

## نتایجی در مورد پوشش انژکتیو و مدول‌های انژکتیو تجزیه‌ناپذیر

معصومه حسن‌زاد، جعفر اعظمی\*  
دانشگاه محقق اردبیلی، دانشکده علوم  
محرم آقاپور، دانشگاه اراک، دانشکده علوم  
دریافت ۹۷/۰۷/۰۳ پذیرش ۹۸/۰۷/۱۵

### چکیده

فرض کنید  $R$  یک حلقه جابه‌جایی با عضو همانی غیرصفر باشد. در این مقاله، برخی از ویژگی‌های پوشش انژکتیو و مدول‌های انژکتیو تجزیه‌ناپذیر را بیان می‌کنیم. نشان می‌دهیم در یک حلقه نوتری، هر مدول انژکتیو تجزیه‌ناپذیر، نوتری است اگر و تنها اگر حلقه آرتینی باشد. برای حلقه نوتری  $R$ ، مدول با تولید متناهی ضربی  $M$  و زیرمدول اول  $N$  از  $M$ ، اگر  $E\left(\frac{M}{N}\right)$  با تولید متناهی باشد، آن‌گاه  $N$  یک زیرمدول ماکسیمال است. همچنین، چندین کاربرد از این نتیجه نیز در ادامه آورده شده است.

واژه‌های کلیدی: مدول ضربی، زیرمدول اول، زیرمدول تحویل‌ناپذیر، مدول انژکتیو.

### مقدمه

در سراسر این مقاله،  $R$  یک حلقه جابه‌جایی با عضو همانی غیرصفر است. مدول‌های انژکتیو و بررسی آنها در جبر جابه‌جایی و جبر همولوژی اهمیت خاصی دارد. در این مقاله برخی از خواص جدید و جالب آن‌ها را بیان و ثابت می‌کنیم. برای بررسی بیشتر خواص مدول‌های انژکتیو، به [۵] مراجعه شود. در ابتدا یادآوری می‌کنیم که  $R$ -مدول  $E$  را تجزیه‌ناپذیر می‌نامند هرگاه  $E \neq 0$  و تنها جمع‌وندهای مستقیم  $E$ ،  $0$  و خود  $E$  باشند. اگر مدولی تجزیه‌ناپذیر باشد، آن‌گاه هر مدول یک‌ریخت با آن نیز تجزیه‌ناپذیر است. همچنین، برای  $R$ -مدول  $E$ ، زیرمدول  $M$  از آن را تحویل‌ناپذیر گویند اگر  $M \neq E$  و زیرمدول‌های  $M_1$  و  $M_2$  از  $E$  وجود نداشته باشند به طوری که  $M_1 \subsetneq M$ ،  $M_2 \subsetneq M$  و  $M_1 \cap M_2 = M$ . برای بررسی جزئیات بیشتر، مراجع [۲]، [۳]، [۴] و [۵] ملاحظه شود. همچنین، مدول  $M$  ضربی نامیده می‌شود هرگاه به‌ازای هر زیرمدول  $N$  از آن، ایده‌آل  $I$  از  $R$  موجود باشد به طوری که  $N = IM$  و یا به‌طور معادل  $N = (N :_R M)M$ . زیرمدول واقعی  $N$  از  $M$ ، اول نامیده می‌شود هرگاه به‌ازای هر  $r \in R$  و هر  $m \in M$  از رابطه  $rm \in N$  نتیجه شود  $m \in N$  یا  $r \in (N :_R M)$ . در نهایت  $R$ -مدول  $M$  را هم‌مولد انژکتیو می‌نامند هرگاه  $M$  انژکتیو باشد و برای هر  $R$ -مدول  $N$  و هر عنصر غیرصفر از آن مانند  $x$ ، یک  $R$ -هم‌ریختی مانند  $\varphi: N \rightarrow M$  موجود باشد به طوری که  $\varphi(x) \neq 0$ .

## مفاهیم اولیه و نتایج

قضیه ۱. فرض کنید  $R$  یک حلقه موضعی و نوتری با ایده‌آل ماکسیمال  $\mathfrak{M}$  باشد. اگر یک  $R$ -مدول انژکتیو با تولید متناهی غیرصفر وجود داشته باشد، آن‌گاه  $R$  آرتینی است.

برهان. فرض کنیم  $E$  یک  $R$ -مدول انژکتیو با تولید متناهی غیرصفر باشد. با توجه به رابطه  $\dim E \leq \text{injd } E = \text{depth } R = 0$ ، داریم  $\dim E = 0$ . فرض کنیم  $\dim R > 0$  (فرض خلف). از این‌رو، ایده‌آل اول  $P$  چنان وجود دارد که  $P \subsetneq \mathfrak{M}$ . فرض کنیم  $x \in \mathfrak{M} \setminus P$ . بنا به رشته دقیق  $\frac{R}{P} \xrightarrow{x} \frac{R}{P}$ ، خواهیم داشت  $\text{Hom}\left(\frac{R}{P}, E\right) = 0$  و از این‌رو، از لم ناکایاما نتیجه می‌شود که  $\text{Hom}\left(\frac{R}{P}, E\right) \cong x \text{Hom}\left(\frac{R}{P}, E\right)$ .

از سوی دیگر، رشته دقیق  $\frac{R}{P} \rightarrow \frac{R}{\mathfrak{M}} \rightarrow 0$ ، رشته دقیق زیر را نتیجه می‌دهد:

$$0 \rightarrow \text{Hom}\left(\frac{R}{\mathfrak{M}}, E\right) \rightarrow \text{Hom}\left(\frac{R}{P}, E\right)$$

در این صورت  $\text{Hom}\left(\frac{R}{\mathfrak{M}}, E\right) = 0$ ، اما رابطه  $\text{depth } E \leq \dim E = 0$  نشان می‌دهد که

$$\text{Hom}\left(\frac{R}{\mathfrak{M}}, E\right) \neq 0$$

که یک تناقض است. از این‌رو، فرض خلف باطل و حکم نتیجه می‌شود.

لم ۲. فرض کنید  $N$  یک زیرمدول اول از  $R$ -مدول با تولید متناهی و ضربی  $M$  باشد. در این صورت  $N$  تحویل‌ناپذیر است.

برهان. چون  $N$  یک زیرمدول اول از  $R$ -مدول  $M$  است بنابراین  $(N :_R M)$  یک ایده‌آل اول است. فرض کنید  $N_1$  و  $N_2$  زیرمدول‌هایی از  $M$  باشند به طوری که  $N = N_1 \cap N_2$ . در این صورت از تساوی

$$(N :_R M) = (N_1 \cap N_2 :_R M) = (N_1 :_R M) \cap (N_2 :_R M)$$

یا  $(N_1 :_R M) \subseteq (N :_R M)$  یا  $(N_2 :_R M) \subseteq (N :_R M)$  به عبارتی  $(N_1 :_R M) = (N :_R M)$  یا

$$(N_2 :_R M) = (N :_R M) \text{ بنابراین } N_1 = (N_1 :_R M)M = (N :_R M)M = N$$

$$N_2 = (N_2 :_R M)M = (N :_R M)M = N$$

لم ۳. فرض کنید  $M$  یک  $R$ -مدول باشد. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند:

۱.  $E(M)$  یک مدول تجزیه‌ناپذیر است اگر و تنها اگر زیرمدول صفر از  $M$ ، تحویل‌ناپذیر باشد؛

۲. زیرمدول  $N$  از  $M$ ، تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر  $E\left(\frac{M}{N}\right)$  تجزیه‌ناپذیر باشد.

برهان. به صفحه ۴۹ نتیجه ۱ از منبع [۵] رجوع شود.

تبصره ۴. فرض کنید  $R$  یک حوزه صحیح جابه‌جایی با میدان کسرهای  $K$  باشد. در این صورت  $K$  به‌عنوان یک  $R$ -مدول، پوشش انژکتیو  $R$  است. هم‌چنین،  $K$  یک  $R$ -مدول انژکتیو تجزیه‌ناپذیر است. از سوی دیگر، اگر  $K$  با تولید متناهی باشد، آن‌گاه  $R$  میدان است.

لم ۵. فرض کنید  $R$  یک حلقه نوتری و  $P$  ایده‌آل اولی از آن باشد به طوری که  $E\left(\frac{R}{P}\right)$  با تولید متناهی است. در

این صورت  $P$  یک ایده‌آل ماکسیمال حلقه است.

برهان. فرض کنید  $E = E_R\left(\frac{R}{P}\right)$ . بنا به گزاره ۲۷.۲ از منبع [۵]،  $P \circ_E \frac{R}{P}$  به‌عنوان  $\frac{R}{P}$ -مدول پوشش انژکتیو  $\frac{R}{P} \cap (\circ_E P)$  است. از این‌رو،  $(\circ_E P) \subseteq E_R\left(\frac{R}{P}\right)$  چون  $\frac{R}{P}$  حوزه صحیح است لذا پوشش انژکتیو آن به‌عنوان مدول روی خودش میدان کسرهای آن است. از طرفی میدان کسرهای آن به‌عنوان  $\frac{R}{P}$ -مدول انژکتیو و تجزیه‌ناپذیر است. بنابراین از رابطه  $(\circ_E P) \subseteq E_R\left(\frac{R}{P}\right)$  نتیجه می‌شود که  $(\circ_E P) = E_R\left(\frac{R}{P}\right)$ . چون  $E = E_R\left(\frac{R}{P}\right)$  با تولید متناهی است پس  $(\circ_E P)$  نیز با تولید متناهی و در نتیجه میدان کسرهای  $\frac{R}{P}$  نیز با تولید متناهی و با توجه به تبصره ۴ نتیجه می‌شود که  $\frac{R}{P}$  میدان است، از این‌رو،  $P$  یک ایده آل ماکسیمال است.

لم ۶. فرض کنید  $M$  یک  $R$ -مدول ضربی غیرصفر باشد. در این صورت  $N$  یک زیرمدول ماکسیمال از  $M$  است اگر و تنها اگر ایده‌آل ماکسیمال  $P$  از  $R$  وجود داشته باشد به طوری که  $N = PM \neq M$ . برهان. به قضیه ۷.۲ از [۱] رجوع شود.

قضیه ۷. فرض کنید  $R$  یک حلقه نوتری،  $M$  یک  $R$ -مدول با تولید متناهی ضربی و  $N$  یک زیرمدول اول از  $M$  باشد. اگر  $E\left(\frac{M}{N}\right)$  با تولید متناهی باشد، آن‌گاه  $N$  یک زیرمدول ماکسیمال است.

برهان. بنابه لم‌های ۳ و ۲،  $E\left(\frac{M}{N}\right)$  تجزیه‌ناپذیر است. از طرفی  $\text{Ass}_R\left(\frac{M}{N}\right) = \{P\}$  که در آن  $P = (N :_R M)$ . بنابراین  $E\left(\frac{M}{N}\right) \cong E\left(\frac{R}{P}\right)$  و لذا با توجه به فرض  $E\left(\frac{R}{P}\right)$  با تولید متناهی است. در نتیجه بنا به لم ۵،  $P$  یک ایده‌آل ماکسیمال است و با توجه به لم ۶،  $N = PM$  یک زیرمدول ماکسیمال از  $M$  است. نتیجه ۸. فرض کنید  $R$  یک حلقه نوتری،  $M$  یک  $R$ -مدول با تولید متناهی ضربی و  $P$  و  $Q$  زیرمدول‌های اول از  $M$  باشند به طوری که  $E\left(\frac{M}{P}\right)$  با تولید متناهی است. در این صورت  $P = Q$  اگر و تنها اگر  $\text{Hom}\left(E\left(\frac{M}{P}\right), E\left(\frac{M}{Q}\right)\right) \neq \circ$ .

برهان. اگر  $P = Q$ ، آن‌گاه نتیجه حاصل می‌شود. حال فرض می‌کنیم  $\text{Hom}\left(E\left(\frac{M}{P}\right), E\left(\frac{M}{Q}\right)\right) \neq \circ$ . بنابراین

$$\text{Ass Hom}\left(E\left(\frac{M}{P}\right), E\left(\frac{M}{Q}\right)\right) \neq \emptyset.$$

این نتیجه می‌دهد که  $\text{Supp } E\left(\frac{M}{P}\right) \cap \text{Ass } E\left(\frac{M}{Q}\right) \neq \emptyset$  و لذا  $(Q :_R M) \in \text{Supp } E\left(\frac{M}{P}\right)$  از طرفی

چون حلقه نوتری است و  $\text{Ass } E\left(\frac{M}{P}\right) = (P : M)$ . از این‌رو،  $(P : M) \subseteq (Q : M)$  و چون  $M$  ضربی است،

می‌توان نوشت  $P \subseteq Q$ . اما با توجه به قضیه ۷،  $P$  ماکسیمال است و لذا  $P = Q$ .

نتیجه ۹. فرض کنید  $R$  یک حلقه نوتری،  $P$  و  $Q$  ایده‌آل‌های اول از  $R$  و  $E\left(\frac{R}{P}\right)$  یک  $R$ -مدول با تولید متناهی باشد. در این صورت  $P=Q$  اگر و تنها اگر  $\text{Hom}\left(E\left(\frac{R}{P}\right), E\left(\frac{R}{Q}\right)\right) \neq 0$ .

تعریف ۱۰.  $R$ -مدول  $M$  را به‌طور متناهی نشانده شده می‌نامیم اگر تعداد متناهی مدول ساده مانند  $S_1, S_2, \dots, S_k$  وجود داشته باشند به‌طوری‌که  $E(M) \cong E(S_1) \oplus \dots \oplus E(S_k)$ .

لم ۱۱. فرض کنید  $R$  یک حلقه نوتری و  $E$  یک  $R$ -مدول باشد. گزاره‌های زیر معادل‌اند:

۱.  $E$  آرتینی است؛

۲.  $E$  به‌طور متناهی نشانده شده است.

برهان. به قضیه ۳۰.۴ از منبع [۵] رجوع شود.

قضیه ۱۲. فرض کنید  $R$  یک حلقه نوتری باشد. در این صورت  $R$  آرتینی است اگر و تنها اگر هر  $R$ -مدول انژکتیو تجزیه‌ناپذیر، نوتری باشد.

برهان. فرض کنیم هر  $R$ -مدول انژکتیو تجزیه‌ناپذیر، نوتری باشد. از این‌رو، برای ایده‌آل اول دل‌خواه  $P$  از  $R$ ،

$E\left(\frac{R}{P}\right)$  یک  $R$ -مدول نوتری است و بنا به لم ۵،  $P$  یک ایده‌آل ماکسیمال است. از این‌رو،  $R$  آرتینی است.

بالعکس، فرض کنیم  $R$  آرتینی باشد. اگر  $E$  یک  $R$ -مدول انژکتیو تجزیه‌ناپذیر دل‌خواه باشد، آن‌گاه یک ایده‌آل

ماکسیمال  $P$  از حلقه وجود دارد که  $E \cong E\left(\frac{R}{P}\right)$ . بنابراین  $E$  به‌طور متناهی نشانده شده است و از این‌رو،  $E$

آرتینی است (بنا به لم ۱۱). پس  $E$  نوتری خواهد بود و حکم برقرار است.

نهایتاً، نتیجه دیگری را در مورد پوشش‌های انژکتیو در قضیه ۱۳ می‌آوریم:

قضیه ۱۳. فرض کنید  $I$  ایده‌آلی از  $R$  باشد. برای  $R$ -مدول غیر صفر با تولید متناهی  $M$  با شرط  $IM \neq M$  و

زیرمدول ماکسیمال  $N$  از  $M$  قرار می‌دهیم  $(I :_{E\left(\frac{M}{N}\right)} I) = 0$ . در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند:

۱. به‌ازای هر زیرمدول ماکسیمال  $N$  از  $M$ ،  $I \subseteq I_N$ ؛

۲. به‌ازای هر زیرمدول ماکسیمال  $N$  از  $M$ ،  $I_N = R$  اگر و تنها اگر  $IM \not\subseteq N$ ؛

۳. اگر به‌ازای هر زیرمدول ماکسیمال  $N$  از  $R$ -مدول  $M$ ،  $E\left(\frac{M}{N}\right)$  یک  $R$ -مدول هم‌مولد انژکتیو باشد،

$$I = \bigcap_{\substack{N \leq M \\ IM \subseteq N}} I_N$$

برهان.

۱. عضو دل‌خواه  $r \in I$  را در نظر می‌گیریم. با توجه به  $r \in I_N$  می‌توان نتیجه گرفت  $r \in I_N$ .

۲. فرض کنیم  $I_N = R$ . پس  $(I :_{E\left(\frac{M}{N}\right)} I) = 0$ . اگر  $IM \subseteq N$  (فرض خلف)، در این صورت

$I \subseteq (N :_R M)$  از این‌رو،  $(N :_R M) = 0$ . چون  $N$  یک زیرمدول ماکسیمال است، پس عضو

غیرصفر  $x \in M$  وجود دارد که  $x \notin N$ . از سوی دیگر، به‌ازای هر  $r \in (N :_R M)$  داریم  $(x + N).r = 0$  که یک تناقض است.

حال، برعکس، فرض کنیم  $I_N \subsetneq R$ . ثابت می‌کنیم  $IM \subseteq N$ . چون  $I_N \subsetneq R$ ، پس  $\circ :_{E\left(\frac{M}{N}\right)} I \neq 0$ . از این رو، عضو غیرصفر  $e \in E\left(\frac{M}{N}\right)$  وجود دارد که  $eI = 0$ . بنا به تعریف پوشش انژکتیو، عضو غیرصفر  $r \in R$  وجود دارد که  $re \neq 0$  و  $re \in \frac{M}{N}$ . فرض کنیم  $re = m + N$  که  $m \notin N$  چون  $Ie \subseteq N$  پس  $\text{Im} \subseteq N$  و در نتیجه  $I \subseteq (N :_R M)$  که حکم مطلوب است.

۱. با توجه به قسمت (۱)، به‌ازای هر زیرمدول ماکسیمال  $N$ ،  $I \subseteq I_N$ ، از این رو،  $I \subseteq \bigcap_{\substack{N \leq M \\ IM \subseteq N}} I_N$ .

فرض کنیم  $I \subsetneq \bigcap_{\substack{N \leq M \\ IM \subseteq N}} I_N$  (فرض خلف). پس  $x \in \bigcap_{\substack{N \leq M \\ IM \subseteq N}} I_N$  وجود دارد به‌طوری‌که  $x \notin I$ . از این رو، عضو

غیرصفر  $x + I$  از  $\frac{\bigcap_{\substack{N \leq M \\ IM \subseteq N}} I_N}{I}$  وجود دارد.

حال زیرمدول ماکسیمال  $N'$  از  $M$  را در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که  $IM \subseteq N'$ . چون  $E\left(\frac{M}{N'}\right)$  هم‌مولد انژکتیو است، از این رو، بنا به تعریف آن، یک  $R$ -هم‌ریختی

$$\varphi : \frac{\bigcap_{\substack{N \leq M \\ IM \subseteq N}} I_N}{I} \rightarrow E\left(\frac{M}{N'}\right)$$

وجود دارد که  $\varphi(x + I) \neq 0$ .

چون  $x \in I_N$ ، بنابراین  $\circ :_{E\left(\frac{M}{N'}\right)} I = 0$ . از طرفی  $\varphi(x + I) \in E\left(\frac{M}{N'}\right)$ ، از این رو، عضو غیرصفر

$r \in R$  وجود دارد به‌طوری‌که  $r\varphi(x + I) \in \frac{M}{N'}$  و  $r\varphi(x + I) \neq 0$ . از سوی دیگر بنا به انژکتیو بودن  $E\left(\frac{M}{N'}\right)$ ، دیاگرام

جابه‌جایی زیر را داریم:

$$\begin{array}{ccc} \circ \rightarrow & \frac{\bigcap_{\substack{N \leq M \\ IM \subseteq N}} I_N}{I} & \xrightarrow{\text{inc}} \frac{R}{I} \\ & \downarrow \varphi & \searrow \bar{\varphi} \\ & E\left(\frac{M}{N'}\right) & \end{array}$$

به‌ازای هر  $i \in I$ ، داریم:

$$i.\bar{\varphi}(r+I) = \bar{\varphi}(ri+I) \\ = \circ$$

پس  $\bar{\varphi}(r+I) \in \left( \circ :_{E(\frac{M}{N})} I \right)$  از این رو، می‌توان نوشت  $\bar{\varphi}(r+I) = \circ$ . یعنی  $x.\bar{\varphi}(r+I) = \circ$  و لذا  $\bar{\varphi}(rx+I) = \circ$  پس  $r.\varphi(x+I) = \circ$  که یک تناقض است. پس فرض خلف باطل و تساوی حکم برقرار است.

### منابع

1. Ameri R., "On the prime submodules of multiplication modules", *Int. J. Math. Sci.*, 27 (2003) 1715-1724.
2. Bruns W., Herzog J., "Cohen Macaulay rings, Cambridge studies in advanced mathematics", (1997).
3. Fossum R. M., "The structure of indecomposable injective modules", *Math. Scand.*, 36 (1975) 291-312.
4. Matlis E., "Injective modules, over Noetherian rings", *Pacific J. Math.*, 8 No. 3, (1958) 511-528.
5. Sharpe D. W., Vámos P., "Injective Modules", Cambridge University Press, Cambridge (1972).