(نشریه علوم دانشگاه خوارزمی)

نتایجی در مورد پوشش انژکتیو و مدول‌های انژکتیو تجزیه‌ناپذیر

معصومه حسن‌زاد، جعفر اعظمی*
دانشگاه محقق اردبیلی، دانشکدهٔ علوم
محرم آقاپور، دانشگاه اراک، دانشکدهٔ علوم

دریافت ۹۷/۰۷/۰۳ پذیرش ۹۸/۰۷/۱۵

چکیده

فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی با عضو همانی غیرصفر باشد. در این مقاله، برخی از ویژگی‌های پوشش انژکتیو و مدول‌های انژکتیو تجزیه‌ناپذیر را بیان می‌کنیم. نشان می‌دهیم در یک حلقه نوتری، هر مدول انژکتیو تجزیه‌ناپذیر، نوتری است اگر و تنها اگر حلقه آرتینی باشد. برای حلقه نوتری R، مدول با تولید متناهی ضربی M و زیرمدول اول N از M، اگر $E\left(\frac{M}{N}\right)$ با تولید متناهی باشد، آن‌گاه N یک زیرمدول ماکسیمال است. هم‌چنین، چندین کاربرد از این نتیجه نیز در ادامه آورده شده است.

واژه‌های کلیدی: مدول ضربی، زیرمدول اول، زیرمدول تحویل‌ناپذیر، مدول انژکتیو.

مقدمه

در سراسر این مقاله، R یک حلقه جابه‌جایی با عضو همانی غیرصفر است. مدول‌های انژکتیو و بررسی آنها در جبر جابه‌جایی و جبر همولوژی اهمیت خاصی دارد. در این مقاله برخی از خواص جدید و جالب آن‌ها را بیان و ثابت می‌کنیم. برای بررسی بیش‌تر خواص مدول‌های انژکتیو، به [۵] مراجعه شود. در ابتدا یادآوری می‌کنیم که R- مدول E را تجزیه‌ناپذیر می‌نامند هرگاه $E \neq 0$ و تنها جمع‌وندهای مستقیم E، 0 و خود E باشند. اگر مدولی تجزیه‌ناپذیر باشد، آن‌گاه هر مدول یک‌ریخت با آن نیز تجزیه‌ناپذیر است. هم‌چنین، برای R-مدول E، زیرمدول M از آن را تحویل‌ناپذیر گویند اگر $M \neq E$ و زیرمدول‌های M_1 و M_2 از E وجود نداشته باشند به‌طوری‌که $M \subsetneq M_1$، $M \subsetneq M_2$ و $M_1 \cap M_2 = M$. برای بررسی جزئیات بیش‌تر، مراجع [۲]، [۳]، [۴] و [۵] ملاحظه شود. هم‌چنین، مدول M ضربی نامیده می شود هرگاه به‌ازای هر زیرمدول N از آن، ایده‌آل I از R موجود باشد به‌طوری‌که $N = IM$ و یا به‌طور معادل $N = \left(N :_R M\right)M$. زیرمدول واقعی N از M، اول نامیده می‌شود هرگاه به‌ازای هر $r \in R$ و هر $m \in M$ از رابطهٔ $rm \in N$ نتیجه شود $m \in N$ یا $r \in \left(N :_R M\right)$. در نهایت R-مدول M را هم‌مولد انژکتیو می‌نامند هرگاه M انژکتیو باشد و برای هر R-مدول N و هر عنصر غیرصفر از آن مانند x، یک R-هم‌ریختی مانند $\varphi : N \to M$ موجود باشد به‌طوری‌که $\varphi(x) \neq 0$.

*نویسنده مسئول jafar.azami@gmail.com

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2025-02-17]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.7.3]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.37]

مفاهیم اولیه و نتایج

قضیهٔ ۱. فرض کنید R یک حلقه موضعی و نوتری با ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{M}$ باشد. اگر یک R-مدول انژکتیو با تولید متناهی غیرصفر وجود داشته باشد، آن‌گاه R آرتینی است.

برهان. فرض کنیم E یک R-مدول انژکتیو با تولید متناهی غیرصفر باشد. با توجه به رابطهٔ $\dim E \le \operatorname{injd} E = \operatorname{depth} R = \circ$، داریم $\dim E = \circ$. فرض کنیم $\dim R > \circ$ (فرض خلف). از این‌رو، ایده‌آل اول P چنان وجود دارد که $P \subsetneq \mathfrak{M}$. فرض کنیم $x \in \mathfrak{M} \setminus P$. بنا به رشتهٔ دقیق $\circ \to \frac{R}{P} \xrightarrow{x} \frac{R}{P}$، خواهیم داشت $\operatorname{Hom}\left(\frac{R}{P}, E\right) \cong x \operatorname{Hom}\left(\frac{R}{P}, E\right)$ و از این‌رو، از لم ناکایاما نتیجه می‌شود که $\operatorname{Hom}\left(\frac{R}{P}, E\right) = \circ$.

از سوی دیگر، رشتهٔ دقیق $\frac{R}{P} \to \frac{R}{\mathfrak{M}} \to \circ$، رشتهٔ دقیق زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\circ \to \operatorname{Hom}\left(\frac{R}{\mathfrak{M}}, E\right) \to \operatorname{Hom}\left(\frac{R}{P}, E\right)$$

در این صورت $\operatorname{Hom}\left(\frac{R}{\mathfrak{M}}, E\right) = \circ$، اما رابطهٔ $\circ = \operatorname{depth} E \le \dim E$ نشان می‌دهد که $\operatorname{Hom}\left(\frac{R}{\mathfrak{M}}, E\right) \neq \circ$، که یک تناقض است. از این‌رو، فرض خلف باطل و حکم نتیجه می‌شود.

لم ۲. فرض کنید N یک زیرمدول اول از R- مدول با تولید متناهی و ضربی M باشد. در این صورت N تحویل‌ناپذیر است.

برهان. چون N یک زیرمدول اول از R- مدول M است بنابراین $(N :_R M)$ یک ایده‌آل اول است. فرض کنید $N_۱$ و $N_۲$ زیرمدول‌هایی از M باشند به‌طوری‌که $N = N_۱ \bigcap N_۲$. در این صورت از تساوی $(N :_R M) = (N_۱ \bigcap N_۲ :_R M) = (N_۱ :_R M) \bigcap (N_۲ :_R M)$ نتیجه می‌شود $(N_۱ :_R M) \subseteq (N :_R M)$ یا $(N_۲ :_R M) \subseteq (N :_R M)$ به‌عبارتی $(N_۱ :_R M) = (N :_R M)$ یا $(N_۲ :_R M) = (N :_R M)$. بنابراین $N_۱ = (N_۱ :_R M)M = (N :_R M)M = N$ یا $N_۲ = (N_۲ :_R M)M = (N :_R M)M = N$.

لم ۳. فرض کنید M یک R-مدول باشد. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند:

۱. $E(M)$ یک مدول تجزیه‌ناپذیر است اگر و تنها اگر زیرمدول صفر از M، تحویل‌ناپذیر باشد؛

۲. زیرمدول N از M، تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر $E\left(\frac{M}{N}\right)$ تجزیه‌ناپذیر باشد.

برهان. به صفحهٔ ۴۹ نتیجهٔ ۱ از منبع [۵] رجوع شود.

تبصره ۴. فرض کنید R یک حوزهٔ صحیح جابه‌جایی با میدان کسرهای K باشد. در این صورت K به‌عنوان یک R-مدول، پوشش انژکتیو R است. هم‌چنین، K یک R-مدول انژکتیو تجزیه‌ناپذیر است. از سوی دیگر، اگر K با تولید متناهی باشد، آن‌گاه R میدان است.

لم ۵ . فرض کنید R یک حلقه نوتری و P ایده آل اولی از آن باشد به‌طوری‌که $E\left(\frac{R}{P}\right)$ با تولید متناهی است. در این صورت P یک ایده‌آل ماکسیمال حلقه است.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2025-02-17]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.7.3]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.37]

برهان. فرض کنید $E=E_R(\frac{R}{P})$. بنا به گزارهٔ ۲۷.۲ از منبع [۵]، $(\circ :_E P)$ به‌عنوان $\frac{R}{P}$-مدول پوشش انژکتیو $\frac{R}{P}\cap(\circ :_E P)$ است. از این‌رو، $(\circ :_E P)\subseteq E_{\frac{R}{P}}(\frac{R}{P})$ چون $\frac{R}{P}$ حوزه صحیح است لذا پوشش انژکتیو آن به‌عنوان مدول روی خودش میدان کسرهای آن است. از طرفی میدان کسرهای آن به‌عنوان $\frac{R}{P}$-مدول انژکتیو و تجزیه‌ناپذیر است. بنابراین از رابطهٔ $(\circ :_E P)\subseteq E_{\frac{R}{P}}(\frac{R}{P})$ نتیجه می‌شود که $(\circ :_E P)=E_{\frac{R}{P}}(\frac{R}{P})$. چون $E=E_R(\frac{R}{P})$ با تولید متناهی است پس $(\circ :_E P)$ نیز با تولید متناهی و در نتیجه میدان کسرهای $\frac{R}{P}$ نیز با تولید متناهی و با توجه به تبصرهٔ ۴ نتیجه می‌شود که $\frac{R}{P}$ میدان است، از این‌رو، P یک ایده آل ماکسیمال است.

لم ۶. فرض کنید M یک R-مدول ضربی غیرصفر باشد. در این صورت N یک زیرمدول ماکسیمال از M است اگر و تنها اگر ایده‌آل ماکسیمال P از R وجود داشته باشد به طوری که $N=PM\neq M$.

برهان. به قضیه ۷.۲ از [۱] رجوع شود.

قضیهٔ ۷. فرض کنید R یک حلقه نوتری، M یک R-مدول با تولید متناهی ضربی و N یک زیرمدول اول از M باشد. اگر $E\left(\frac{M}{N}\right)$ با تولید متناهی باشد، آن‌گاه N یک زیرمدول ماکسیمال است.

برهان. بنابه لم‌های ۳ و ۲، $E(\frac{M}{N})$ تجزیه‌ناپذیر است. از طرفی $\mathrm{Ass}_R(\frac{M}{N})=\{P\}$ که در آن $P=(N :_R M)$. بنابراین $E(\frac{M}{N})\cong E(\frac{R}{P})$ و لذا با توجه به فرض $E(\frac{R}{P})$ با تولید متناهی است. در نتیجه بنا به لم ۵ ، P یک ایده‌آل ماکسیمال است و با توجه به لم۶، $N=PM$ یک زیرمدول ماکسیمال از M است.

نتیجهٔ ۸. فرض کنید R یک حلقه نوتری، M یک R- مدول با تولید متناهی ضربی و P و Q زیرمدول‌های اول از M باشند به‌طوری‌که $E\left(\frac{M}{P}\right)$ با تولید متناهی است. در این صورت $P=Q$ اگر و تنها اگر $\mathrm{Hom}\left(E\left(\frac{M}{P}\right),E\left(\frac{M}{Q}\right)\right)\neq\circ$.

برهان. اگر $P=Q$، آن‌گاه نتیجه حاصل می‌شود. حال فرض می‌کنیم $\mathrm{Hom}\left(E\left(\frac{M}{P}\right),E\left(\frac{M}{Q}\right)\right)\neq\circ$. بنابراین

$$\mathrm{Ass}\ \mathrm{Hom}\left(E\left(\frac{M}{P}\right),E\left(\frac{M}{Q}\right)\right)\neq\varnothing .$$

این نتیجه می‌دهد که $\mathrm{Supp}\,E\left(\frac{M}{P}\right)\cap\mathrm{Ass}\,E\left(\frac{M}{Q}\right)\neq\varnothing$ و لذا $(Q :_R M)\in\mathrm{Supp}\,E\left(\frac{M}{P}\right)$. از طرفی چون حلقه نوتری است و $\mathrm{Ass}\,E\left(\frac{M}{P}\right)=(P:M)$. از این‌رو، $(P:M)\subseteq(Q:M)$ و چون M ضربی است، می‌توان نوشت $P\subseteq Q$. اما با توجه به قضیهٔ ۷، P ماکسیمال است و لذا $P=Q$.

[DOI: 10.52547/mmr.7.1.37]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.7.3]
[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2025-02-17]

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2025-02-17]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.7.3]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.37]

نتیجهٔ ۹. فرض کنید R یک حلقه نوتری، P و Q ایده‌آل‌های اول از R و $E\left(\frac{R}{P}\right)$ یک R- مدول با تولید متناهی باشد. در این صورت $P=Q$ اگر و تنها اگر $\mathrm{Hom}\left(E\left(\frac{R}{P}\right),E\left(\frac{R}{Q}\right)\right)\neq 0$.

تعریف۱۰. R-مدول M را به‌طور متناهی نشانده شده می‌نامیم اگر تعداد متناهی مدول ساده مانند S_1، S_2، ...، S_k وجود داشته باشند به‌طوری‌که $E(M)\cong E(S_1)\oplus\ldots\oplus E(S_k)$.

لم ۱۱. فرض کنید R یک حلقه نوتری و E یک R-مدول باشد. گزاره‌های زیر معادل‌اند:

۱. E آرتینی است؛

۲. E به‌طور متناهی نشانده شده است.

برهان. به قضیهٔ ۳۰.۴ از منبع [۵] رجوع شود.

قضیهٔ ۱۲. فرض کنید R یک حلقه نوتری باشد. در این صورت R آرتینی است اگر و تنها اگر هر R -مدول انژکتیو تجزیه‌ناپذیر، نوتری باشد.

برهان. فرض کنیم هر R-مدول انژکتیو تجزیه‌ناپذیر، نوتری باشد. از این‌رو، برای ایده‌آل اول دل‌خواه P از R، $E\left(\frac{R}{P}\right)$ یک R- مدول نوتری است و بنا به لم ۵، P یک ایده‌آل ماکسیمال است. از این‌رو، R آرتینی است.

بالعکس، فرض کنیم R آرتینی باشد. اگر E یک R- مدول انژکتیو تجزیه‌ناپذیر دل‌خواه باشد، آن‌گاه یک ایده‌آل ماکسیمال P از حلقه وجود دارد که $E\cong E\left(\frac{R}{P}\right)$. بنابراین E به‌طور متناهی نشانده شده است و از این‌رو، E آرتینی است (بنا به لم۱۱). پس E نوتری خواهد بود و حکم برقرار است.

نهایتاً، نتیجه دیگری را در مورد پوشش‌های انژکتیو در قضیهٔ ۱۳ می‌آوریم:

قضیهٔ ۱۳. فرض کنید I ایده‌آلی از R باشد. برای R- مدول غیر صفر با تولید متناهی M با شرط $IM\neq M$ و زیرمدول ماکسیمال N از M قرار می‌دهیم $I_N=(0:_R(0:_{E(\frac{M}{N})}I))$. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند:

۱. به‌ازای هر زیرمدول ماکسیمال N از M، $I\subseteq I_N$؛

۲. به‌ازای هر زیرمدول ماکسیمال N از M، $I_N=R$ اگر و تنها اگر $IM\not\subseteq N$؛

۳. اگر به‌ازای هر زیرمدول ماکسیمال N از R- مدول M، $E\left(\frac{M}{N}\right)$ یک R- مدول هم‌مولد انژکتیو باشد، آن‌گاه $I=\bigcap_{\substack{N\leq M\\ IM\subseteq N}} I_N$.

برهان.

۱. عضو دل‌خواه $r\in I$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به $\left(0:_{E(\frac{M}{N})}I\right)r=0$ می‌توان نتیجه گرفت $r\in I_N$.

۲. فرض کنیم $I_N=R$. پس $(0:_{E(\frac{M}{N})}I)=0$. اگر $IM\subseteq N$ (فرض خلف)، در این صورت $I\subseteq(N:_R M)$. از این‌رو، $(0:_{E(M/N)}(N:_R M))=0$. چون N یک زیرمدول ماکسیمال است، پس عضو

غیرصفر $x \in M$ وجود دارد که $x \notin N$. از سوی دیگر، به‌ازای هر $r \in \left(N :_R M\right)$، داریم $(x+N).r = \circ$ که یک تناقض است.

حال، برعکس، فرض کنیم $I_N \subsetneq R$. ثابت می‌کنیم $IM \subseteq N$. چون $I_N \subsetneq R$، پس $\circ :_{E(\frac{M}{N})} I \neq \circ$. از این رو، عضو غیرصفر $e \in E(\frac{M}{N})$ وجود دارد که $eI = \circ$. بنا به تعریف پوشش انژکتیو، عضو غیرصفر $r \in R$ وجود دارد که $re \in \frac{M}{N}$ و $re \neq \circ$. فرض کنیم $re = m+N$ که $m \notin N$. چون $Ie \subseteq N$، پس $\mathrm{Im} \subseteq N$ و در نتیجه $I \subseteq \left(N :_R M\right)$ که حکم مطلوب است.

۱. با توجه به قسمت (۱)، به‌ازای هر زیرمدول ماکسیمال N، $I \subseteq I_N$، از این‌رو، $I \subseteq \bigcap\limits_{\substack{N \leq M \\ IM \subseteq N}} I_N$.

فرض کنیم $I \subsetneq \bigcap\limits_{\substack{N \leq M \\ IM \subseteq N}} I_N$ (فرض خلف). پس $x \in \bigcap\limits_{\substack{N \leq M \\ IM \subseteq N}} I_N$ وجود دارد به‌طوری‌که $x \notin I$. از این‌رو، عضو غیرصفر $x+I$ از $\dfrac{\bigcap\limits_{\substack{N \leq M \\ IM \subseteq N}} I_N}{I}$ وجود دارد.

حال زیرمدول ماکسیمال N' از M را در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که $IM \subseteq N'$. چون $E\left(\frac{M}{N'}\right)$ هم‌مولد انژکتیو است، از این‌رو، بنا به تعریف آن، یک R- هم‌ریختی

$$\varphi : \frac{\bigcap\limits_{\substack{N \leq M \\ IM \subseteq N}} I_N}{I} \to E\left(\frac{M}{N'}\right)$$

وجود دارد که $\varphi(x+I) \neq \circ$.

چون $x \in I_{N'}$، بنابراین $\left(\circ :_{E(\frac{M}{N'})} I\right) = \circ$. از طرفی $x.$، $\varphi(x+I) \in E\left(\frac{M}{N'}\right)$، از این‌رو، عضو غیرصفر $r \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $r.\varphi(x+I) \in \frac{M}{N'}$، $\neq \circ$. از سوی دیگر بنا به انژکتیو بودن $E\left(\frac{M}{N'}\right)$، دیاگرام جابه‌جایی زیر را داریم:

$$\begin{tikzcd}
\circ \arrow[r] & \dfrac{\bigcap\limits_{\substack{N \leq M \\ IM \subseteq N}} I_N}{I} \arrow[r, "inc"] \arrow[d, "\varphi"] & \dfrac{R}{I} \arrow[dl, dashed, "\bar{\varphi}"] \\
& E\left(\dfrac{M}{N'}\right) &
\end{tikzcd}$$

به‌ازای هر $i \in I$، داریم:

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2025-02-17]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.7.3]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.37]

$$i.\bar{\varphi}(r+I)=\bar{\varphi}(ri+I)$$
$$=0$$

پس $\bar{\varphi}(r+I)\in\left(0:_{E(\frac{M}{N'})} I\right)$. از این‌رو، مـی‌تـوان نوشـت $x.\bar{\varphi}(r+I)=0$. یعنـی $\bar{\varphi}(rx+I)=0$ و لـذا $\varphi(rx+I)=0$، پس $r.\varphi(x+I)=0$ که یک تناقض است. پس فرض خلف باطل و تساوی حکم برقرار است.

منابع

1. Ameri R., "On the prime submodules of multiplication modules", Int. J. Math. Sci., 27 (2003) 1715-1724.
2. Bruns W., Herzog J., "Cohen Macualay rings, Cambridge studies in advanced mathematics", (1997).
3. Fossum R. M., "The structure of indecomposable injective modules", Math. Scand., 36 (1975) 291-312.
4. Matlis E., "Injective modules, over Noetherian rings", Pacific J. Math., 8 No. 3, (1958) 511-528.
5. Sharpe D. W., Vamos P., "Injective Modules", Cambridge University Press, Cambridge (1972).

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2025-02-17]

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.7.3]

[DOI: 10.52547/mmr.7.1.37]