70) (2015) 207-221.
7. Ibragimov N. H., "Elementary Lie group analysis and ordinary differential equations", Chichester: Wiely (1999).
8. Kweyama M. C., Govinder K. S., Maharaj S. D., "Noether and Lie symmetries for charged perfect fluids", Class. Quantum Grav. 28 (2011) 105005.
9. Narain R., Kara A. H., "The Noether Conservation Laws of Some Vaidiya Metrics", Int J Theor Phys. 49 (2010) 260-269.
10. Noether E., "Invariante variations probleme, Nachr Akad Wiss Gott Math Phys Kl 1918;2:235-57", English translation in Transp Theory Stat Phys 1 (3) (1971) 186-207.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.10.5]

[DOI: 10.52547/mmr.6.4.541]

11. Olver P. J., "Applications of Lie Groups to Differential Equations", Springer: New York, (1986).

12. Ovsiannikov L. V., "Group Analysis of Differential Equations", Academic Press: New York, (1982).

13. Tsamparlis M., Paliathanasis A., "Lie and Noether symmetries of geodesic equations and collineations", Gen Relativ Gravit. 42 (2010) 2957-2980.

14. Tsamparlis M., Paliathanasis A., "Lie symmetries of geodesic equations and projective collineations", Nonlinear Dyn. 6 (2) (2010) 203-214.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.10.5]

[DOI: 10.52547/mmr.6.4.541]