مترهای (α,β) تعمیم یافته لندسبرگ ضعیف

علی علاء، ابوالفضل بهزادی*، مهدی رفیعی راد
دانشگاه مازندران، گروه ریاضی

دریافت ۹۷/۰۷/۱۰ پذیرش ۹۸/۰۳/۲۹

چکیده

در این مقاله، مترهای (α,β) تعمیم‌یافتهٔ $F=\alpha\phi(b^2,s)$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. این نوع مترها از مترهای ریمانی α و یک ۱-فرم β تشکیل شده‌اند. ما ثابت کردیم که اگر $\phi=\phi(b^2,s)$ یک چندجمله‌ای برحسب b^2 و s باشد، هر متر (α,β) تعمیم یافته لندسبرگ ضعیف، بروالد است که در آن β یک ۱-فرمی بسته و همدیس است. این نشان می‌دهد که در ردهٔ مترهای (α,β) تعمیم یافته هیچ متر یونیکورن تعمیم یافته‌ای وجود ندارد. علاوه بر این نشان می‌دهیم که برای ϕ چندجمله‌ای، F متر (α,β) تعمیم یافته لندسبرگ است اگر و تنها اگر متر (α,β) تعمیم یافته لندسبرگ ضعیف باشد که در آن β یک ۱- فرمی بسته و همدیس است.

واژه‌های کلیدی: هندسهٔ فینسلر، متر (α,β) تعمیم‌یافته، متر لندسبرگ ضعیف، مسئلهٔ یونیکورن تعمیم یافته

مقدمه

خمینهٔ فینسلری (M,F) یک خمینهٔ C^∞ مجهز به متر فینسلر[1] است که این متر به صورت تابع پیوسته $F:TM\to[0,\infty)$ تعریف می‌شود و در ویژگی‌های زیر صدق می‌کند [۷]:

۱) هموار بودن: $F(x,y)$ روی $TM-\{0\}$، C^∞ باشد.

۲) همگنی مثبت: برای هر $\lambda>0$، $F(x,\lambda y)=\lambda F(x,y)$.

۳) تحدب قوی: تانسور بنیادی $(g_{ij}(x,y))$ در هر $(x,y)\in TM-\{0\}$ مثبت معین باشد، که

$$g_{ij}(x,y):=\frac{1}{2}[F^2]_{y^iy^j}(x,y). \tag{۱}$$

مترهای راندرز ساده‌ترین نوع مترهای فینسلر غیرریمانی هستند که ابتدا توسط راندرز[2] در [۶] معرفی شد. این مترها به شکل $F=\alpha+\beta$ هستند که $\alpha=\sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j}$ یک متر ریمانی[3] و β یک ۱-فرمی است. به عنوان تعمیمی از مترهای راندرز، متر (α,β) به صورت

$$F=\alpha\phi(s),\qquad s:=\frac{\beta}{\alpha} \tag{۲}$$

---

* نویسندهٔ مسئول behzadi@umz.ac.ir

[1] Finsler metric
[2] Randers
[3] Riemannian metric

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.617]

تعریف می‌شود که در آن نیز همانند بالا α متر ریمانی و β یک ۱-فرمی است. البته در این‌جا $\phi(s)$ یک تابع مثبت C^{∞} می‌باشد [۷].

اما ایده این مقاله مطالعه روی حالت تعمیم‌یافته مترهای (α,β)است. در این نوع مترها ϕ با دو متغیر ارائه می‌گردد، یعنی $F=\alpha\phi(b^2,s)$ که در آن $b^2:=\|\beta\|_{\alpha}^2$, $s=\dfrac{\beta}{\alpha}$ (تعریف ۰ را ببینید). خوبی این رده از متر های فینسلر این است که برخی از مترهایی که توسط برایانت[1] ارائه شد را نیز شامل می‌شود [۳]، [۴]، [۵].

در هندسهٔ فینسلر چند رده خاص از مترها مانند متر بروالد[2]، متر لندسبرگ[3]، و متر لندسبرگ ضعیف[4] وجود دارد (بخش ۲ را ببینید). می‌دانیم که متر بروالد کمی کلی‌تر از متر ریمانی و متر موضعا مینکوفسکی[5] است. اما هر متر بروالد نه تنها یک متر لندسبرگ است، بلکه متر لندسبرگ ضعیف نیز می‌باشد. طبق تعریف متر (α,β)، رابطهٔ زیر برقرار است [۱۲]:

$$\{\text{متر لندسبرگ}\}\subset\{\text{متر بروالد}\}\subset\{\text{متر موضعا مینکوفسکی}\}\ \&\ \{\text{متر ریمانی}\}$$

و

$$\{\text{متر لندسبرگ ضعیف}\}\subset\{\text{متر لندسبرگ}\}.$$

یک سوال اساسی این است که «آیا متر لندسبرگی وجود دارد که بروالدی نباشد؟» بائو[6] در[۲] این مسئله و این نوع مترها را «یونیکورن[7]» نامید. همچنین سوال دیگر این است که «آیا متر لندسبرگ ضعیفی وجود دارد که بروالدی نباشد؟» این مسئله را هم ژو و چن[8] در [۱۲] مسئله «یونیکورن تعمیم یافته[9]» نامگذاری کردند.

برای پاسخ به سوال اول ریاضی‌دانان تلاش زیادی کردند. در سال ۲۰۰۹، شن[10] نشان داد که یک متر (α,β) منظم $F=\alpha\phi(\beta/\alpha)$ روی خمینهٔ $2<n$ بعدی M یک متر لندسبرگ است اگر و تنها اگر F متر بروالد باشد [۸]. این یعنی در حالت منظم متر یونیکورن وجود ندارد. از طرف دیگر، شن و آسانوف[11] مترهای (α,β) تقریبا منظمی ساختند که لندسبرگی بود اما بروالدی نبود ([۱] و [۸]). در سال ۲۰۱۴ ژو و چن نشان دادند که اگر $\phi=\phi(s)$ یک چندجمله‌ای بر حسب s باشد، در این صورت F متر لندسبرگ ضعیف است اگر و تنها اگر بروالدی باشد. آنها موفق شدند که قضیه اصلی در مورد مسئلهٔ یونیکورن برای متر (α,β) منظم که در [۸] بیان شد را تعمیم دهند [۱۲]. تلاش برای یافتن مترهای یونیکورن در حوزهٔ متر (α,β) همچنان ادامه دارد.

[1] Bryant
[2] Berwald metric
[3] Landsberg metric
[4] Weak Landsberg metric
[5] Locally Minkowski
[6] Bao
[7] Unicorn
[8] Zou and Cheng
[9] Generalized unicorn
[10] Shen
[11] Asanov

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.617]

اما در حوزهٔ مترهای (α,β) تعمیم یافته، ابتدا زهره‌وند و همکارش در [۱۱] نشان دادند که نمی‌توان متر یونیکورنی در این رده از مترها پیدا کرد. البته آنها با یک شرط اضافی کار کردند و آن این بود که β یک ۱-فرم بسته و همدیس[1] است، یعنی

$$b_{i|j} = ca_{ij} \tag{۳}$$

که در آن $b_{i|j}$ مشتق همورد β نسبت به α است و $c=c(x)$ تابعی عددی روی M است (بخش ۲ را ببینید). سپس در سال ۲۰۱۷، ژو و لی[2] ادعا کردند متری که در [۱۱] توسط زهره‌وند و همکارش بررسی شد، منظم بوده است و آنها در مقاله خود حالت تقریبا منظم را هم مورد مطالعه قرار دادند [۱۳]. آنها علاوه بر اینکه برخی از نتایج [۱۰] و [۱۱] را به روشی دیگر به دست آوردند، ثابت کردند که اگر شرط بسته و همدیس بودن β برقرار باشد، مترهای بروالدی در واقع همان مترهای ریمانی هستند. همچنین صورت کلی معادلاتی که متر (α,β) تعمیم‌یافته لندسبرگ تقریبا منظم را به دست آورند و مشاهده کردند که اگر باز هم شرط بسته و همدیس بودن β برقرار باشد، هر چنین متر لندسبرگ نیز در حقیقت ریمانی است. آنها ادعا کردند که شرط همدیس بودن β باید حذف گردد و وعده دادند که در مقاله بعدی خود به آن بپردازند.

در این مقاله، هدف اصلی ما اینست که به سوال دوم یعنی مسئلهٔ یونیکورن تعمیم‌یافته پاسخ دهیم. البته پاسخ کلی در این زمینه بسیار مشکل است و مجبوریم که با ایجاد شرایط خاص مسئله را کمی آسانتر کنیم. از این رو پایهٔ مطالعه خود را بر اساس نتایج [۱۱] قرار می‌دهیم و فرض می‌کنیم $\phi=\phi(b^2,s)$ یک چندجمله‌ای بر حسب b^2 و s باشد. در مقالهٔ حاضر با مفروضات بالا نشان می‌دهیم مترهای لندسبرگ و مترهای لندسبرگ ضعیف در ردهٔ مترهای (α,β) تعمیم‌یافته معادل هستند و در آن β یک-فرم بسته و همدیس است. در نتیجه مترهای یونیکورن تعمیم‌یافته را نمی‌توان یافت. بنابراین لازم است قضیهٔ زیر اثبات شود:

قضیه: فرض کنیم $F=\alpha\phi(b^2,\frac{\beta}{\alpha})$ یک متر (α,β) تعمیم‌یافتهٔ غیرریمانی روی خمینهٔ n بعدی M باشد و β در رابطهٔ (۳) صدق کند (یعنی β بسته و همدیس باشد). در این صورت اگر $\phi=\phi(b^2,s)$ یک چندجمله‌ای بر حسب b^2 و s باشد، آنگاه F متر لندسبرگ ضعیف است اگر و تنها اگر برای عدد صحیح مثبت $i\neq 1$،

$$2b^2\frac{d}{db^2}c_i(b^2)+(i+1)c_i(b^2)=0$$

و برای $i=1$،

$$c_0\left(b^2\right)\frac{d}{db^2}c_1\left(b^2\right)-2c_1\left(b^2\right)\frac{d}{db^2}c_0\left(b^2\right)=0.$$

[1] Closed and Conformal
[2] Zhou and Li

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.617]

در این حالت، با حل دستگاه معادلات بالا خواهیم داشت:

$$\phi(b^2,s)=c_0(b^2)+c_1(b^2)s+c_2(b^2)s^2+\ldots+c_m(b^2)s^m, \tag{۴}$$

که در آن

$$c_0(b^2)=\frac{a_0}{\sqrt{b^2}},\quad c_1(b^2)=\frac{a_1}{b^2},\quad c_2(b^2)=\frac{a_2}{(b^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \ldots,\quad c_m(b^2)=\frac{a_m}{(b^2)^{\frac{m+1}{2}}}$$

و a_i، $1\le i\le n$، اعداد ثابت هستند.

با استفاده از این قضیه و یک نتیجه از مقاله [۱۱] نتیجهٔ زیر به دست می‌آید:

نتیجه: فرض کنیم $F=\alpha\phi(b^2,\frac{\beta}{\alpha})$ یک متر (α,β) تعمیم‌یافته غیرریمانی روی خمینهٔ n بعدی M باشد و β بسته و همدیس باشد. اگر $\phi=\phi(b^2,s)$ یک چندجمله‌ای بر حسب b^2 و s باشد، آن‌گاه F متر لندسبرگ ضعیف است اگر و تنها اگر متر لندسبرگ باشد.

در نهایت پاسخ مسئلهٔ یونیکورن تعمیم‌یافته به صورت زیر است:

نتیجه: فرض کنیم $F=\alpha\phi(b^2,\frac{\beta}{\alpha})$ یک متر (α,β) تعمیم‌یافتهٔ غیرریمانی روی خمینهٔ n بعدی M باشد و β بسته و همدیس باشد. اگر $\phi=\phi(b^2,s)$ یک چندجمله‌ای بر حسب b^2 و s باشد، آنگاه F متر لندسبرگ ضعیف است اگر و تنها اگر متر بروالد باشد.

لازم به ذکر است، اینکه ما ϕ را یک چندجمله‌ای بر حسب b^2 و s معرفی می‌کنیم به این دلیل است که هر تابع تحلیلی را می‌توان به صورت سری چندجمله‌ای تیلر نوشت. بنابراین می‌توان فرض کرد ϕ یک چندجمله‌ای بر حسب b^2 و s باشد.

تعاریف اولیه

برای متر فینسلر مفروض $F=F(x,y)$، ژئودزی[۱] F در معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}+2G^i\left(x,\frac{dx}{dt}\right)=0,$$

صدق می‌کند که $G^i=G^i(x,y)$ را ضرایب ژئودزی (افشانه)[۲] می‌نامند و به صورت

$$G^i=\frac{1}{4}g^{il}\{[F^2]_{x^my^l}y^m-[F^2]_{x^l}\}.$$

تعریف می‌کنند [۷].

[1] Geodesic
[2] Spray

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.617]

برای یک بردار مماس $y:=y^i\frac{\partial}{\partial x^i}\in T_xM$، انحنا بروالد $\mathbf{B}_y:=B^i_{jkl}dx^j\otimes dx^k\otimes dx^l$ را می‌توان به صورت

$$B^i_{jkl}:=\frac{\partial^3G^i}{\partial y^j\partial y^k\partial y^l}.$$

بیان کرد. بنابراین متر فینسلر F متر بروالد است اگر و تنها اگر $\mathbf{B}=0$.
انحنا لندسبرگ را به صورت

$$L_{jkl}:=-\frac{1}{2}y^mg_{im}B^i_{jkl}$$

تعریف می‌کنند. در این صورت یک متر فینسلر F را لندسبرگ می‌گویند هرگاه $L_{jkl}=0$. یعنی

$$y^mg_{im}B^i_{jkl}=0.$$

بنابراین مترهای بروالد همواره لندسبرگی هستند [۷].

در هندسهٔ فینسلر مفهوم غیرریمانی ضعیف‌تری نسبت به انحنا لندسبرگ $\mathbf{L}$ وجود دارد، یعنی $\mathbf{J}=J_kdx^k$، که در آن

$$J_k:=g^{ij}L_{ijk}, \tag{۵}$$

و $(g^{ij})=(g_{ij})^{-1}$. در این صورت $\mathbf{J}$ را انحنا لندسبرگ میانگین[۱] متر فینسلر F می‌نامند. متر فینسلر F را لندسبرگ ضعیف می‌نامند هرگاه انحنا لندسبرگ میانگین $\mathbf{J}$ صفر شود [۷].

تعریف ([۹]): فرض کنیم F یک متر فینسلر روی M باشد. F را متر (α,β) تعمیم‌یافته[۲] می‌گویند هرگاه F به شکل زیر بیان شود:

$$F=\alpha\phi(b^2,s)\ ,\qquad s=\frac{\beta}{\alpha},\qquad b^2:=\|\beta\|^2_\alpha, \tag{۶}$$

که α متر ریمانی و $\beta:=b_i(x)y^i$ یک ۱-فرمی با شرط $\|\beta\|_\alpha<b_0$ برای هر $x\in M$ می باشند. تابع $\phi=\phi(b^2,s)$ تابع مثبت C^∞ است و برای $n\geq 3$ در نامعادلات

$$\phi-s\phi_2>0,\qquad \phi-s\phi_2+(b^2-s^2)\phi_{22}>0$$

و برای $n=2$ در نامعادلهٔ

$$\phi-s\phi_2+(b^2-s^2)\phi_{22}>0$$

[1] Mean Landsberg curvature
[2] General (α,β)-metric

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.617]

صـدق می‌کند که در آن s و b اعداد دلخواه با شـرط $|s| \leq b < b_0$ برای بعضـی $0 < b_0 \leq +\infty$ می‌باشـند. در این حالت تانسور بنیادی به صورت

$$g_{ij} = \rho a_{ij} + \rho_0 b_i b_j + \rho_1 (b_i \alpha_{y^j} + b_j \alpha_{y^i}) - s\rho_1 \alpha_{y^i} \alpha_{y^j}, \tag{۷}$$

ارائه می‌شود که

$$\rho := \phi(\phi - s\phi_2), \qquad \rho_0 := \phi\phi_{22} + \rho_2\rho_2, \qquad \rho_1 = (\phi - s\phi_2)\phi_2 - s\phi\phi_{22}. \tag{۸}$$

علاوه بر این

$$\det(g_{ij}) = \phi^{n+1}(\phi - s\phi_2)^{n-2}(\phi - s\phi_2 + (b^2 - s^2)\phi_{22})\det(a_{ij}), \tag{۹}$$

$$g^{ij} = \frac{1}{\rho}\{a^{ij} + \eta b^i b^j + \eta_0 \alpha^{-1}(b^i y^j + b^j y^i) + \eta_1 \alpha^{-2} y^i y^j\}, \tag{۱۰}$$

که در آن $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$، $(a^{ij}) = (a_{ij})^{-1}$ ، $b^i = a^{ij} b_j$،

$$\eta = -\frac{\phi_{22}}{\phi - s\phi_2 + (b^2 - s^2)\phi_{22}}, \quad \eta_0 = -\frac{(\phi - s\phi_2)\phi_2 - s\phi\phi_{22}}{\phi(\phi - s\phi_2 + (b^2 - s^2)\phi_{22})}, \tag{۱۱}$$

$$\eta_1 = \frac{(s\phi + (b^2 - s^2)\phi_2)((\phi - s\phi_2)\phi_2 - s\phi\phi_{22})}{\phi^2(\phi - s\phi_2 + (b^2 - s^2)\phi_{22})}.$$

توجه کنید که از اندیس ۱ و ۲ به ترتیب برای مشتقگیری نسبت به b^2 و s استفاده می‌کنیم [۹].
فرض کنید $b_{i|j}$ نمایانگر ضرایب مشتق همورد β نسبت به α باشد. قرار می‌دهیم [۱۰]:

$$r_{ij} := \frac{1}{2}(b_{i|j} + b_{j|i}), \quad r_{00} := r_{ij} y^i y^j, \quad r_i := b^j r_{ji},$$

$$r_0 := r_i y^i, \qquad r^i := a^{ij} r_j, \qquad r := b^i r_i$$

$$s_{ij} := \frac{1}{2}(b_{i|j} - b_{j|i}), \qquad s^i_0 := a^{ik} s_{kj} y^j,$$

$$s_i := b^j s_{ji}, \quad s_0 := s_i y^i, \qquad s^i := a^{ij} s_j.$$

۱- فرمی β بســـته اســـت اگر و تنها اگر $s_{ij} = 0$ و این ۱-فرمی نســـبت به α همدیس اســـت اگر و تنها اگر $b_{i|j} + b_{j|i} = ca_{ij}$، که $c = c(x)$ تابع عددی غیرصــفر روی M اســت. بنابراین β بســته و نسـبت به α

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.617]

همدیس است اگر و تنها اگر $b_{i|j}=ca_{ij}$.

برای متر (α,β) تعمیم‌یافته، ضرایب افشانهٔ G^i به ضرایب افشانهٔ متر α یعنی G^i_α به شکل زیر مرتبط است [۱۰]:

$$G^i=G^i_\alpha+\alpha Qs^i{}_0+\{\Theta(-2\alpha Qs_0+r_{00}+2\alpha^2Rr)+\alpha\Omega(r_0+s_0)\}l^i$$
$$+\{\Psi(-2\alpha Qs_0+r_{00}+2\alpha^2Rr)+\alpha\Pi(r_0+s_0)\}b^i-\alpha^2R(r^i+s^i), \quad (۱۲)$$

که در آن $l^i:=\dfrac{y^i}{\alpha}$ و

$$Q:=\frac{\phi_2}{\phi-s\phi_2},\quad R:=\frac{\phi_1}{\phi-s\phi_2},$$

$$\Theta:=\frac{(\phi-s\phi_2)\phi_2-s\phi\phi_{22}}{2\phi(\phi-s\phi_2+(b^2-s^2)\phi_{22})},\quad \Psi:=\frac{\phi_{22}}{2(\phi-s\phi_2+(b^2-s^2)\phi_{22})}$$

$$\Pi:=\frac{(\phi-s\phi_2)\phi_{12}-s\phi_1\phi_{22}}{(\phi-s\phi_2)(\phi-s\phi_2+(b^2-s^2)\phi_{22})},\quad \Omega:=\frac{2\phi_1}{\phi}-\frac{s\phi+(b^2-s^2)\phi_2}{\phi}\Pi.$$

وقتی β یک ۱-فرمی بسته و همدیس باشد، یعنی در شرط (۳) صدق کند، آنگاه

$$r_{00}=c\alpha^2,\ \ r_0=c\beta,\ \ r=cb^2,\ \ r^i=cb^i,\ \ s^i{}_0=s_0=s^i=0$$

و با جاگذاری این روابط در (۱۲) نتیجه می‌گیریم [۱۰]:

$$G^i:=G^i_\alpha+c\alpha^2\{\Theta(1+2Rb^2)+s\Omega\}l^i+c\alpha^2\{\Psi(1+2Rb^2)+s\Pi-R\}b^i \quad (۱۳)$$

اگر قرار دهیم

$$E:=\frac{\phi_2+2s\phi_1}{2\phi}-H\,\frac{s\phi+(b^2-s^2)\phi_2}{\phi} \quad (۱۴)$$

$$H:=\frac{\phi_{22}-2(\phi_1-s\phi_{12})}{2(\phi-s\phi_2+(b^2-s^2)\phi_{22})}, \quad (۱۵)$$

لذا از رابطهٔ (۱۳) خواهیم داشت:

$$G^i:=G^i_\alpha+c\alpha^2El^i+c\alpha^2Hb^i. \quad (1)$$

پس وقتی β یک ۱-فرمی بسته و همدیس باشد، انحنا بروالد یک متر (α,β) تعمیم‌یافته به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

گزاره ([۱۰]): فرض کنید $F=\alpha\phi(b^2,s), s=\beta/\alpha$، یک متر (α,β) تعمیم‌یافته روی خمینهٔ n بعدی M باشد. فرض کنید β بسته و همدیس باشد. در این صورت انحنا برووالد F به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$B^i_{jkl}=\frac{c}{\alpha}U^i_{jkl} \tag{۱۷}$$

که در آن

$$\begin{aligned}U^i_{jkl}:=\{&[(E-sE_2)a_{kl}+E_{22}b_kb_l]\delta^i_j+s(3E_{22}+sE_{222})l_ll_jb_kl^i\\&-(E_{22}+sE_{222})b_ll_jb_kl^i\}(k\to l\to j\to k)\\&-\{sE_{22}[a_{jl}b_kl^i+(l_kb_l+l_lb_k)\delta^i_j]\\&+(E-sE_2-s^2E_{22})(a_{jl}l^i+l_l\delta^i_j)l_k\}(k\to l\to j\to k)\\&+\{(3E-3sE_2-6s^2E_{22}-s^3E_{222})l_jl_kl_l+E_{222}b_lb_kb_j\}l^i\\&+\{(H_2-sH_{22})(b_j-sl_j)a_{kl}-(H_2-sH_{22}-s^2H_{222})b_ll_jl_k\\&-sH_{222}b_kb_ll_j\}b^i(k\to l\to j\to k)\\&+\{s(3H_2-3sH_{22}-s^2H_{222})l_jl_kl_l+H_{222}b_jb_lb_k\}b^i,\end{aligned}$$

که E و H به ترتیب در (۱۴) و (۱۵) تعریف شده‌اند، $l_j:=a_{ij}l^i$ و $(k\to l\to j\to k)$ نمایشگر جایگشت دوری است.

انحنای لندسبرگ میانگین برای متر (α,β) تعمیم‌یافته

زهره‌وند و همکارش با استفاده از گزاره ۰ توانستند انحنای لندسبرگ برای یک متر (α,β) تعمیم‌یافته را محاسبه کنند که β یک-فرمی بسته و همدیس است [۱۱]:

گزاره ([۱۱]): فرض کنیم $s=\beta/\alpha,\ \ F=\alpha\phi(b^2,s)$ یک متر (α,β) تعمیم‌یافته روی خمینهٔ n بعدی M باشد و β بسته و همدیس باشد. آنگاه انحنای لندسبرگ F به صورت

$$L_{jkl}=-\frac{c}{2}\phi V_{jkl} \tag{۱۸}$$

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.617]

ارائه می‌شود که در آن

$$\begin{aligned}V_{jkl} := \{&[(E - sE_2)a_{kl} + E_{22}b_k b_l](\phi l_j + \phi_2(b_j - sl_j))\\ &-[(E_{22} + sE_{222})(b_l - sl_l) - 2E_{22}sl_l]\phi b_k l_j\} \ (k \to l \to j \to k)\\ &-\{sE_{22}[a_{jl}b_k\phi + (l_l b_k + l_k b_l)(\phi l_j + \phi_2(b_j - sl_j))]\\ &+(E - sE_2 - s^2E_{22})[a_{jl}l_k\phi + (\phi l_j + \phi_2(b_j - sl_j))l_k l_l]\} \ (k \to l \to j \to k)\\ &+[(3E - 3sE_2 - 6s^2E_2 2 - s^3E_{222})l_j l_k l_l + E_{222}b_j b_k b_l]\phi\\ &+\{(H_2 - sH_{22})(a_{kl}(b_j - sl_j) - b_l l_k l_j)\\ &-sH_{222}l_j b_l(b_k - sl_k)\}(s\phi + (b^2 - s^2)\phi_2) \ (k \to l \to j \to k)\\ &+[s(3H_2 - 3sH_{22} - s^2H_{222})l_j l_k l_l + H_{222}b_j b_k b_l] \ (s\phi + (b^2 - s^2)\phi_2).\end{aligned}$$

با استفاده از گزارهٔ ۰ و استفاده از میپل، ما نیز می‌توانیم انحنای لندسبرگ میانگین را برای متر (α,β) تعمیم‌یافته که دارای یک-فرمی β بسته و همدیس است، محاسبه کنیم:

گزاره: فرض کنیم $F = \alpha\phi(b^2, s)$، $s = \beta/\alpha$ یک متر (α,β) تعمیم یافته روی خمینهٔ n بعدی M باشد و β بسته و همدیس باشد. آنگاه انحنای لندسبرگ میانگین F به صورت

$$J_j = -\frac{c\phi}{2\rho}W_j, \tag{۱۹}$$

ارائه می‌شود که در آن

$$\begin{aligned}W_j := \{&(E - sE_2)(n+1)\phi_2 + 3E_{22}\phi_2(b^2 - s^2) - sE_{22}(n+1)\phi + E_{222}\phi(b^2 - s^2)\\ &+\{(H_2 - sH_{22})(n+1) + H_{222}(b^2 - s^2)\}(s\phi + (b^2 - s^2)\phi_2)\\ &+3\eta(E - sE_2)\phi_2(b^2 - s^2) + 3\eta E_{22}\phi_2(b^2 - s^2)^2 - 3s\eta E_{22}\phi(b^2 - s^2)\\ &+\eta E_{222}(b^2 - s^2)^2\phi + \eta[3(H_2 - sH_{22})(b^2 - s^2) + H_{222}(b^2 - s^2)^2]\\ &\times(s\phi + (b^2 - s^2)\phi_2)\}(b_j - sl_j)\end{aligned}$$

و ρ و η به ترتیب در روابط (۸) و (۱۱) تعریف شده‌اند و $l_j := a_{ij}l^i$.

اثبات. برای اینکه انحنای لندسبرگ میانگین $J_j := g^{kl}L_{jkl}$ را با استفاده از رابطه (۱۸) حساب کنیم، به رابطهٔ (۱۰) نیازمندیم. می‌دانیم $L_{jkl}y^k = 0$ در نتیجه

$$J_j := \frac{1}{\rho}\{a^{kl} + \eta b^k b^l\}L_{jkl} = \frac{c\phi}{2\rho}\{a^{kl} + \eta b^k b^l\}V_{jkl}. \tag{۲۰}$$

همچنین

$$\begin{aligned}a^{kl}V_{jkl} = \{&(E - sE_2)(n+1)\phi_2 + 3E_{22}\phi_2(b^2 - s^2) - sE_{22}(n+1)\phi + E_{222}\phi(b^2 - s^2)\\ &+[(H_2 - sH_{22})(n+1) + H_{222}(b^2 - s^2)](s\phi + (b^2 - s^2)\phi_2)\}(b_j - sl_j)\end{aligned}$$

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.617]

و

$$\eta b^k b^l V_{jkl} = \{3\eta(E - sE_2)\phi_2(b^2 - s^2) + 3\eta E_{22}\phi_2(b^2 - s^2)^2 - 3s\eta E_{22}\phi(b^2 - s^2)$$
$$+\eta E_{222}(b^2 - s^2)^2\phi + \eta[3(H_2 - sH_{22})(b^2 - s^2) + H_{222}(b^2 - s^2)^2]$$
$$\times(s\phi + (b^2 - s^2)\phi_2)\}(b_j - sl_j).$$

کافی است روابط اخیر را در (۲۰) جاگذاری کنیم تا رابطهٔ (۱۹) بدست آید.

اثبات قضیه ۰

اکنون می‌توانیم شرط لازم وکافی را برای اینکه یک متر (α,β) تعمیم‌یافته، لندسبرگ ضعیف باشد را به دست آوریم.

فرض کنیم $F = \alpha\phi(b^2, s)$، $s = \beta/\alpha$ یک متر (α,β) تعمیم‌یافته و لند سبرگ ضعیف با شد که β یک- فرمی بسته و همدیس است. پس در رابطهٔ (۱۹) صدق می‌کند. چون c و ϕ غیرصفر هستند، لذا $W_j = 0$، یعنی

$$(E - sE_2)(n+1)\phi_2 + 3E_{22}\phi_2(b^2 - s^2) - sE_{22}(n+1)\phi + E_{222}\phi(b^2 - s^2)$$
$$+\{(H_2 - sH_{22})(n+1) + H_{222}(b^2 - s^2)\}(s\phi + (b^2 - s^2)\phi_2)$$
$$-3\eta(E - sE_2)\phi_2(b^2 - s^2) - 3\eta E_{22}\phi_2(b^2 - s^2)^2 + 3s\eta E_{22}\phi(b^2 - s^2)$$
$$-\eta E_{222}(b^2 - s^2)^2\phi - \eta[3(H_2 - sH_{22})(b^2 - s^2) + H_{222}(b^2 - s^2)^2]$$
$$\times(s\phi + (b^2 - s^2)\phi_2) = 0. \qquad (۲۱)$$

معادلهٔ (۲۱) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$[1 + n + 3(b^2 - s^2)\eta][(E - sE_2)\phi_2 + (H_2 - sH_{22})(s\phi + (b^2 - s^2)\phi_2)]$$
$$+(b^2 - s^2)[1 + (b^2 - s^2)\eta][s\phi + (b^2 - s^2)\phi_2]H_{222}$$
$$+\{3(b^2 - s^2)[1 + (b^2 - s^2)\eta]\phi_2 - [1 + n + 3(b^2 - s^2)\eta]\, s\phi\}E_{22}$$
$$+(b^2 - s^2)[1 + (b^2 - s^2)\eta]\,\phi E_{222} = 0. \qquad (۲۲)$$

با این بازنویسی و دیدن معادلهٔ (۲۲)، به نظر می‌رسد که همان نتایج مقاله [۱۱] و این بار برای متر لند سبرگ ضعیف تکرار شود (چیزی شبیه به گزاره ۰ ولی این بار برای متر لندسبرگ ضعیف)، اما این موضوع تا کنون امکان اثبات نیافته است.

از طرفی هر تابع تحلیلی را می‌توان به صـــورت چندجمله‌ای تیلر تقریب زد. بنابراین می‌توانیم ϕ را به صـــورت یک چندجمله‌ای بر حسب b^2 و s نوشت. پس در ادامه، ϕ را همواره به صورت

$$\phi(b^2, s) = c_0(b^2) + c_1(b^2)s + c_2(b^2)s^2 + \ldots + c_m(b^2)s^m, \quad m \geq 1. \qquad (۲۳)$$

در نظر می‌گیریم.

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.617]

فرض کنیم NW نمایانگر صورت کسر معادلهٔ (۲۲) باشد، آن‌گاه رابطهٔ (۱۹) برقرار است اگر و تنها اگر

$$NW = 0 \tag{۲۴}$$

با جایگذاری (۲۳) در NW یک چندجمله‌ای برحسب s به دست می‌آید. نتایج زیر را خواهیم داشت:

حالت اول: $m=1$، یعنی ϕ یک تابع درجه یک بر حسب s باشد، $\phi(b^2,s)=c_0(b^2)+c_1(b^2)s$، که $c_1(b^2)\neq 0$. با جاگذاری ϕ در (۲۴) و استفاده از میپل، دستگاه معادلهٔ دیفرانسیل ODE زیر را به دست می‌آوریم.

$$2b^2\frac{d}{db^2}c_0\left(b^2\right)+c_0\left(b^2\right)=0 \tag{۲۵}$$

$$c_0\left(b^2\right)\frac{d}{db^2}c_1\left(b^2\right)-2c_1\left(b^2\right)\frac{d}{db^2}c_0\left(b^2\right)=0 \tag{۲۶}$$

با حل دستگاه معادلات بالا خواهیم داشت:

$$c_0(b^2)=\frac{a_0}{\sqrt{b^2}},\qquad c_1(b^2)=\frac{a_1}{b^2}, \tag{۲۷}$$

که در آن a_0 و a_1 ثابتند.

حالت دوم: $m=2$، یعنی ϕ یک تابع درجهٔ دو بر حسب s باشد،
$\phi(b^2,s)=c_0(b^2)+c_1(b^2)s+c_2(b^2)s^2$، که $c_2(b^2)\neq 0$. با جاگذاری ϕ در (۲۴) و استفاده از میپل، یک چندجمله‌ای برحسب s به دست می‌آید. برای اینکه این چندجمله‌ای مساوی صفر باشد، باید تک تک ضرایب مساوی صفر باشند. در نتیجه سه معادلهٔ زیر به معادلات (۲۵) و (۲۶) اضافه می‌شوند:

$$2b^2\frac{d}{db^2}c_2\left(b^2\right)+3c_2\left(b^2\right)=0 \tag{۲۸}$$

$$3\left(\frac{d}{db^2}c_1\left(b^2\right)\right)c_2\left(b^2\right)-2\left(\frac{d}{db^2}c_2\left(b^2\right)\right)c_1\left(b^2\right)=0 \tag{۲۹}$$

$$\begin{aligned}2b^2c_2\left(b^2\right)\frac{d}{db^2}c_2\left(b^2\right)-5c_0\left(b^2\right)\frac{d}{db^2}c_2\left(b^2\right)+3\left(c_2\left(b^2\right)\right)^2\\+15c_2\left(b^2\right)\frac{d}{db^2}c_0\left(b^2\right)=0.\end{aligned} \tag{۳۰}$$

اگر همین روند را ادامه دهیم، تمامی روابط ایجاد شده، به جز (۲۶)، پس از ساده‌سازی به یک معادله با فرم کلی زیر می‌رسیم:

$$2b^2\frac{d}{db^2}c_m\left(b^2\right)+(m+1)\,c_m\left(b^2\right)=0,\qquad m\neq 1 \tag{۳۱}$$

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.617]

با حل این معادله بقیه ضرایب نیز به صورت

$$c_i(b^2)=\frac{a_i}{(b^2)^{\frac{i+1}{2}}}, \qquad i=0,1,\ldots,m \tag{۳۲}$$

به دست خواهند آمد که در آن a_iها ثابت هستند.

انحنای لندسبرگ با ϕ چندجمله‌ای

در این بخش نتیجه‌ای که در مقالهٔ [۱۱] تو سط زهره‌وند و همکارش به د ست آمده را مورد برر سی قرار می‌دهیم. به عبارتی در اینجا نیز فرض می‌کنیم ϕ یک چندجمله‌ای بر حسب b^2 و s باشد و نتایج به دست آمده را با نتایج بخش ۴ مقایسه می‌کنیم.

ابتدا توجه خود را به نتیجه‌ای که در مقالهٔ [۱۱] آمده است، معطوف می‌کنیم:

گزاره (**[۱۱]**): فرض کنیم $F=\alpha\phi(b^2,s)$ ،$s=\beta/\alpha$ یک متر (α,β) تعمیم‌یافته روی خمینهٔ n بعدی M باشد و β بسته و هموار باشد. آنگاه F متر لندسبرگ است اگر و تنها اگر معادلات زیر برقرار باشند:

$$E_{22}=0, \qquad H_{222}=0, \tag{۳۳}$$

$$(E-sE_2)\phi_2+(H_2-sH_{22})(s\,\phi+(b^2-s^2)\phi_2)=0. \tag{۳۴}$$

اکنون همانند بخش ۴ فرض کنیم $\phi=\phi(b^2,s)$ یک چندجمله‌ای بر حســـب b^2 و s باشـــد. همچنین NE_{22}، NH_{222} و NP به ترتیب نمایشگر صورت کسر روابط (۳۳) و (۳۴) باشند. در نتیجه

$$NE_{22}=0, \qquad NH_{222}=0, \tag{۳۵}$$

$$NP=0 \tag{۳۶}$$

بنابر فرض، F متر لندسبرگ است. $\phi(b^2,s)$ نیز به صورت (۲۳) نوشته می‌شود. با جایگذاری (۲۳) در (۳۵) و (۳۶) یک چندجمله‌ای بر حسب s به دست می‌آید. لذا نتایج زیر حاصل می‌شود:

حالت اول: $m=1$، یعنی $\phi(b^2,s)=c_0(b^2)+c_1(b^2)s$ که $c_1(b^2)\neq 0$. با اســـتفاده از میپل، معادلات (۲۵) و (۲۶) بدست می‌آیند.

حالت دوم: $m=2$، یعنی $\phi(b^2,s)=c_0(b^2)+c_1(b^2)s+c_2(b^2)s^2$ که $c_2(b^2)\neq 0$. در این حالت نیز معادلات (۲۵)، (۲۶)، (۲۸)، (۲۹) و (۳۰) بدست می‌آید.

بنابراین می‌توان گزارهٔ۰ را به صورت زیر بازنویسی نمود:

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.617]

گزاره: فرض کنیم $F=\alpha\phi(b^2,s)$، $s=\beta/\alpha$ یک متر (α,β) تعمیم‌یافته روی خمینهٔ n بعدی M باشد و β بسته و همدیس باشد. اگر $\phi=\phi(b^2,s)$ یک چندجمله‌ای بر حسب b^2 و s باشد آنگاه F متر لندسبرگ است اگر و تنها اگر برای $i\neq 1$،

$$2b^2\frac{d}{db^2}c_i\left(b^2\right)+(i+1)c_i\left(b^2\right)=0$$

و معادلهٔ

$$c_0\left(b^2\right)\frac{d}{db^2}c_1\left(b^2\right)-2c_1\left(b^2\right)\frac{d}{db^2}c_0\left(b^2\right)=0.$$

برقرار باشد.

نتیجه‌گیری

ملاحظه می‌شود برای هر دو متر لندسبرگ و لندسبرگ میانگین نتایج مشابهی با جاگذاری ϕ چندجمله‌ای به دست آمد. از این رو می‌توان ادعا نمود که در حالت ϕ چندجمله‌ای، مترهای (α,β) تعمیم‌یافته لندسبرگ و لندسبرگ میانگین با هم معادل هستند. بنابراین در این شرایط نمی‌توان متر یونیکورن یافت. بدین ترتیب نتایج ۰ و ۰ اثبات می‌گردند. خواننده برای دیدن و دانستن نحوهٔ ساخت مثال می‌تواند به مقالهٔ [۱۱] مراجعه نماید.

References

1. Asanov, G. (2006). Finsleroid-Finsler space and spray coefficients. *preprint*,. Retrieved from arXiv:math/0604526

2. Bao, D. (2007). On two curvature-driven problems in Finsler geometry. *Adv. Study Pure Math, 48*, 19-71.

3. Bryant, R. (1996). Finsler structures on the 2-sphere satisfying K = 1, in:Finsler Geometry. *Contemporary Mathematics (American Mathematical Society, Providence), 196*, 27-42.

4. Bryant, R. (1997). Projectively flat Finsler 2-Spheres of constant flag curvature. *Selecta Math. (N.S.), 3*, 161-204.

5. Bryant, R. (2002). Some remarks on Finsler manifolds with constant flag curvature. *Houston J. Math., 28*(2), 221-262.

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.617]

6. Randers, G. (1941). On an asymmetric metric in the four-space of general relativity. *Phys. Rev, 59*, 195-199.

7. Shen, Z. (2001). Differential Geometry of Spray and Finsler Spaces. *(Kluwer Academic Publishers*.

8. Shen, Z. (2009). On a class of Landsberg metrics in Finsler geometry. *Canad. J. Math., 61*(6), 1357-1374.

9. Yu, C., & Zhu, H. (2011). On a new class of Finsler metrics. *Diff. Geom. Appl., 29*, 244-254.

10. Zhu, H. (2015). On general (α, β)-metrics with isotropic Berwald curvature. *arXiv:1506.01777*.

11. Zohrehvand, H., & Maleki, M. (2016). On general (α,β)-metrics of Landsberg type. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 13*, 1650085.

12. Zou, Y., & Cheng, X. (2014). The generalized unicorn problem on (α, β)-metrics. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 414*, 574-589.

13. Zhou, S., & Li, B. (2017). On Landsberg general (α, β)-metrics with a conformal 1-form, *preprint,* arXiv:1706.00533v1.

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.617]