عملگرهای موضعی تعمیم یافته بین مدول‌های تابعی

فرشته سعدی*، دانشگاه تربیت مدرس، دانشکدهٔ علوم ریاضی
معصومه نجفی توانی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اسلامشهر، دانشکدهٔ علوم پایه

دریافت ۹۷/۰۷/۰۲ پذیرش ۹۸/۰۷/۰۸

چکیده

فرض کنیم X یک فضای هاسدورف فشرده، E یک فضای نرم‌دار، $A(X)$ یک جبر تابعی باناخ منظم روی X و $A(X,E)$ زیرفضایی از $C(X,E)$ باشد. در این مقاله پس از معرفی مفهوم موضعی بودن نگاشت جمعی $S: A(X,E) \longrightarrow C(X,E)$ نسبت به نگاشت‌های جمعی $T_1, \dots, T_n: A(X) \to C(X)$، صورت کلی این نوع نگاشت‌ها را بین رده خاصی از زیرفضاهای $A(X,E)$ از $C(X,E)$ که ساختار $A(X)-$ مدولی دارند، شناسایی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: عملگر موضعی، نگاشت جداساز، توابع لیپ‌شیتس، توابع مطلقاً پیوسته، توابع برداری‌مقدار پیوسته.

مقدمه

فرض کنیم X یک فضای هاسدورف فشرده و $A(X)$ و $B(X)$ زیرفضاهایی از $C(X)$ باشند به‌طوری‌که $A(X) \subseteq B(X)$. عملگر خطی $T: A(X) \to B(X)$ موضعی[1] نامیده می‌شود هرگاه برای هر $f \in A(X)$ و هر $g \in B(X)$ از تساوی $f \cdot g = 0$ نتیجه شود $Tf \cdot g = 0$. هر عملگر موضعی $T: A(X) \to B(X)$ به‌وضوح نگاشتی جداساز[2] است به این معنی که برای هر $f, g \in A(X)$ از $f \cdot g = 0$ نتیجه می‌شود $Tf \cdot Tg = 0$.

به‌عنوان مثال برای فضای هاسدورف فشرده X و تابع $\varphi \in C(X)$ عملگر ضرب $f \to \varphi f$ بر $C(X)$ یک عملگر موضعی است. هم‌چنین عملگر مشتق بر فضای $C^1([0,1])$ متشکل از توابع به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر، نیز یک عملگر موضعی است. در واقع اگر $f, g \in C^1([0,1])$ طوری باشند که $f \cdot g = 0$ آن‌گاه $f = 0$ بر $\{t \in [0,1]: g(t) \neq 0\}$ که زیرمجموعهٔ بازی از $[0,1]$ است. این نیز نتیجه می‌دهد $f' = 0$ بر این مجموعه و در نتیجه $f' \cdot g = 0$.

عملگرهای جداساز بین ساختارهای مختلفی نظیر فضاهای تابعی، مشبکه‌ها[3]، جبرهای باناخ و غیره تعریف و بررسی شده‌اند. در حالت کلی نگاشت خطی $T: A \to B$ بین زیرفضاهای A و B از توابع پیوسته برداری مقدار، جداساز نامیده می‌شود هرگاه به‌ازای هر $f, g \in A$ از رابطهٔ $\operatorname{coz}(f) \cap \operatorname{coz}(g) = \phi$ نتیجه شود $\operatorname{coz}(Tf) \cap \operatorname{coz}(Tg) = \phi$، که برای تابع f، $\operatorname{coz}(f)$ به‌صورت $\operatorname{coz}(f) = \{x \in X: f(x) \neq 0\}$ تعریف می‌شود.

* نویسنده مسئول sady@modares.ac.ir

1. Local operator
2. Separating map
3. Lattices

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.6.2]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.91]

عملگرهای جداساز روی فضای توابع پیوسته مختلط مقدار در [۱۰] بررسی شده است. سپس مسئله مشابهی برای عملگرهای جداساز بین جبرهای باناخ منظم[1] جابه‌جایی در [۷] بررسی شده است. اغلب چنین عملگرهایی توصیفی به شکل عملگر ترکیبی وزن‌دار روی تمام یا بخشی از فضاهای توپولوژیک زمینه دارند. برای نتایج بیش‌تر در این رابطه برای حالت‌هایی که دامنه و برد، فضای توابع پیوسته اسکالر یا برداری مقدار یا به‌طور کلی زیر فضاهای خاصی از آنها هستند [۳] ، [۶] ، [۹] ، [۱۱] و [۱۲] را ببینید. در مقالات اخیر [۱] و [۲]، ویلنا و دیگران به بررسی مسئله کلی‌تری به نام " نگاشت‌های حافظ ضرب صفر[2] " روی جبر توابع به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر بر $[0,1]$ و جبر لیپ شیتس[3] پرداختند.

در این مقاله ابتدا مفهوم عملگر موضعی (و جداساز) را تعمیم داده و سپس به شناسایی این نوع عملگرها (نه لزوماً خطی) بین رده‌های خاصی از فضاهای تابعی برداری مقدار که نسبت به یک جبر باناخ جابه‌جایی منظم A ساختار مدولی دارند، می‌پردازیم. از این رو نتایج ارائه شده، تعمیم نتایج شناخته شده قبلی در رابطه با عملگرهای جداساز (به ویژه عملگرهای موضعی) است. لازم به ذکر است در رابطه با نگاشت‌های جداساز بین فضاهای تابعی برداری مقدار با مقادیر در یک فضای نرم‌دار E، معمولاً یا E جبر باناخ فرض می‌شود یا فضای تابعی مشخصی نظیر فضای توابع برداری مقدار مطلقاً پیوسته در نظر گرفته می‌شود، [۵] و [۸] را ببینید.

در ادامه فرض می‌کنیم X یک فضای هاسدورف فشرده و E یک فضای نرم‌دار حقیقی یا مختلط است. فضای توابع پیوسته روی X با مقادیر در E با $C(X\,,E)$ نمایش داده می‌شود. نماد $\|\cdot\|_\infty$ برای نرم سوپرمم روی $C(X\,,E)$ به‌کار می‌رود. برای حالتی که E همان میدان اعداد مختلط باشد نماد $C(X)$ به‌کار می‌رود.

زیر جبر A از $C(X)$ یک جبر تابعی باناخ روی X نامیده می‌شود هرگاه A شامل توابع ثابت باشد، نقاط X را جدا کند و همراه با نرمی (نه لزوماً نرم سوپرمم) جبر باناخ باشد. در حالتی که نرم یک جبر تابعی باناخ، نرم سوپرمم باشد چنین زیرجبری، جبر یکنواخت روی X نامیده می‌شود.

توجه داریم که هر جبر باناخ جابه‌جایی نیم‌ساده یکدار، یک جبر تابعی باناخ روی فضای ایده‌آل ماکسیمال خود است. بنابراین بدون کم شدن از کلیت فرض می‌کنیم $A(X)$ یک جبر تابعی باناخ روی فضای هاسدورف فشرده X است به‌طوری‌که X فضای ایده‌آل ماکسیمال $A(X)$ است. به‌عبارت دیگر فرض می‌کنیم که $A(X)$ یک جبر تابعی باناخ طبیعی روی X باشد. جبر$A(X)$ را منظم گوییم هرگاه برای هر $x \in X$ و هر زیرمجموعه بسته F از X که $x \notin F$، تابع $f \in A(X)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $f(x) \neq 0$ و $f|_F = 0$. متذکر می‌شویم که همانند $C(X)$ ، قضیهٔ افراز واحد در مورد جبرهای تابعی باناخ منظم برقرار است. به‌علاوه اگر $A(X)$ منظم باشد آن‌گاه برای هر زوج از زیرمجموعه‌های بسته و از هم جدای F و G از X ، تابع $f \in A(X)$ وجود دارد به‌طوری که $f|_F = 1$ و $f|_G = 0$، قضیهٔ ۴،۱،۱۸ از مرجع [۴] را ببینید.

برای $f \in A(X)$ و $g \in A(X,E)$ تابع $f \cdot g \in C(X\,,E)$ به‌طور طبیعی تعریف می‌شود و برای زیرفضای $A(\mathrm{X}\,,E)$ از $\mathrm{C(X,E)}$ منظور از $A(\mathrm{X}) \cdot A(\mathrm{X}\,,E)$ فضای تولید شده به‌وسیلهٔ چنین توابعی است.

تعریف ۱. فرض کنیم $A(X)$ یک جبر تابعی باناخ روی X و $A(X\,,E)$ نیز زیرفضایی از $C(X\,,E)$ شامل ثابت‌ها باشد که یک $A(\mathrm{X})-$مدول است، یعنی $A(\mathrm{X}) \cdot A(\mathrm{X}\,,E) \subseteq A(\mathrm{X}\,,\mathrm{E})$. همچنین فرض کنیم $n \in \mathbb{N}$ و

1. Regular Banach algebra
2. Zero product preserving map
3. Lipschitz algebra

$T_1, \dots, T_n: A(X) \to C(Y)$ و $S: A(X, E) \to C(Y, F)$ نگاشت‌های جمعی باشند که در آن Y یک فضای هاسدورف فشرده و F یک فضای نرم‌دار است. گوییم S نسبت به $T_1, \dots, T_n$ موضعی است هرگاه برای $f_1, \dots, f_n \in A(X)$ و $g \in A(X, E)$، از تساوی $f_1 \cdot f_2 \dots f_n \cdot g = 0$ نتیجه شود:

$$T_1 f_1 \cdot T_2 f_2 \dots T_n f_n \cdot Sg = 0$$

در تعریف مذکور اگر فرض کنیم $n = 1$، $E = \mathbb{C} = F$، $X = Y$ و $A(\mathrm{X}, \mathrm{E}) = A(X)$ آن‌گاه با فرض آن‌که T_1 عملگر همانی روی $A(\mathrm{X})$ باشد، تعریف بالا همان تعریف موضعی بودن عملگر $S: A(X) \to A(X)$ و با فرض آنکه $T_1 = S$ تعریف جداساز بودن نگاشت $S: A(X) \to A(X)$ به‌دست می‌آید.

به‌عنوان مثال فرض کنید $\varphi: X \to X$ یک نگاشت پیوسته و نگاشت‌های $T_1, \dots, T_n: C(X) \to C(X)$ و $S: C(X, E) \to C(X, E)$ بدین‌صورت باشند:

$$T_i f(x) = w_i(x) f(\varphi(x)) \qquad (f \in C(X), i = 1, \dots, n)$$
$$Sg(x) = J_x\Big(g\big(\varphi(x)\big)\Big) \qquad (g \in C(X, E))$$

که برای $i = 1, \dots, n$، $w_i \in C(X)$ و برای هر $x \in \mathrm{X}$، $J_x: E \to E$ نگاشتی خطی و پیوسته است. در این صورت S نسبت به $T_1, \dots, T_n$ موضعی است.

هدف این مقاله آن است که نشان دهیم برای رده مناسبی از زیرفضاهای $C(\mathrm{X})$ و $C(X, E)$، توصیفی مشابه مثال فوق برای چنین عملگرهایی برقرار است.

عملگرهای موضعی تعمیم یافته

در این بخش فرض می‌کنیم X یک فضای هاسدورف فشرده، E یک فضای نرم‌دار حقیقی یا مختلط، $A(X)$ یک جبر تابعی باناخ طبیعی و منظم روی X و زیرفضای $A(\mathrm{X}, E)$ از $C(X, E)$ یک $A(\mathrm{X})-$ مدول شامل توابع ثابت است.

تعریف ۲. فرض کنیم Y یک فضای هاسدورف فشرده و F یک فضای نرم‌دار است**.** گوییم زیرفضای $A(Y, F)$ از $C(Y, F)$ ویژگی (P) دارد هرگاه برای هر $y \in Y$ و هر تابع $f \in A(Y, F)$ که $f(y) = 0$ دنباله‌ای از توابع $\{f_n\}$ در $A(Y, F)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که هر f_n روی یک همسایگی y صفر است و $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

در زیر به چند مثال از فضاهایی که ویژگی (P) دارند، اشاره شده است.

مثال ۱. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک فشرده و E یک فضای باناخ است. گوییم تابع پیوسته برداری مقدار $f: X \to E$ در شرط لیپ شیتس از مرتبه $\alpha \in (0, 1]$ صدق می‌کند هرگاه

$$P_\alpha(f) = sup\left\{\frac{\|f(x) - f(y)\|}{d^\alpha(x, y)} : x, y \in X \text{ و } x \neq y\right\} < \infty.$$

مجموعه تمام توابع $f: X \to E$ را که در شرط لیپ شیتس از مرتبه α صدق می‌کنند، با نماد $\mathrm{Lip}^\alpha(X, E)$ و مجموعه تمام توابع $f \in \mathrm{Lip}^\alpha(X, E)$ که در شرط $\lim_{d(x,y)\to 0} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{d^\alpha(x, y)} = 0$ صدق می‌کنند، با نماد $\mathrm{lip}^\alpha(X, E)$ نشان داده می‌شوند. در این صورت فضای $\mathrm{Lip}^\alpha(X, E)$ همراه با نرم $\|f\|_\alpha = \|f\|_\infty + P_\alpha(f)$ یک فضای باناخ و $\mathrm{lip}^\alpha(X, E)$ زیرفضای بسته $\mathrm{Lip}^\alpha(X, E)$ است. نمادهای $\mathrm{Lip}^\alpha(X)$ و $\mathrm{lip}^\alpha(X)$ را در حالت

$E=\mathbb{C}$ به‌کار می‌بریم و زمانی که $\alpha=1$ به جای $\mathrm{Lip}^{\alpha}(X)$ و $\mathrm{Lip}^{\alpha}(X,E)$ نمادهای $\mathrm{Lip}(X)$ و $\mathrm{Lip}(X,E)$ به‌کار می‌بریم. به‌آسانی می‌توان دید که برای هر $\alpha\in(0,1)$

$$\mathrm{Lip}(X,E)\subseteq \mathrm{lip}^{\alpha}(X,E)\subseteq \mathrm{Lip}^{\alpha}(X,E).$$

به‌علاوه $\mathrm{Lip}^{\alpha}(X)$ یک جبر تابعی باناخ طبیعی است، یعنی فضای ایده‌آل ماکسیمال آن خود X است. هم‌چنین $\mathrm{Lip}^{\alpha}(X,E)$ یک $\mathrm{Lip}^{\alpha}(X)-$ مدول باناخ است که شامل توابع ثابت نیز هست.

فرض کنیم $K\subseteq X$ فشرده و $U\subseteq X$ یک همسایگی باز K باشد. تابع $f_{K,U}$ روی X را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$f_{K,U}(\mathrm{x})=\frac{d(x,X\backslash U)}{d(x,K)+d(x,X\backslash U)}.$$

در این صورت $f_{K,U}\in \mathrm{Lip}(X)$ ، $f_{K,U}\big|_K=1$ ، $\mathrm{coz}\,(f_{K,U})\subseteq U$ و $0\le f_{K,U}\le 1$. بنابراین $\mathrm{Lip}(X)$ (و در نتیجه $\mathrm{Lip}^{\alpha}(X)$ و $\mathrm{lip}^{\alpha}(X)$ به‌ازای هر $\alpha\in(0,1)$)، یک جبر تابعی باناخ منظم است.

حال فرض می‌کنیم $g\in \mathrm{Lip}(X,E)$ و $x_0\in X$ طوری باشد که $g(x_0)=0$. برای هر $n\in\mathbb{N}$ ، $\delta_n>0$ را طوری انتخاب می‌کنیم که اگر $d(x_0,y)<\delta_n$ آن‌گاه $\|g(y)\|<\frac{1}{n}$. همسایگی‌های U_n و V_n از x_0 را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$V_n=\{x\in X: d(x,x_0)<\frac{1}{2}\delta_n\} \quad و \quad U_n=\{x\in X: d(x,x_0)<\delta_n\}.$$

قرار می‌دهیم $g_n=\left(1-f_{\overline{V}_n,U_n}\right)g$، در این صورت با یک بررسی ساده می‌توان دید $g_n\in \mathrm{Lip}(X,E)$، $g_n|_{V_n}=0$ و $\|g_n-g\|_\infty<\frac{1}{n}$ یعنی $\mathrm{Lip}(X,E)$ ویژگی (P) را دارد.

با توجه به آن‌که $\mathrm{Lip}(X)\subseteq \mathrm{Lip}^{\alpha}(X)$ و $\mathrm{Lip}^{\alpha}(X)\cdot \mathrm{Lip}^{\alpha}(X,E)\subseteq \mathrm{Lip}^{\alpha}(X,E)$ با استدلالی مشابه بحث مذکور می‌توان نتیجه گرفت که $\mathrm{Lip}^{\alpha}(X,E)$ نیز ویژگی (P) دارد.

مثال ۲. بازهٔ بسته واحد $I=[0,1]$ و فضای باناخ E را در نظر می‌گیریم. تابع $f: I\to E$ را مطلقاً پیوسته گویند اگر به‌ازای هر $\varepsilon>0$ یک $\delta>0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر خانواده $\{(s_i,t_i)\}_{i=1}^{n}$ از زیربازه‌های باز و مجزای I که در شرط $\sum_{i=1}^{n}(t_i-s_i)<\delta$ صدق کند، رابطه $\sum_{i=1}^{n}\|f(t_i)-f(s_i)\|<\varepsilon$ برقرار باشد.

مجموعه تمام توابع مطلقاً پیوسته $E-$ مقدار روی I را با نماد $\mathrm{AC}(I,E)$ نشان می‌دهیم. هم‌چنین نماد $\mathrm{AC}(I)$ را برای حالت $E=\mathbb{C}$ به‌کار می‌بریم. به‌ازای هر $f\in \mathrm{AC}(I,E)$ قرار می‌دهیم:

$$\mathrm{Var}\,(f,I)=\sup\{\textstyle\sum_{i=1}^{n}\|f(t_i)-f(t_{i-1})\|: 0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1\}.$$

در این صورت $\mathrm{AC}(I,E)$ همراه با نرم $\|f\|_{\mathrm{AC}}=\|f\|_\infty+V\mathrm{ar}\,(f,I)$ یک فضای باناخ است.

قضیهٔ ۴۰۴۰۳۵ از مرجع [۴] نشان می‌دهد که $\mathrm{AC}\,(I)$ یک جبر تابعی باناخ منظم روی I است. هم‌چنین به سادگی می‌توان دید که به‌ازای هر $f\in \mathrm{AC}(I)$ و $g\in \mathrm{AC}(I,E)$ داریم $f\cdot g\in \mathrm{AC}(I,E)$. در نتیجه با به‌کار بردن بحثی مشابه قضیهٔ ۴۰۴۰۳۵ از مرجع [۴]، به آسانی می‌توان ثابت کرد که $\mathrm{AC}(I,E)$ ویژگی (P) دارد.

حال فرض کنیم $n\in\mathbb{N}$ و به‌ازای $i=1,\dots,n$ ، $T_i: A(X)\to A(X)$ و هم‌چنین $S: A(X,E)\to A(X,E)$ نگاشت‌های جمعی پیوسته (و درنتیجه خطی- حقیقی) باشند که S نسبت به $T_1,\dots,T_n$ موضعی است، قرار می‌دهیم

$$X_1=\{y\in X:\ \textstyle\prod_{i=1}^{n}T_i1(y)\neq 0\}\cap\left(\bigcup_{g\in A(X,E)}\mathrm{coz}(Sg)\right).$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.6.2]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.91]

بدیهی است هرگاه T_i ها یکه‌ای باشند، یعنی $T_i 1 = 1$ ، و برد S شامل حداقل یک تابع ثابت ناصفر در $C(X\,,E)$ باشد، آن‌گاه $X_1 = X$.

قضیهٔ زیر نتیجهٔ اصلی این مقاله است.

قضیهٔ اصلی. فرض کنیم $A(\mathrm{X})$ و $A(\mathrm{X}\,,\mathrm{E})$ ویژگی (P) داشته باشند و نگاشت‌های $T_1, \dots, T_n: A(X) \to C(X)$ و $S: A(X\,,E) \to A(X\,,E)$ نگاشت‌های جمعی باشند که نسبت به نرم سوپرمم پیوسته هستند و به‌علاوه S نسبت به $T_1\,, \dots, T_n$ موضعی است. در این صورت نگاشت پیوسته $\varphi: X_1 \to X$ و خانواده $\{J_y\}_{y\in X_1}$ از عملگرهای خطی ـ حقیقی پیوسته روی E وجود دارند به‌طوری‌که برای هر $y \in X_1$ ،

$$T_k f(y) = T_k(f(\varphi(y)))(y) \qquad (f \in A(X)\,, k = 1\,, \dots, n),$$
$$Sg(y) = J_y\Big(g\big(\varphi(y)\big)\Big) \qquad \big(g \in A(X\,,E)\big).$$

لازم به ذکر است که تساوی اول در روابط بالا ، در واقع توصیف نگاشت‌های T_k را بدین‌صورت بیان می‌کند:

$$T_k f(y) = \mathrm{Re}(f(\varphi(y)))\, T_k 1\,(y) + \mathrm{Im}(f(\varphi(y)))\, T_k i(y) \qquad \big(f \in A(X)\big)$$

برهان. اثبات قضیه را در دو گام می‌آوریم، که برای گام دوم نیاز به چند تعریف و لم داریم که ارائه می‌دهیم.

گام اول، نشان می‌دهیم بدون کم شدن از کلیت می‌توان فرض کرد $n = 1$.

برای این منظور فرض کنیم قضیه برای حالت $n = 1$ ثابت شده باشد و نگاشت‌های $T_1\,, \dots, T_n$ و S در فرض قضیه صدق کنند. برای $k = 1\,, \dots, n$ ، نگاشت‌های $S_k: A(X\,,E) \to A(X\,,E)$ را با ضابطهٔ

$$S_k g = \prod_{j\neq k} T_j 1 \cdot Sg \qquad (g \in A(X\,,E)) \tag{۱}$$

در نظر می‌گیریم. هر S_k یک نگاشت جمعی و پیوسته (و در نتیجه خطی ـ حقیقی) است. به‌علاوه اگر $f \in A(X)$ و $g \in A(X\,,E)$ طوری باشند که $f \cdot g = 0$ آنگاه $f \cdot 1 \dots 1 \cdot g = 0$ و با توجه به فرض نتیجه شود

$$T_1 f \cdot S_1 g = T_1 f \cdot T_2 1 \cdot \dots \cdot T_n 1 \cdot Sg = 0.$$

یعنی S_1 نسبت به T_1 موضعی است. با به‌کار بردن قضیه برای حالت $n = 1$، نگاشت پیوسته $\varphi_1: X_1 \to X$ و خانواده $\{J_y^1\}_{y\in X_1}$ از نگاشت‌های خطی ـ حقیقی پیوسته روی E وجود دارند به‌طوری‌که برای هر $y \in X_1$ خواهیم داشت،

$$T_1 f(y) = T_1(f(\varphi_1(y)))(y) \qquad \big(f \in A(X)\big),$$
$$S_1 g(y) = J_y^1\Big(g\big(\varphi_1(y)\big)\Big) \qquad \big(g \in A(X,E)\big)\,.$$

با بحث مشابهی برای T_k و S_k به‌جای T_1 و S_1 که $k = 2\,, \dots, n$ ، نگاشت پیوسته $\varphi_k: X_1 \to X$ و خانواده $\{J_y^k\}_{y\in X_1}$ از نگاشت‌های خطی ـ حقیقی پیوسته روی E وجود دارند که برای هر $y \in X_1$ داریم:

$$T_k f(y) = T_k(f(\varphi_k(y)))(y) \qquad \big(f \in A(X)\big),$$
$$S_k g(y) = J_y^k\Big(g\big(\varphi_k(y)\big)\Big) \qquad \big(g \in A(X\,,E)\big).$$

ابتدا نشان می‌دهیم برای هر k ، $\varphi_k = \varphi_1$. به برهان خلف فرض کنیم $y \in X_1$ و $1 \le k \le n$ طوری باشند که $\varphi_k(y) \neq \varphi_1(y)$. در این صورت همسایگی‌های مجزای U و V به‌ترتیب از $\varphi_1(y)$ و $\varphi_k(y)$ در X را می‌توان در نظر گرفت. با توجه به منظم بودن $A(X)$ تابع‌های $f_1, f_2 \in A(X)$ وجود دارند که

$$f_1(\varphi_1(y)) = 1\,, \;\; \mathrm{coz}(f_1) \subseteq U$$

و

$$f_2(\varphi_k(y)) = 1\ ,\ \ \mathrm{coz}(f_2) \subseteq V.$$

از آن‌جاکه $y \in X_1$ پس تابع $g \in A(X\,,E)$ وجود دارد که $Sg(y) \neq 0$. حال با توجه به این‌که $f_1 \cdot f_2 = 0$ نتیجه می‌شود $f_1 \cdot f_2 \cdot 1 \dots 1 \cdot\ g = 0$ و بنابراین

$$T_1 f_1 \cdot T_k f_2 \cdot \prod_{j\neq 1\,,k} T_j 1 \cdot Sg = 0.$$

به‌ویژه

$$T_1 f_1(y) \cdot T_k f_2(y) \cdot \prod_{j\neq 1\,,k} T_j 1(y) \cdot Sg(y) = 0,$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$T_1 f_1(y) \cdot T_k f_2(y) = 0.$$

در حالی‌که

$$T_1 f_1(y) = T_1(f_1(\varphi_1(y)))\ (y) = T_1 1(y) \neq 0$$

و

$$T_k f_2(y) = T_k(f_2(\varphi_k(y)))\ (y) = T_k 1(y) \neq 0.$$

این تناقض نشان می‌دهد که $\varphi_k = \varphi_1$ روی X_1. بنابراین با فرض آن‌که $\varphi = \varphi_1$، برای هر $k = 1, \dots, n$ و $y \in X_1$ داریم:

$$T_k f(y) = T_k(f(\varphi(y)))(y) \qquad (f \in A(X))$$
$$S_k g(y) = J_y^k\left(g\big(\varphi(y)\big)\right) \qquad \big(g \in A(X\,,E)\big).$$

با به‌کار بردن تساوی اخیر برای $k = 1$ و با توجه به تعریف S_k نتیجه می‌شود برای هر $g \in A(X,E)$

$$T_2 1(y) \dots\ T_n 1(y) \cdot Sg(y) = J_y^1\left(g\big(\varphi(y)\big)\right).$$

از طرفی چون $y \in X_1$ نتیجه می گیریم به‌ازای هر $j = 1, \dots, n$، $T_j 1(y) \neq 0$ و لذا تساوی

$$Sg(y) = (\textstyle\prod_{j\neq 1} T_j 1(y))^{-1} \cdot J_y^1(g\big(\varphi(y)\big))$$

به‌دست می‌آید. بنابراین اگر برای $y \in X_1$، نگاشت $J_y\colon E \to E$ را با ضابطه

$$J_y(e) = (\textstyle\prod_{j\neq 1} T_j 1(y))^{-1} \cdot J_y^1(e) \qquad (e \in E)$$

تعریف کنیم آن‌گاه J_y نیز یک نگاشت خطی ـ حقیقی پیوسته روی E است و به‌علاوه

$$Sg(y) = J_y\left(g\big(\varphi(y)\big)\right) \qquad (g \in A(X\,,E))$$

و این همان نتیجه کلی مورد نظر است. پس می‌توان فرض کرد $n = 1$.

بنابراین، با توجه به توضیحات بالا، در ادامه فرض می‌کنیم $T\colon A(X) \to C(X)$ و $S\colon A(X\,,E) \to C(X\,,E)$ نگاشت‌های جمعی پیوسته‌ای هستند که S نسبت به T موضعی است و

$$X_1 = \{y\colon T1(y) \neq 0\} \cap (\textstyle\bigcup_{g\in A(X\,,E)} \mathrm{coz}(Sg)).$$

تعریف ۳. فرض کنیم $y \in X_1$ ثابت باشد. برای $x \in X$ و همسایگی V از x

الف) گوییم $(x\,,V)$ خاصیت P_y دارد هرگاه $f \in A(X)$ وجود داشته باشد که $\mathrm{coz}(f) \subseteq V$ و $Tf(y) \neq 0$؛

ب) گوییم (x, V) خاصیت Q_y دارد هرگاه $g \in A(X\,,E)$ وجود داشته باشد که $\mathrm{coz}(g) \subseteq V$ و $Sg(y) \neq 0$.

لم ۱. فرض کنیم $y \in X_1$ و $x \in X$. در این صورت گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

الف) برای هر همسایگی V از x، $(x\,,V)$ حداقل یکی از خاصیت‌های P_y و Q_y را دارد؛
ب) برای هر همسایگی V از x ، $(x\,,V)$ هر دو خاصیت P_y و Q_y را دارد.

برهان. بدیهی است که (الف) از (ب) نتیجه می‌شود. برای اثبات عکس این مطلب فرض کنیم V یک همسایگی x است. اگر $(x\,,V)$ خاصیت P_y را نداشته باشد آن‌گاه برای هر $f \in A(X)$ که $\operatorname{coz}(f) \subseteq V$، داریم $Tf(y) = 0$. همسایگی U از x را طوری در نظر می‌گیریم که $\overline{U} \subseteq V$. با توجه به (الف)، $(x\,,U)$ یکی از ویژگی‌های P_y یا Q_y را دارد. اگر ویژگی P_y برای $(x\,,U)$ برقرار باشد، برای $(x\,,V)$ نیز برقرار است و این خلاف فرض است. پس $(x\,,U)$ ویژگی Q_y را دارد. یعنی $g \in A(X\,,E)$ وجود دارد که $\operatorname{coz}(g) \subseteq U$ و $Sg(y) \neq 0$. با توجه به این‌که $A(X)$ یک جبر باناخ منظم است و $\overline{U}$ و $X\backslash V$ مجموعه‌های بسته و از هم جدای X هستند تابع $h \in A(X)$ وجود دارد که $h = 0$ روی $X\backslash V$ و $h = 1$ روی $\overline{U}$. با توجه به این‌که برای هر $f \in A(X)$ ،

$$f = f \cdot h + f \cdot (1-h)$$

و T خطی ـ حقیقی است پس

$$Tf(y) = T(f \cdot h)(y) + T\big(f \cdot (1-h)\big)(y) \tag{۲}$$

و از آن‌جاکه $\operatorname{coz}(f \cdot h) \subseteq \operatorname{coz}(h) \subseteq V$ از فرض نتیجه می‌شود $T(f \cdot h)(y) = 0$. از طرفی با توجه به این‌که $f \cdot (1-h) \cdot g = 0$ نتیجه می‌شود:

$$T\big(f \cdot (1-h)\big)(y) \cdot Sg(y) = 0,$$

و چون $Sg(y) \neq 0$ پس $T\big(f \cdot (1-h)\big)(y) = 0$. بنابراین برای هر $f \in A(X)$، از رابطهٔ (۲)، نتیجه می‌شود که $Tf(y) = 0$، به‌ویژه $T1(y) = 0$ و این یک تناقض است، زیرا $y \in X_1$. در نتیجه $(x\,,V)$ خاصیت P_y دارد.

بحث مشابهی نشان می‌دهد چنان‌چه $(x\,,V)$ خاصیت Q_y نداشته باشد برای هر $g \in A(X,E)$ داریم $Sg(y) = 0$ که این نیز امکان ندارد زیرا $y \in X_1$. بنابراین $(x\,,V)$ خاصیت Q_y را نیز دارد.

لم ۲. برای هر $y \in X_1$ ، نقطه یکتای $x \in X$ وجود دارد که در ویژگی‌های معادل لم قبل صدق می‌کند.

برهان. برای اثبات وجود، فرض می‌کنیم هیچ نقطه $x \in X$ در ویژگی مورد نظر صدق نکند. پس برای هر $x \in X$ همسایگی V_x از x وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $f \in A(X)$ اگر $\operatorname{coz}(f) \subseteq V_x$ آنگاه $Tf(y) = 0$. با توجه به فشردگی X، نقاط $x_1 \,.\, \dots \,.\, x_n$ در X وجود دارند که $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$. با به‌کار بردن قضیه افراز واحد در $A(X)$، اعضای $f_1, \dots, f_n \in A(X)$ وجود دارند که $\sum_{i=1}^{n} f_i = 1$ و

$$\operatorname{coz}(f_i) \subseteq V_{x_i} \qquad (i = 1, \dots, n).$$

پس برای هر $f \in A(X)$، $f = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot f$. با توجه به این‌که $\operatorname{coz}(f_i \cdot f) \subseteq V_{x_i}$ پس $T(f_i \cdot f)(y) = 0$ و در نتیجه برای هر $f \in A(X)$ ،

$$Tf(y) = \sum_{i=1}^{n} T(f_i . f)(y) = 0$$

و این امکان ندارد، زیرا $y \in X_1$.

برای اثبات یکتایی، فرض می‌کنیم x_1 و x_2 اعضای متمایز X باشند که هر دو در ویژگی های ذکر شده صدق می‌کنند. همسایگی‌های مجزای V_1 و V_2 به‌ترتیب از x_1 و x_2 را در نظر می‌گیریم. بنابر لم قبل، زوج‌های $(x_1\,,V_1)$ و $(x_2\,,V_2)$ هر دو ویژگی P_y و Q_y دارند، پس توابع $f \in A(X)$ و $g \in A(X\,,E)$ وجود دارند به‌طوری‌که

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.6.2]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.91]

$coz(f) \subseteq V_1$ ، $\mathrm{coz}(g) \subseteq V_2$ ، $Tf(y) \neq 0$ و همچنین $Sg(y) \neq 0$. بنابراین $Tf(y) \cdot Sg(y) \neq 0$ درحالی‌که $f \cdot g = 0$ و این یک تناقض است.

تعریف ۴. با توجه به لم قبل نگاشت $\varphi: X_1 \to X$ را طوری تعریف می‌کنیم که برای $y \in X_1$ ، نقطه $x = \varphi(y)$ نقطه یکتایی باشد که از لم قبل به‌دست می‌آید.

لم ۳. فرض کنیم $y \in X_1$ و $x = \varphi(y)$.

الف) اگر $f \in A(X)$ و $Tf(y) \neq 0$ آنگاه $x \in \mathrm{supp}(f)$.

ب) اگر $g \in A(X\,, E)$ و $Sg(y) \neq 0$ آنگاه $x \in \mathrm{supp}(g)$.

ج) اگر $f \in A(X)$ (به‌ترتیب $g \in A(X\,, E)$) و به‌ازای زیرمجموعه باز U از X داشته باشیم، $f|_U = 0$ (به ترتیب $g|_U = 0$) آنگاه $Tf|_{\varphi^{-1}(U)} = 0$ (به ترتیب $Sg|_{\varphi^{-1}(U)} = 0$).

د) نگاشت φ پیوسته است.

برهان.

الف) فرض می‌کنیم $x \notin \mathrm{supp}(f)$. پس همسایگی V از x وجود دارد به‌طوری‌که $\bar{V} \cap \mathrm{supp}(f) = \emptyset$. با توجه به تعریف نگاشت φ و به‌کار بردن لم ۲، تابع $g \in A(X\,, E)$ وجود دارد به‌طوری‌که $\mathrm{coz}(g) \subseteq V$ و $Sg(y) \neq 0$. بنابراین $Tf(y) \cdot Sg(y) \neq 0$ در حالی‌که $f \cdot g = 0$ ، که این یک تناقض است.

ب) مشابه (الف) اثبات می‌شود.

ج) فرض کنیم $f \in A(X)$ و $f|_U = 0$ هم‌چنین فرض کنیم $y \in \varphi^{-1}(U)$ و $x = \varphi(y)$. با توجه به نحوهٔ تعریف نگاشت φ، $(x\,, U)$ ویژگی Q_y دارد و در نتیجه تابع $g \in A(X\,, E)$ وجود دارد طوری‌که $\mathrm{coz}(g) \subseteq U$ و $Sg(y) \neq 0$. بنابراین $f \cdot g = 0$ و این نتیجه می‌دهد $Tf \cdot Sg = 0$. به‌ویژه داریم $Tf(y) \cdot Sg(y) = 0$ و چون $Sg(y) \neq 0$ پس باید $Tf(y) = 0$. این مطلب نشان می‌دهد که $Tf = 0$ روی $\varphi^{-1}(U)$. به‌همین ترتیب می‌توان نشان داد که به‌ازای هر $g \in A(X\,, E)$ اگر $g|_U = 0$ آن‌گاه $Sg|_{\varphi^{-1}(U)} = 0$.

د) فرض کنیم $\{y_\alpha\}$ یک توردر X_1 همگرا به $y_0 \in X_1$ باشد. با توجه به فشردگی X ، می‌توان زیرتوری از $\{y_\alpha\}$ را که با همان $\{y_\alpha\}$ نشان می‌دهیم، در نظر گرفت به‌طوری‌که تور $\{\varphi(y_\alpha)\}$ به عضو $x \in X$ همگرا باشد. اگر $x \neq \varphi(y_0)$ آن‌گاه می‌توان همسایگی‌های با بستارهای مجزای U و V به‌ترتیب از x و $\varphi(y_0)$ را در نظر گرفت. چون $\varphi(y_0) \in V$ بنا به تعریف φ ، $(\varphi(y_0), V)$ ویژگی P_{y_0} دارد. یعنی تابع $f \in A(X)$ را می‌توان یافت که $coz(f) \subseteq V$ و $Tf(y_0) \neq 0$. به‌خصوص $f = 0$ روی U و بنابراین از قسمت «ج» نتیجه می‌شود $Tf = 0$ روی $\varphi^{-1}(U)$. از همگرایی $\{\varphi(y_\alpha)\}$ به x نتیجه می‌شود برای α های به قدر کافی بزرگ $\varphi(y_\alpha) \in U$ و در نتیجه $Tf(y_\alpha) = 0$. این مطلب، با توجه به پیوستگی Tf، ایجاب می‌کند که $Tf(y_0) = 0$ و این یک تناقض است. بحث بالا به سادگی نشان می‌دهد φ پیوسته است.

گام دوم. چنان‌که قبلاً ذکر شد کافی است تنها حالت $n = 1$ بررسی شود. با به‌کار بردن بحث بالا برای نگاشت‌های $T = T_1$ و S، نگاشت پیوسته $\varphi: X_1 \to X$ یافت می‌شود که در لم ۳ صدق می‌کند. ابتدا نشان می‌دهیم برای هر $y \in X_1$ و $f \in A(X)$ که $f(\varphi(y)) = 0$ داریم $Tf(y) = 0$. با توجه به این‌که $A(X)$ ویژگی (P) دارد، دنباله‌ای از توابع $\{f_n\}$ در $A(X)$ وجود دارد به‌طوری‌که هر f_n روی یک همسایگی $\varphi(y)$ صفر است و

$\|f_n - f\|_\infty \to 0$. با به‌کار بردن قسمت «ج» از لم قبل نتیجه می‌شود برای هر n، $Tf_n(y) = 0$ و در نتیجه از پیوستگی T نتیجه می‌شود $Tf(y) = 0$.

با بحث مشابهی نتیجه می‌شود اگر $g \in A(X, E)$ و $g(\varphi(y)) = 0$ آنگاه $Sg(y) = 0$.

حال برای هر عضو دلخواه $f \in A(X)$ و $y \in X_1$ ، از آنجا که تابع $f_1 = f - f(\varphi(y))$ در تساوی $f_1(\varphi(y)) = 0$ صدق می‌کند و $f_1 \in A(X)$ پس $Tf_1(y) = 0$ که از آن نتیجه می‌شود

$$Tf(y) = T\left(f(\varphi(y))\right)(y),$$

و بنابراین:

$$Tf(y) = \mathrm{Re}(f(\varphi(y)))\, T\,1\,(y) + \mathrm{Im}(f(\varphi(y)))\, Ti(y) \cdot$$

به‌همین ترتیب برای عضو دلخواه $g \in A(X, E)$ و $y \in X_1$، تابع $g_1 = g - g(\varphi(y))$ نیز (به‌دلیل این‌که $A(X, E)$ شامل ثابت‌ها نیز هست) عضوی از $A(X, E)$ است که $g_1(\varphi(y)) = 0$. پس $Sg_1(y) = 0$ و در نتیجه

$$Sg(y) = S(g(\varphi(y)))\,(y) \cdot$$

برای $y \in X_1$ نگاشت خطی ـ حقیقی $J_y : E \to E$ را با ضابطه $J_y(e) = Se(y)$ در نظر می‌گیریم و با توجه به تساوی بالا،

$$Sg(y) = J_y\left(g(\varphi(y))\right), \qquad \left(g \in A(X, E)\right),$$

و این همان تساوی مورد نظر است. با توجه به پیوستگی S، روشن است که J_y نیز پیوسته است.

منابع

1. Alaminos J., Brešar M., Ćerne M., Extremera J., Villena A. R., "Zero product preserving maps on $C^1[0,1]$", J. Math. Anal. Appl. 347 (2008) 472-481.
2. Alaminos J., Extremera J., Villena A. R., "Zero product preserving maps on Banach algebras of Lipschitz function", J. Math. Anal. Appl. 369 (2010) 94-100.
3. Beckenstein E., Narici L., Todd A. R., "Automatic continuity of linear maps on spaces of continuous functions", Manuscripta Math. 62 (1988) 257-275.
4. Dales H. G., "Banach Algebras and Automatic Continuity", London Mathematical Society, Monograph 24, Clarendon Press, Oxford (2000).
5. Dubarbie L., "Separating maps between spaces of vector-valued absolutely continuous functions", Canad. Math. Bull. 53 (2010) 466-474.
6. Font J. J., Hernandez S., "On separating maps between locally compact spaces", Arch. Math. 63 (1994) 158-165.
7. Font J. J., "Automatic continuity of certain isomorphisms between regular Banach function algebras", Glasgow Math. J. 39, No. 3 (1997) 333-343.
8. Gau H. L., Jeang J. S., Wong N. C., "Biseparating linear maps between continuous vector-valued function spaces", J. Aust. Math. Soc. 74 (2003) 101-109.

9. Jamison J. E., Rajagopalan M., "Weighted composition operators of $C_0(X, E)$", J. Operator Theory 20 (1988) 307-317.

10. Jarosz K., "Automatic continuity of separating linear isomorphisms", Canad. Math. Bull. 33 (1990) 139-144.

11. Jeang J. S., Wong N. C., "Weighted composition operators of $C_0(X)$'s", J. Math. Anal. Appl. 201 (1996) 981-993.

12. Jiménez-Vargas A., Ya-Shu Wang, "Linear biseparating maps between vector-valued little Lipschitz function spaces", Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 26, No. 6 (2010) 1005-1018.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.6.2]

[DOI: 10.52547/mmr.7.1.91]