

نتایجی در مورد پوشش انژکتیو و مدول‌های انژکتیو تجزیه‌ناپذیر

معصومه حسن‌زاد، جعفر اعظمی*
دانشگاه محقق اردبیلی، دانشکده علوم
محرم آقاپور، دانشگاه اراک، دانشکده علوم
دریافت ۹۷/۰۷/۰۳ پذیرش ۹۸/۰۷/۱۵

چکیده

فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی با عضو همانی غیرصفر باشد. در این مقاله، برخی از ویژگی‌های پوشش انژکتیو و مدول‌های انژکتیو تجزیه‌ناپذیر را بیان می‌کنیم. نشان می‌دهیم در یک حلقه نوتری، هر مدول انژکتیو تجزیه‌ناپذیر، نوتری است اگر و تنها اگر حلقه آرتینی باشد. برای حلقه نوتری R ، مدول با تولید متناهی ضربی M و زیرمدول اول N از M ، اگر $E\left(\frac{M}{N}\right)$ با تولید متناهی باشد، آن‌گاه N یک زیرمدول ماکسیمال است. همچنین، چندین کاربرد از این نتیجه نیز در ادامه آورده شده است.

واژه‌های کلیدی: مدول ضربی، زیرمدول اول، زیرمدول تحویل‌ناپذیر، مدول انژکتیو.

مقدمه

در سراسر این مقاله، R یک حلقه جابه‌جایی با عضو همانی غیرصفر است. مدول‌های انژکتیو و بررسی آنها در جبر جابه‌جایی و جبر همولوژی اهمیت خاصی دارد. در این مقاله برخی از خواص جدید و جالب آن‌ها را بیان و ثابت می‌کنیم. برای بررسی بیشتر خواص مدول‌های انژکتیو، به [۵] مراجعه شود. در ابتدا یادآوری می‌کنیم که R -مدول E را تجزیه‌ناپذیر می‌نامند هرگاه $E \neq 0$ و تنها جمع‌وندهای مستقیم E ، 0 و خود E باشند. اگر مدولی تجزیه‌ناپذیر باشد، آن‌گاه هر مدول یک‌ریخت با آن نیز تجزیه‌ناپذیر است. همچنین، برای R -مدول E ، زیرمدول M از آن را تحویل‌ناپذیر گویند اگر $M \neq E$ و زیرمدول‌های M_1 و M_2 از E وجود نداشته باشند به طوری که $M_1 \subsetneq M_2$ ، $M \subsetneq M_1$ و $M_1 \cap M_2 = M$. برای بررسی جزئیات بیشتر، مراجع [۲]، [۳]، [۴] و [۵] ملاحظه شود. همچنین، مدول M ضربی نامیده می‌شود هرگاه به‌ازای هر زیرمدول N از آن، ایده‌آل I از R موجود باشد به طوری که $N = IM$ و یا به‌طور معادل $N = (N :_R M)M$. زیرمدول واقعی N از M ، اول نامیده می‌شود هرگاه به‌ازای هر $r \in R$ و هر $m \in M$ از رابطه $rm \in N$ نتیجه شود $m \in N$ یا $r \in (N :_R M)$. در نهایت R -مدول M را هم‌مولد انژکتیو می‌نامند هرگاه M انژکتیو باشد و برای هر R -مدول N و هر عنصر غیرصفر از آن مانند x ، یک R -هم‌ریختی مانند $\varphi: N \rightarrow M$ موجود باشد به طوری که $\varphi(x) \neq 0$.

مفاهیم اولیه و نتایج

قضیه ۱. فرض کنید R یک حلقه موضعی و نوتری با ایده‌آل ماکسیمال \mathfrak{M} باشد. اگر یک R -مدول انژکتیو با تولید متناهی غیرصفر وجود داشته باشد، آن‌گاه R آرتینی است.

برهان. فرض کنیم E یک R -مدول انژکتیو با تولید متناهی غیرصفر باشد. با توجه به رابطه $\dim E \leq \text{injd } E = \text{depth } R = 0$ ، داریم $\dim E = 0$. فرض کنیم $\dim R > 0$ (فرض خلف). از این‌رو، ایده‌آل اول P چنان وجود دارد که $P \subsetneq \mathfrak{M}$. فرض کنیم $x \in \mathfrak{M} \setminus P$. بنا به رشته دقیق $\frac{R}{P} \xrightarrow{x} \frac{R}{P}$ ، خواهیم داشت $\text{Hom}\left(\frac{R}{P}, E\right) = 0$ و از این‌رو، از لم ناکایاما نتیجه می‌شود که $\text{Hom}\left(\frac{R}{P}, E\right) \cong x \text{Hom}\left(\frac{R}{P}, E\right)$.

از سوی دیگر، رشته دقیق $\frac{R}{P} \rightarrow \frac{R}{\mathfrak{M}} \rightarrow 0$ ، رشته دقیق زیر را نتیجه می‌دهد:

$$0 \rightarrow \text{Hom}\left(\frac{R}{\mathfrak{M}}, E\right) \rightarrow \text{Hom}\left(\frac{R}{P}, E\right)$$

در این صورت $\text{Hom}\left(\frac{R}{\mathfrak{M}}, E\right) = 0$ ، اما رابطه $\text{depth } E \leq \dim E = 0$ نشان می‌دهد که

$$\text{Hom}\left(\frac{R}{\mathfrak{M}}, E\right) \neq 0$$

که یک تناقض است. از این‌رو، فرض خلف باطل و حکم نتیجه می‌شود.

لم ۲. فرض کنید N یک زیرمدول اول از R -مدول با تولید متناهی و ضربی M باشد. در این صورت N تحویل‌ناپذیر است.

برهان. چون N یک زیرمدول اول از R -مدول M است بنابراین $(N :_R M)$ یک ایده‌آل اول است. فرض کنید N_1 و N_2 زیرمدول‌هایی از M باشند به طوری که $N = N_1 \cap N_2$. در این صورت از تساوی

$$(N :_R M) = (N_1 \cap N_2 :_R M) = (N_1 :_R M) \cap (N_2 :_R M)$$

یا $(N_1 :_R M) \subseteq (N :_R M)$ یا $(N_2 :_R M) \subseteq (N :_R M)$ به عبارتی $(N_1 :_R M) = (N :_R M)$ یا

$$(N_2 :_R M) = (N :_R M) \quad \text{بنابراین} \quad N_1 = (N_1 :_R M)M = (N :_R M)M = N$$

$$N_2 = (N_2 :_R M)M = (N :_R M)M = N$$

لم ۳. فرض کنید M یک R -مدول باشد. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند:

۱. $E(M)$ یک مدول تجزیه‌ناپذیر است اگر و تنها اگر زیرمدول صفر از M ، تحویل‌ناپذیر باشد؛

۲. زیرمدول N از M ، تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر $E\left(\frac{M}{N}\right)$ تجزیه‌ناپذیر باشد.

برهان. به صفحه ۴۹ نتیجه ۱ از منبع [۵] رجوع شود.

تبصره ۴. فرض کنید R یک حوزه صحیح جابه‌جایی با میدان کسرهای K باشد. در این صورت K به‌عنوان یک R -مدول، پوشش انژکتیو R است. هم‌چنین، K یک R -مدول انژکتیو تجزیه‌ناپذیر است. از سوی دیگر، اگر K با تولید متناهی باشد، آن‌گاه R میدان است.

لم ۵. فرض کنید R یک حلقه نوتری و P ایده‌آل اولی از آن باشد به طوری که $E\left(\frac{R}{P}\right)$ با تولید متناهی است. در این صورت P یک ایده‌آل ماکسیمال حلقه است.

برهان. فرض کنید $E = E_R\left(\frac{R}{P}\right)$. بنا به گزاره ۲۷.۲ از منبع [۵]، $P \circ_E P$ به‌عنوان $\frac{R}{P}$ -مدول پوشش انژکتیو $\frac{R}{P} \cap (P \circ_E P)$ است. از این‌رو، $(P \circ_E P) \subseteq E_R\left(\frac{R}{P}\right)$ چون $\frac{R}{P}$ حوزه صحیح است لذا پوشش انژکتیو آن به‌عنوان مدول روی خودش میدان کسرهای آن است. از طرفی میدان کسرهای آن به‌عنوان $\frac{R}{P}$ -مدول انژکتیو و تجزیه‌ناپذیر است. بنابراین از رابطه $(P \circ_E P) \subseteq E_R\left(\frac{R}{P}\right)$ نتیجه می‌شود که $(P \circ_E P) = E_R\left(\frac{R}{P}\right)$. چون $E = E_R\left(\frac{R}{P}\right)$ با تولید متناهی است پس $(P \circ_E P)$ نیز با تولید متناهی و در نتیجه میدان کسرهای $\frac{R}{P}$ نیز با تولید متناهی و با توجه به تبصره ۴ نتیجه می‌شود که $\frac{R}{P}$ میدان است، از این‌رو، P یک ایده آل ماکسیمال است.

لم ۶. فرض کنید M یک R -مدول ضربی غیرصفر باشد. در این صورت N یک زیرمدول ماکسیمال از M است اگر و تنها اگر ایده‌آل ماکسیمال P از R وجود داشته باشد به طوری که $N = PM \neq M$. برهان. به قضیه ۷.۲ از [۱] رجوع شود.

قضیه ۷. فرض کنید R یک حلقه نوتری، M یک R -مدول با تولید متناهی ضربی و N یک زیرمدول اول از M باشد. اگر $E\left(\frac{M}{N}\right)$ با تولید متناهی باشد، آن‌گاه N یک زیرمدول ماکسیمال است.

برهان. بنابه لم‌های ۳ و ۲، $E\left(\frac{M}{N}\right)$ تجزیه‌ناپذیر است. از طرفی $\text{Ass}_R\left(\frac{M}{N}\right) = \{P\}$ که در آن $P = (N :_R M)$. بنابراین $E\left(\frac{M}{N}\right) \cong E\left(\frac{R}{P}\right)$ و لذا با توجه به فرض $E\left(\frac{R}{P}\right)$ با تولید متناهی است. در نتیجه بنا به لم ۵، P یک ایده‌آل ماکسیمال است و با توجه به لم ۶، $N = PM$ یک زیرمدول ماکسیمال از M است. نتیجه ۸. فرض کنید R یک حلقه نوتری، M یک R -مدول با تولید متناهی ضربی و P و Q زیرمدول‌های اول از M باشند به طوری که $E\left(\frac{M}{P}\right)$ با تولید متناهی است. در این صورت $P = Q$ اگر و تنها اگر $\text{Hom}\left(E\left(\frac{M}{P}\right), E\left(\frac{M}{Q}\right)\right) \neq \emptyset$.

برهان. اگر $P = Q$ ، آن‌گاه نتیجه حاصل می‌شود. حال فرض می‌کنیم $\text{Hom}\left(E\left(\frac{M}{P}\right), E\left(\frac{M}{Q}\right)\right) \neq \emptyset$. بنابراین

$$\text{Ass Hom}\left(E\left(\frac{M}{P}\right), E\left(\frac{M}{Q}\right)\right) \neq \emptyset.$$

این نتیجه می‌دهد که $\text{Supp } E\left(\frac{M}{P}\right) \cap \text{Ass } E\left(\frac{M}{Q}\right) \neq \emptyset$ و لذا $(Q :_R M) \in \text{Supp } E\left(\frac{M}{P}\right)$ از طرفی

چون حلقه نوتری است و $\text{Ass } E\left(\frac{M}{P}\right) = (P : M)$. از این‌رو، $(P : M) \subseteq (Q : M)$ و چون M ضربی است،

می‌توان نوشت $P \subseteq Q$. اما با توجه به قضیه ۷، P ماکسیمال است و لذا $P = Q$.

نتیجه ۹. فرض کنید R یک حلقه نوتری، P و Q ایده‌آل‌های اول از R و $E\left(\frac{R}{P}\right)$ یک R -مدول با تولید متناهی باشد. در این صورت $P=Q$ اگر و تنها اگر $\text{Hom}\left(E\left(\frac{R}{P}\right), E\left(\frac{R}{Q}\right)\right) \neq 0$.

تعریف ۱۰. R -مدول M را به‌طور متناهی نشانده شده می‌نامیم اگر تعداد متناهی مدول ساده مانند S_1, S_2, \dots, S_k وجود داشته باشند به‌طوری‌که $E(M) \cong E(S_1) \oplus \dots \oplus E(S_k)$.

لم ۱۱. فرض کنید R یک حلقه نوتری و E یک R -مدول باشد. گزاره‌های زیر معادل‌اند:

۱. E آرتینی است؛

۲. E به‌طور متناهی نشانده شده است.

برهان. به قضیه ۳۰.۴ از منبع [۵] رجوع شود.

قضیه ۱۲. فرض کنید R یک حلقه نوتری باشد. در این صورت R آرتینی است اگر و تنها اگر هر R -مدول انژکتیو تجزیه‌ناپذیر، نوتری باشد.

برهان. فرض کنیم هر R -مدول انژکتیو تجزیه‌ناپذیر، نوتری باشد. از این‌رو، برای ایده‌آل اول دل‌خواه P از R ،

$E\left(\frac{R}{P}\right)$ یک R -مدول نوتری است و بنا به لم ۵، P یک ایده‌آل ماکسیمال است. از این‌رو، R آرتینی است.

بالعکس، فرض کنیم R آرتینی باشد. اگر E یک R -مدول انژکتیو تجزیه‌ناپذیر دل‌خواه باشد، آن‌گاه یک ایده‌آل

ماکسیمال P از حلقه وجود دارد که $E \cong E\left(\frac{R}{P}\right)$. بنابراین E به‌طور متناهی نشانده شده است و از این‌رو، E

آرتینی است (بنا به لم ۱۱). پس E نوتری خواهد بود و حکم برقرار است.

نهایتاً، نتیجه دیگری را در مورد پوشش‌های انژکتیو در قضیه ۱۳ می‌آوریم:

قضیه ۱۳. فرض کنید I ایده‌آلی از R باشد. برای R -مدول غیر صفر با تولید متناهی M با شرط $IM \neq M$ و

زیرمدول ماکسیمال N از M قرار می‌دهیم $(I :_{E\left(\frac{M}{N}\right)} I) = 0$. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند:

۱. به‌ازای هر زیرمدول ماکسیمال N از M ، $I \subseteq I_N$ ؛

۲. به‌ازای هر زیرمدول ماکسیمال N از M ، $I_N = R$ اگر و تنها اگر $IM \not\subseteq N$ ؛

۳. اگر به‌ازای هر زیرمدول ماکسیمال N از R -مدول M ، $E\left(\frac{M}{N}\right)$ یک R -مدول هم‌مولد انژکتیو باشد،

$$I = \bigcap_{\substack{N \leq M \\ IM \subseteq N}} I_N$$

برهان.

۱. عضو دل‌خواه $r \in I$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به $\left(0 :_{E\left(\frac{M}{N}\right)} I\right) r = 0$ می‌توان نتیجه گرفت $r \in I_N$.

۲. فرض کنیم $I_N = R$. پس $(0 :_{E\left(\frac{M}{N}\right)} I) = 0$. اگر $IM \subseteq N$ (فرض خلف)، در این صورت

$I \subseteq (N :_R M)$. از این‌رو، $(0 :_{E\left(\frac{M}{N}\right)} (N :_R M)) = 0$. چون N یک زیرمدول ماکسیمال است، پس عضو

غیرصفر $x \in M$ وجود دارد که $x \notin N$. از سوی دیگر، به‌ازای هر $r \in (N :_R M)$ داریم $(x + N).r = 0$ که یک تناقض است.

حال، برعکس، فرض کنیم $I_N \subsetneq R$. ثابت می‌کنیم $IM \subseteq N$. چون $I_N \subsetneq R$ ، پس $\circ :_{E\left(\frac{M}{N}\right)} I \neq 0$. از این رو، عضو غیرصفر $e \in E\left(\frac{M}{N}\right)$ وجود دارد که $eI = 0$. بنا به تعریف پوشش انژکتیو، عضو غیرصفر $r \in R$ وجود دارد که $re \neq 0$ و $re \in \frac{M}{N}$. فرض کنیم $re = m + N$ که $m \notin N$ چون $Ie \subseteq N$ پس $\text{Im} \subseteq N$ و در نتیجه $I \subseteq (N :_R M)$ که حکم مطلوب است.

۱. با توجه به قسمت (۱)، به‌ازای هر زیرمدول ماکسیمال N ، $I \subseteq I_N$ ، از این رو، $I \subseteq \bigcap_{\substack{N \leq M \\ IM \subseteq N}} I_N$.

فرض کنیم $I \subsetneq \bigcap_{\substack{N \leq M \\ IM \subseteq N}} I_N$ (فرض خلف). پس $x \in \bigcap_{\substack{N \leq M \\ IM \subseteq N}} I_N$ وجود دارد به‌طوری‌که $x \notin I$. از این رو، عضو

غیرصفر $x + I$ از $\frac{\bigcap_{\substack{N \leq M \\ IM \subseteq N}} I_N}{I}$ وجود دارد.

حال زیرمدول ماکسیمال N' از M را در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که $IM \subseteq N'$. چون $E\left(\frac{M}{N'}\right)$ هم‌مولد انژکتیو است، از این رو، بنا به تعریف آن، یک R -هم‌ریختی

$$\varphi : \frac{\bigcap_{\substack{N \leq M \\ IM \subseteq N}} I_N}{I} \rightarrow E\left(\frac{M}{N'}\right)$$

وجود دارد که $\varphi(x + I) \neq 0$.

چون $x \in I_N$ ، بنابراین $\circ :_{E\left(\frac{M}{N'}\right)} I = 0$. از طرفی $\varphi(x + I) \in E\left(\frac{M}{N'}\right)$ ، از این رو، عضو غیرصفر

$r \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $r \cdot \varphi(x + I) \in \frac{M}{N'}$ و $r \neq 0$. از سوی دیگر بنا به انژکتیو بودن $E\left(\frac{M}{N'}\right)$ ، دیاگرام

جابه‌جایی زیر را داریم:

$$\begin{array}{ccc} \circ \rightarrow & \frac{\bigcap_{\substack{N \leq M \\ IM \subseteq N}} I_N}{I} & \xrightarrow{\text{inc}} \frac{R}{I} \\ & \downarrow \varphi & \searrow \bar{\varphi} \\ & E\left(\frac{M}{N'}\right) & \end{array}$$

به‌ازای هر $i \in I$ ، داریم:

$$i.\bar{\varphi}(r+I) = \bar{\varphi}(ri+I) \\ = \circ$$

پس $\bar{\varphi}(r+I) \in \left(\circ :_{E(\frac{M}{N})} I \right)$ از این رو، می‌توان نوشت $x.\bar{\varphi}(r+I) = \circ$ یعنی $\bar{\varphi}(rx+I) = \circ$ و لذا $\varphi(rx+I) = \circ$ پس $r.\varphi(x+I) = \circ$ که یک تناقض است. پس فرض خلف باطل و تساوی حکم برقرار است.

منابع

1. Ameri R., "On the prime submodules of multiplication modules", *Int. J. Math. Sci.*, 27 (2003) 1715-1724.
2. Bruns W., Herzog J., "Cohen Macaulay rings, Cambridge studies in advanced mathematics", (1997).
3. Fossum R. M., "The structure of indecomposable injective modules", *Math. Scand.*, 36 (1975) 291-312.
4. Matlis E., "Injective modules, over Noetherian rings", *Pacific J. Math.*, 8 No. 3, (1958) 511-528.
5. Sharpe D. W., Vámos P., "Injective Modules", Cambridge University Press, Cambridge (1972).