یک مسئلهٔ جدید مقدار ویژهٔ معکوس برای ماتریس‌های ژاکوبی و سیستم جرم-فنر متناظر

حنیف میرزائی
دانشگاه صنعتی سهند، دانشکدهٔ علوم پایه

دریافت ۹۷/۰۷/۱۰ پذیرش ۹۸/۰۳/۲۲

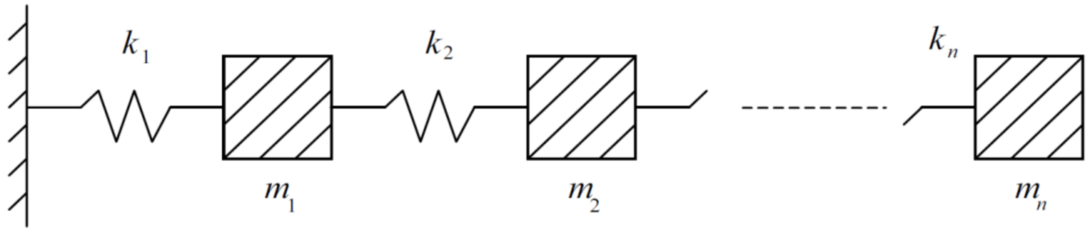
چکیده

ارتعاشات سیستم‌های مختلف مانند جرم-فنر، نخ کشسان، میله و غیره به‌صورت مسئلهٔ مقدار ویژهٔ ماتریس ژاکوبی مدل‌بندی می‌شوند. مسئلهٔ تعیین ماتریس ژاکوبی با استفاده از داده‌های طیفی معلوم، مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس ماتریس ژاکوبی گفته می‌شود. در این مقاله، ماتریس ژاکوبی J با استفاده از دو طیف و یک دادهٔ اضافی بازسازی می‌شود. یکی از طیف‌ها مقادیر ویژهٔ ماتریس J و طیف دیگر مقادیر ویژهٔ زیرماتریس حاصل از حذف هم‌زمان دو سطر و ستون ماتریس J است. شرایط لازم و کافی روی داده‌های طیفی را برای حل‌پذیری مسئلهٔ معکوس ارائه کرده و الگوریتم‌هایی برای تعیین ماتریس ژاکوبی J ارائه می‌گردد. سرانجام با ارائهٔ چند مثال عددی ماتریس ژاکوبی و سیستم جرم- فنر متناظر بازسازی می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس، ماتریس ژاکوبی، داده‌های طیفی، سیستم جرم-فنر.

مقدمه

تحلیل و طراحی مسائل فیزیک و مهندسی، نیاز به بررسی مدل‌های متناظر ریاضی دارند. این مدل‌ها را می‌توان به دو دسته از مسائل مستقیم و معکوس تقسیم‌بندی کرد. در ارتعاشات سازه‌ای، تجزیه و تخمین رفتار سیستم (پاسخ سیستم و فرکانس‌های طبیعی) از روی پارامترهای فیزیکی معلوم مسئلهٔ مستقیم و تعیین یا تخمین پارامترهای فیزیکی سیستم مانند چگالی، جرم، سختی، سطح مقطع و غیره از روی رفتار سیستم، مسئلهٔ معکوس نامیده می‌شود. شاخه‌ای از مسائل معکوس که در آن پارامترهای فیزیکی از روی داده‌های طیفی (مقادیر ویژه، بردارهای ویژه یا ترکیبی از آن‌ها) سیستم تعیین می‌شوند، مسائل مقدار ویژهٔ معکوس نامیده می‌شود. شکل ۱، یک سیستم جرم- فنر را نشان می‌دهد.



شکل ۱. سیستم جرم-فنر

با استفاده از قانون دوم نیوتن و قانون هوک ارتعاشات آزاد سیستم با معادلات

*نویسنده مسئول h_mirzaei@sut.ac.ir

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2025-12-13]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.11.6]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.671]

$$M\ddot{\mathbf{u}}+K\mathbf{u}=0, \qquad (۱)$$

توصیف می‌شود، که در آن $\mathbf{u}$ بردار جابه‌جایی جرم‌ها است، $M=\text{diag}(m_1,m_2,\ldots,m_n)$ ماتریس قطری جرم‌ها است و K ماتریس سه قطری حاصل از ضرایب سختی فنرها بدین‌صورت است:

$$K=\begin{pmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & & & \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -k_{n-1} & k_{n-1}+k_n & -k_n \\ & & & -k_n & k_n \end{pmatrix}.$$

با فرض ارتعاشات متناوب $\mathbf{u}=\mathbf{v}\sin(\omega t)$ معادلهٔ دیفرانسیل (۱) به شکل مسئلهٔ مقدار ویژهٔ (۲) در می‌آید:

$$(K-\omega^2 M)\mathbf{v}=0. \qquad (۲)$$

با فرض $M=D^2=\text{diag}(d_1^2,\ldots,d_n^2)$ و $\lambda=\omega^2$ معادلهٔ (۲) را می‌توان بدین‌صورت بازنویسی کرد:

$$(KD^{-1}-\lambda D)D\mathbf{v}=0,$$

با ضرب طرفین معادلهٔ فوق از چپ در D^{-1} خواهیم داشت

$$JX=\lambda X,\quad J=D^{-1}KD^{-1},\quad X=D\mathbf{v}, \qquad (۳)$$

ماتریس J، یک ماتریس سه قطری متقارن به صورت زیر می‌باشد:

$$J=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}, \qquad (۴)$$

که در آن

$$a_i=\frac{k_i+k_{i+1}}{m_i},\quad b_i=-\frac{k_{i+1}}{d_i d_{i+1}},\quad d_i^2=m_i. \qquad (۵)$$

ماتریس J، ماتریس ژاکوبی نامیده می‌شود. با توجه به موارد بالا، مقادیر ویژه ماتریس‌های (K,M) و J یکسان هستند. از طرفی به آسانی می‌توان نشان داد که ماتریس (K,M) دارای مقادیر ویژه مثبت است. بنابراین ماتریس J به‌صورت (۴) نیز دارای مقادیر ویژه مثبت است و با توجه به متقارن بودن، معین مثبت نیز هست. هم‌چنین ماتریس‌های (K,M) و J دارای مقادیر ویژهٔ متمایز هستند [۱]. بنابراین سیستم جرم- فنر به‌صورت مسئلهٔ مقدار ویژهٔ ماتریس ژاکوبی مدل‌بندی می‌شود. از مسائل ارتعاشی دیگر که به‌صورت (۳) مدل‌بندی می‌شوند، می‌توان به سیستم ارتعاشی چرخشی شامل n دیسک، ارتعاشات n جرم نقطه‌ای روی یک نخ کشسان و غیره اشاره کرد [۱]. هم‌چنین اگر سطح مقطع یک میله غیریکنواخت با سطوح تکه‌ای ثابت تقریب زده شود، آن‌گاه ارتعاشات میلهٔ تقریبی به‌صورت مسئلهٔ مقدار ویژهٔ ماتریس ژاکوبی مدل‌بندی می‌شود [۲]. مسئلهٔ مقدار ویژه معکوس، برای سیستم جرم- فنر، تعیین جرم‌های m_i و سختی‌های فنر k_i و برای ماتریس ژاکوبی، تعیین درایه‌های a_i و b_i با استفاده از داده‌های طیفی است. روابط (۵) نشان می‌دهند که مسئلهٔ مقدار ویژه معکوس سیستم جرم-فنر با یک مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس ماتریس ژاکوبی متناظر است. در [۱] ثابت شده است که برای هر ماتریس ژاکوبی معین مثبت به‌صورت (۴)، سیستم

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2025-12-13]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.11.6]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.671]

جرم-فنر منحصربفرد با مجموع جرم‌های مشخص وجود دارد. تحقیق روی مسائل معکوس ماتریس‌های ژاکوبی با کار کرین[1] در اتحاد جماهیر شوروی شروع شد. انگیزهٔ اولیهٔ او از بررسی چنین مسائلی این بود که این مسائل در تقریب مسائل اشتورم-لیوویل ظاهر می‌شوند [۱]. ماتریسی که از حذف سطر و ستون $(m+1)$ام ماتریس J به‌دست می‌آید، با J_{m+1} نشان داده می‌شود. از نظر فیزیکی این ماتریس متناظر با یک سیستم جرم- فنر است که در آن جرم $(m+1)$ام ثابت است. هم‌چنین ماتریسی که از حذف هم‌زمان سطر و ستون $(m+1)$ام و $(m+r+2)$ام ماتریس J حاصل می‌شود، با $J_{m+1,m+r+2}$ نشان داده می‌شود. از نظر فیزیکی این ماتریس متناظر با یک سیستم جرم- فنر است که در آن جرم‌های $(m+1)$ام و $(m+r+2)$ام ثابت است. مجموعهٔ تمام مقادیر ویژهٔ ماتریس J طیف آن ماتریس نامیده می‌شود و با $\sigma(J)$ نشان داده می‌شود. هاچستات[2] برای اولین‌بار بازسازی ماتریس J را با استفاده از طیف‌های $\sigma(J)$ و $\sigma(J_1)$ بررسی کرد [۳]. وی نشان داد که حداکثر یک ماتریس J با این شرایط وجود دارد. هاچستات سعی کرد این ماتریس منحصربفرد را بازسازی کند [۴]، اما، نتوانست نشان دهد که روش او همیشه منجر به مقادیر حقیقی برای b_iها می‌شود. هالد[3] الگوریتم دیگری برای بازسازی ماتریس J ارائه کرد [۵]، و نشان داد که طیف‌های $\sigma(J)=\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$ و $\sigma(J_1)=\{\mu_i\}_{i=1}^{n-1}$ تو در تو هستند. یعنی،

$$0<\lambda_1<\mu_1<\lambda_2<\ldots<\mu_{n-1}<\lambda_n.$$

هم‌چنین وی نشان داد که با توجه به این‌که مقادیر ویژه تو در تو هستند، الگوریتم بازسازی هاچستات [۴] منجر به مقادیر حقیقی برای b_iها می‌شود. با استفاده از طیف‌های $\sigma(J)=\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$ و $\sigma(J_1)=\{\mu_i\}_{i=1}^{n-1}$ بردار $\mathbf{x}_1=\{x_{1,i}\}$، مؤلفه‌های اول بردارهای ویژهٔ متناظر با مقادیر ویژهٔ λ_i، به‌صورت (۶) به‌دست می‌آیند:

$$x_{1,i}^2=\frac{\det(\lambda_i I-J_1)}{\prod_{j=1,\,j\neq i}^{n}(\lambda_i-\lambda_j)}=\frac{\prod_{j=1}^{n-1}(\lambda_i-\mu_j)}{\prod_{j=1,\,j\neq i}^{n}(\lambda_i-\lambda_j)},\quad i=1,2,\ldots,n, \tag{۶}$$

هم‌چنین مؤلفه‌های آخر بردارهای ویژهٔ متناظر با مقادیر ویژهٔ λ_i به‌صورت (۷) به‌دست می‌آیند:

$$x_{n,i}^2=\frac{\det(\lambda_i I-J_n)}{\prod_{j=1,\,j\neq i}^{n}(\lambda_i-\lambda_j)}=\frac{\prod_{j=1}^{n-1}(\lambda_i-\bar{\mu}_j)}{\prod_{j=1,\,j\neq i}^{n}(\lambda_i-\lambda_j)},\quad i=1,2,\ldots,n, \tag{۷}$$

که در آن $\{\bar{\mu}_i\}_{i=1}^{n-1}$ طیف ماتریس J_n است. ماتریس ژاکوبی J را می‌توان با استفاده از مقادیر ویژهٔ $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$ و بردار $\mathbf{x}_1$ ($\mathbf{x}_n$) و به‌کمک الگوریتم لانکسوز بازسازی کرد [۱]. گلدول[4] و ویلمز[5] [۶] ماتریس J را به‌کمک طیف‌های $\sigma(J)$ و $\sigma(J_m)$، $2\le m\le n-1$، بازسازی کردند. برای بازسازی ماتریس سه قطری و هم‌چنین بازسازی سیستم جرم-فنر دو طیف از مسئله باید معلوم باشند. گلدول [۷] فرض کرد که تنها طیف $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$ معلوم باشد و طیف دوم $\{\mu_i\}_{i=1}^{n-1}$ یا بردار $\mathbf{x}_1$ را با اعمال یک شرط کمینه‌سازی به‌دست آورد. وی طیف دوم را از کمینه کردن جرم کل سیستم

1. M. G. Krein
2. Hachusdat
3. Hald
4. Gladwell
5. Willms

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2025-12-13]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.11.6]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.671]

به‌دست آورد. پورتر[6] [۸]، [۹]، سیستم جرم-فنر را از روی دو مود به‌دست آورد اما، وی شرایط لازم و کافی روی بردارهای ویژه که منجر به جرم و سختی مثبت می‌شوند، را بحث نکرد. این شرایط را گلدول [۱۰] بررسی کرده است. گسسته‌سازی میله مرتعش غیریکنواخت با روش عناصر محدود به مسئلهٔ مقدار ویژهٔ ماتریسی $JX = MX$ منجر می‌شود که در آن J ماتریس ژاکوبی و M ماتریس سه قطری معین مثبت است، مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس چنین مسائلی در [۱۱]، [۱۲] و [۱۳] بررسی شده است. آیدین و همکارانش [۱۴] مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس ماتریس ژاکوبی با عناصر روی قطر اصلی صفر را بررسی کردند. در [۱۵] و [۱۶] ماتریس ژاکوبی از مرتبهٔ $2n$ و سیستم جرم-فنر متناظر با استفاده از مقادیر ویژه و زیرماتریس پیش‌رو اصلی بازسازی شده است. در [۱۷] ماتریس ژاکوبی با استفاده از سه طیف بازسازی شده است؛ که در آن به جای حذف سطر و ستون ماتریس، درایه هایی از قطر اصلی را تغییر داده‌اند. نظری و همکارانش [۱۸]، [۱۹] و [۲۰] مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس ماتریس‌های فاصله، سه قطری نامنفی و ماتریس‌های متقارن نامنفی را بررسی کرده‌اند. در [۲۱،۲۲،۲۳] مسائل مقدار ویژهٔ معکوس ماتریس‌های شبه ژاکوبی بررسی شده است. در این مقاله، مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس با استفاده از یک مجموعه داده‌های جدید بدین‌صورت بررسی می‌شود:

مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس: فرض کنید داده‌های طیفی $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$ ، $\{\mu_i\}_{i=1}^m$، $\{\nu_i\}_{i=1}^r$، $\{\gamma_i\}_{i=1}^n$ و عدد β داده شده‌اند. ماتریس ژاکوبی J را چنان بیابید که داشته باشیم:

$$\sigma(J)=\{\lambda_i\}_{i=1}^N,\ \ \sigma(J_{m+1,m+r+2})=\{\mu_i\}_{i=1}^m\cup\{\nu_i\}_{i=1}^r\cup\{\gamma_i\}_{i=1}^n,\ \ \beta=\prod_{j=m+1}^{m+r+1} b_j. \quad (۸)$$

مطالب این مقاله به‌صورت زیر تدوین شده است. در بخش ۲، شرایط لازم روی داده‌های طیفی بررسی می‌شود. در بخش ۳، شرایط لازم و کافی برای وجود جواب مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس بررسی و الگوریتمی برای بازسازی ماتریس ژاکوبی ارائه می‌شود. در بخش ۴، با ارائهٔ چند مثال عددی درستی نتایج ارائه شده بررسی می‌شود.

شرایط لازم روی داده‌های طیفی

در این بخش، شرایط لازم روی داده‌های طیفی مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس را به‌دست می‌آوریم.
ماتریس ژاکوبی J ، (۴) را می‌توان به‌صورت بلوکی (۹) نوشت:

$$J=\begin{pmatrix} A & \mathbf{b}_1 & 0 & 0 & 0\\ \mathbf{b}_1^T & a_{m+1} & \mathbf{b}_2^T & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{b}_2 & B & \mathbf{b}_3 & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{b}_3^T & a_{m+r+2} & \mathbf{b}_4^T\\ 0 & 0 & & \mathbf{b}_4 & C \end{pmatrix}, \quad (۹)$$

که در آن A ، B و C به‌ترتیب ماتریس‌های ژاکوبی از مرتبهٔ m ، r و n است، ماتریس J از مرتبهٔ $N=m+r+n+2$ است و

$$\mathbf{b}_1^T=(0,0,\ldots,b_m),\quad \mathbf{b}_2^T=(b_{m+1},0,0,\ldots,0),$$

6. Porter

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2025-12-13]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.11.6]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.671]

$$\mathbf{b}_3^T = (0, 0, \ldots, b_{m+r+1}), \quad \mathbf{b}_4^T = (b_{m+r+2}, 0, 0, \ldots, 0).$$

ماتریس‌های J_{m+1} ، J_{m+r+2} و $J_{m+1,m+r+2}$ به‌صورت بلوکی زیر نوشته می‌شوند:

$$J_{m+1} = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & H \end{pmatrix}, \quad J_{m+r+2} = \begin{pmatrix} P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix}, \quad J_{m+1,m+r+2} = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & C \end{pmatrix},$$

که در آن ماتریس‌های H و P بدین‌صورت هستند:

$$H = \begin{pmatrix} B & \mathbf{b}_3 & 0 \\ \mathbf{b}_3^T & a_{m+r+2} & \mathbf{b}_4^T \\ 0 & \mathbf{b}_4 & C \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} A & \mathbf{b}_1 & 0 \\ \mathbf{b}_1^T & a_{m+1} & \mathbf{b}_2^T \\ 0 & \mathbf{b}_2 & B \end{pmatrix}.$$

فرض کنید $\sigma(J) = \{\lambda_i\}_{i=1}^N$ و $\sigma(J_{m+1,m+r+2}) = \{\hat{\mu}_j\}_{j=1}^{N-2}$. ماتریس $J_{m+1,m+r+2}$ بلوکی قطری است بنابراین، مقادیر ویژهٔ آن برابر با مجموعهٔ تمام مقادیر ویژهٔ ماتریس‌های A، B و C است و با فرض $\sigma(A) = \{\mu_i\}_{i=1}^m$ ، $\sigma(B) = \{\nu_i\}_{i=1}^r$ و $\sigma(C) = \{\gamma_i\}_{i=1}^n$ می‌توان نوشت:

$$\{\hat{\mu}_j\}_{j=1}^{N-2} = \{\mu_i\}_{i=1}^m \cup \{\nu_i\}_{i=1}^r \cup \{\gamma_i\}_{i=1}^n.$$

در این مقاله، ماتریس ژاکوبی J (۹) را چنان بازسازی می‌کنیم که دارای طیف $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$ و ماتریس متناظر $J_{m+1,m+r+2}$ دارای طیف $\{\hat{\mu}_j\}_{j=1}^{N-2}$ باشد. برای این کار، ابتدا شرایط لازم روی داده‌های طیفی $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$، و $\{\hat{\mu}_j\}_{j=1}^{N-2}$ و β را به‌دست می‌آوریم.

با توجه به شکل ماتریس J_{m+1}، این ماتریس دارای طیف $\{\mu_i\}_{i=1}^m \cup \{\mu_i^*\}_{i=1}^{N-m-1}$ است که $\{\mu_i^*\}_{i=1}^{N-m-1}$ طیف ماتریس ژاکوبی H و $\{\mu_i\}_{i=1}^m$طیف ماتریس A است. البته طیف $\{\mu_i^*\}_{i=1}^{N-m-1}$ داده نشده‌اند اما طبق [۱] طیف ماتریس‌های J و J_{m+1} باید حقیقی، مثبت و تو در تو باشند. بنابراین اعداد داده شدهٔ $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$ و $\{\mu_i\}_{i=1}^m$ باید در این شرط صدق کنند:

i. مقادیر $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$حقیقی، متمایز و مثبت باشند و مقادیر ویژهٔ $\{\lambda_{i_k}\}_{k=1}^m \subset \{\lambda_i\}_{i=1}^N$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که

$$\lambda_{i_1} \le \mu_1 < \lambda_{i_1+1}, \ \lambda_{i_2} \le \mu_1 < \lambda_{i_2+1}, \ \ldots, \ \lambda_{i_m} \le \mu_m < \lambda_{i_m+1}. \tag{۱۰}$$

فرض کنید $\sigma(J_{m+r+2}) = \{\gamma_i\}_{i=1}^n \cup \{\gamma_i^*\}_{i=1}^{N-n-1}$. که $\{\gamma_i^*\}_{i=1}^{N-n-1}$ طیف ماتریس ژاکوبی P و $\{\gamma_i\}_{i=1}^n$ طیف ماتریس C است. طبق تو در تو بودن طیف‌ها مقادیر $\{\gamma_i\}_{i=1}^n$ باید در این شرط صدق کنند:

ii. مقادیر ویژهٔ $\{\lambda_{j_k}\}_{k=1}^n \subset \{\lambda_i\}_{i=1}^N$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که

$$\lambda_{j_1} \le \gamma_1 < \lambda_{j_1+1}, \ \lambda_{j_2} \le \gamma_2 < \lambda_{j_2+1}, \ \ldots, \lambda_{j_n} \le \gamma_n < \lambda_{j_n+1}. \tag{۱۱}$$

حال ماتریس ژاکوبی H را در نظر بگیرید. از حذف سطر و ستون $(r+1)$ام آن، ماتریس

$$H_{r+1} = \begin{pmatrix} B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix},$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2025-12-13]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.11.6]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.671]

به‌دست می‌آید. ماتریس H_{r+1}دارای طیف $\left\{\hat{\nu}_i\right\}_{i=1}^{r+n}=\left\{\nu_i\right\}_{i=1}^{r}\bigcup\left\{\gamma_i\right\}_{i=1}^{n}$ است و طیف‌های $\left\{\mu_i^*\right\}_{i=1}^{N-m-1}$و $\left\{\hat{\nu}_i\right\}_{i=1}^{r+n}$ تو در تو هستند یعنی

$$\mu_1^* \le \hat{\nu}_1 < \mu_2^* \le \hat{\nu}_2 < \cdots \le \hat{\nu}_{N-m-2} < \mu_{N-m-1}^*, \qquad (۱۲)$$

فرض کنید $\left\{\lambda_{m_i}\right\}_{i=1}^{N-m-1}$ زیردنباله‌ای از $\left\{\lambda_i\right\}_{i=1}^{N}$ باشد که بین λ_{m_i} و λ_{m_i+1} هیچ کدام از μ_iها قرار نداشته باشند، بنابراین طبق تو در تو بودن مقادیر ویژه، μ_i^*ها بین این مقادیر ویژه قرار دارند؛ به‌عبارت دیگر

$$\lambda_{m_1} \le \mu_1^* < \lambda_{m_1+1},\ \ \lambda_{m_2} \le \mu_2^* < \lambda_{m_2+1},\ \ \ldots,\ \ \lambda_{m_{N-m-1}} \le \mu_{N-m-1}^* < \lambda_{m_{N-m-1}+1}. \qquad (۱۳)$$

از نامساوی‌های (۱۲) و (۱۳) نتیجه می‌شود که مقادیر ویژهٔ $\left\{\hat{\nu}_i\right\}_{i=1}^{r+n}$ باید در این شرط صدق کنند:

.iii

$$\lambda_{j_1} \le \hat{\nu}_1 < \lambda_{j_2+1},\ \ \hat{\nu}_1 \le \hat{\nu}_2 < \lambda_{j_3+1},\ \ \ldots,\ \ \hat{\nu}_{N-m-1} \le \hat{\nu}_{N-m-2} < \lambda_{j_{N-m-1}+1}. \qquad (۱۴)$$

از حذف سطر و ستون $(m+1)$ام ماتریس P، ماتریس

$$P_{m+1}=\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix},$$

به‌دست می‌آید. فرض کنید $\sigma(P_{m+1})=\left\{\hat{\gamma}_i\right\}_{i=1}^{m+r}=\left\{\mu_i\right\}_{i=1}^{m}\bigcup\left\{\nu_i\right\}_{i=1}^{r}$. بنابراین طیف‌های $\left\{\gamma_i^*\right\}_{i=1}^{N-n-1}$ و $\left\{\hat{\gamma}_i\right\}_{i=1}^{m+r}$ تو در تو هستند، یعنی

$$\gamma_1^* \le \hat{\gamma}_1 < \gamma_2^* \le \hat{\gamma}_2 < \ldots \le \hat{\gamma}_{N-n-2} < \gamma_{N-n-1}^*. \qquad (۱۵)$$

فرض کنید $\left\{\lambda_{n_i}\right\}_{i=1}^{N-n-1}$زیر دنباله‌ای از $\left\{\lambda_i\right\}_{i=1}^{N}$ باشد که بین λ_{n_i} و λ_{n_i+1} هیچ کدام از γ_iها قرار نداشته باشند، بنابراین طبق در هم تو در تو بودن مقادیر ویژه، γ_i^*ها بین این مقادیر ویژه قرار دارند؛ به‌عبارت دیگر

$$\lambda_{n_1} \le \gamma_1^* < \lambda_{n_1+1},\ \ \lambda_{n_2} \le \gamma_2^* < \lambda_{n_2+1},\ \ \ldots,\ \lambda_{n_{N-n-1}} \le \gamma_{N-n-1}^* < \lambda_{n_{N-n-1}+1}. \qquad (۱۶)$$

از نامساوی‌های (۱۵) و (۱۶) نتیجه می‌شود که مقادیر ویژهٔ $\left\{\hat{\gamma}_i\right\}_{i=1}^{m+r}$ باید در این شرط صدق کنند:

.iv

$$\lambda_{n_1} \le \hat{\gamma}_1 < \lambda_{n_2+1},\ \ \hat{\gamma}_1 \le \hat{\gamma}_2 < \lambda_{n_3+1},\ \ \ldots,\ \ \hat{\gamma}_{N-n-1} \le \hat{\gamma}_{N-n-2} < \lambda_{n_{N-n-1}+1}. \qquad (۱۷)$$

طبق روابط (۵) مقادیر b_iها در ماتریس ژاکوبی منفی است، بنابراین طبق رابطهٔ (۸) مقدار β باید در نامساوی (۱۸) صدق کند:

.v

$$(-1)^{r+1}\beta > 0. \qquad (۱۸)$$

مطالب مذکور در قضیهٔ ۱ جمع‌بندی شده است:

قضیهٔ ۱. اگر ماتریس ژاکوبی J با طیف‌های (۸) جواب مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس باشد، آن‌گاه داده‌های طیفی باید در نامساوی‌های (۱۰)، (۱۱)، (۱۴)، (۱۷) و (۱۸) صدق کنند.

بازسازی ماتریس ژاکوبی

در این بخش، الگوریتمی برای بازسازی ماتریس ژاکوبی J با استفاده از داده‌های طیفی معلوم ارائه می‌شود.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2025-12-13]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.11.6]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.671]

لم ۱ ویژگی‌هایی از بردارهای ویژۀ ماتریس ژاکوبی را بیان می‌کند:

لم ۱. [۱،۱۶] فرض کنید بردار $\mathbf{x}=[x_1,x_2,\dots,x_n]$، بردار ویژۀ متناظر با مقدار ویژۀ λ از ماتریس ژاکوبی J باشد، آن‌گاه

الف) $x_1x_n\neq 0$،

ب) اگر $x_i=0$، آنگاه $x_{i-1}x_{i+1}<0$،

ج) $x_n=\dfrac{\det(\lambda I-J_n)}{\prod_{i=1}^{n-1}b_i}x_1$.

فرض کنید $\{\mathbf{y}_j\}_{j=1}^{m}$، $\{\mathbf{z}_j\}_{j=1}^{r}$ و $\{\mathbf{q}_j\}_{j=1}^{n}$ به‌ترتیب بردارهای ویژه متعامد یکه ماتریس‌های A، B و C باشند و

$$\mathbf{X}=[x_1,x_2,\dots,x_m,x_{m+1},\dots,x_{m+r+2},\dots,x_N],$$

بردار ویژۀ دلخواه ماتریس J متناظر با مقدار ویژۀ λ باشد. بردارهای $\{\mathbf{y}_j\}_{j=1}^{m}$، $\{\mathbf{z}_j\}_{j=1}^{r}$ و $\{\mathbf{q}_j\}_{j=1}^{n}$ به‌ترتیب پایه‌ای برای $\mathbb{R}^m$، $\mathbb{R}^r$ و $\mathbb{R}^n$ است، بنابراین بردار $\mathbf{X}$ را می‌توان بدین‌صورت نوشت:

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} Y & & & & \\ & 1 & & & \\ & & Z & & \\ & & & 1 & \\ & & & & Q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1\\ \vdots\\ p_m\\ x_{m+1}\\ h_1\\ \vdots\\ h_r\\ x_{m+r+2}\\ w_1\\ \vdots\\ w_n \end{pmatrix},$$

که در آن

$$Y=[\mathbf{y}_1,\dots,\mathbf{y}_m],\quad Z=[\mathbf{z}_1,\dots,\mathbf{z}_r],\quad Q=[\mathbf{q}_1,\dots,\mathbf{q}_n],$$

ماتریس‌های متعامد یکۀ متشکل از بردارهای ویژه‌اند. با ضرب طرفین معادلۀ $J\mathbf{X}=\lambda\mathbf{X}$ از چپ در ماتریس

$$\begin{pmatrix} Y^T & & & & \\ & 1 & & & \\ & & Z^T & & \\ & & & 1 & \\ & & & & Q^T \end{pmatrix},$$

و اعمال روابط $Y^TAY=\mathrm{diag}(\mu_1,\dots,\mu_m)$، $Z^TBZ=\mathrm{diag}(\nu_1,\dots,\nu_r)$ و $Q^TAQ=\mathrm{diag}(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$ داریم:

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2025-12-13]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.11.6]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.671]

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2025-12-13]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.11.6]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.671]

$$\begin{pmatrix}
\lambda-\mu_1 & & & -s_1 & & & & 0 & & & \\
& \ddots & & \vdots & & & & \vdots & & & \\
& & \lambda-\mu_m & -s_m & & & & 0 & & & \\
-s_1 & \dots & -s_m & \lambda-a_{m+1} & -t_1 & \dots & -t_r & 0 & 0 & \dots & 0 \\
& & & -t_1 & \lambda-\nu_1 & & & u_1 & & & \\
& & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
& & & -t_r & & & \lambda-\nu_r & u_r & & & \\
0 & \dots & 0 & 0 & u_1 & & u_r & \lambda-a_{m+r+2} & v_1 & \dots & v_n \\
& & & 0 & & & & v_1 & \lambda-\gamma_1 & & \\
& & & \vdots & & & & \vdots & & \ddots & \\
& & & 0 & & & & v_n & & & \lambda-\gamma_n
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \\ x_{m+1} \\ h_1 \\ \vdots \\ h_r \\ x_{m+r+2} \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = 0,$$

(۱۹)

که در آن

$$s_j = b_m y_{m,j},\ \ t_j = b_{m+1} z_{1,j},\ \ u_j = b_{m+r+1} z_{r,j},\ \ v_j = b_{m+r+2} q_{1,j}, \qquad (۲۰)$$

مقادیر $y_{m,j}$ و $z_{r,j}$ به‌ترتیب مولفهٔ آخر بردارهای ویژهٔ ماتریس A و B و $z_{1,j}$ و $q_{1,j}$ به‌ترتیب مؤلفهٔ اول بردارهای ویژهٔ ماتریس B و C است.

لم ۲. فرض کنید λ مقدار ویژهٔ دلخواه ماتریس J و $\mathbf{X}$ بردار ویژهٔ متناظر آن باشد، آن‌گاه λ مقدار ویژهٔ ماتریس‌های A، B و C است اگر و تنها اگر $x_{m+1} = x_{m+r+2} = 0$.

اثبات. فرض کنید λ مقدار ویژهٔ دلخواه ماتریس J و $\mathbf{X}$ بردار ویژهٔ متناظر آن باشد به‌طوری‌که $x_{m+1} = x_{m+r+2} = 0$. در این حالت معادلهٔ $J\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X}$ را می‌توان به‌صورت سه دستگاه معادلات زیر نوشت:

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix},\ \ B\begin{pmatrix} x_{m+2} \\ \vdots \\ x_{m+r} \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_{m+2} \\ \vdots \\ x_{m+r} \end{pmatrix},\ \ C\begin{pmatrix} x_{m+r+2} \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_{m+r+2} \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}.$$

از آن‌جاکه $\mathbf{X}$ بردار ویژهٔ ماتریس ژاکوبی است و طبق لم۱ در ماتریس‌های ژاکوبی مؤلفه‌های اول (x_1) و آخر (x_N) بردارهای ویژه، مخالف صفر است و دو مؤلفهٔ متوالی نمی‌توانند هم‌زمان صفر شوند، بنابراین λ مقدار ویژهٔ ماتریس‌های A، B و C نیز است. حال فرض کنید λ مقدار ویژهٔ ماتریس‌های A، B و C است، بنابراین بردارهای مخالف صفر $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$، $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^r$ و $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$A\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y},\ \ B\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z},\ \ C\mathbf{q} = \lambda\mathbf{q}.$$

حال بردار $W = [\mathbf{y}, 0, \mathbf{z}, 0, \mathbf{q}]$ را در نظر بگیرید. واضح است که $JW = \lambda W$. با توجه به این‌که ماتریس‌های ژاکوبی دارای مقادیر ویژهٔ ساده است، بنابراین $\mathbf{X}$ مضربی از W است و $x_{m+1} = x_{m+r+2} = 0$.

قضیهٔ ۲. فرض کنید داده‌های طیفی $\{\lambda_i\}_{i=1}^{N}$ و $\{\hat{\mu}_j\}_{j=1}^{N-2}$ متمایز و در شرایط قضیهٔ ۱ صدق کنند، آن‌گاه مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس دارای جواب است اگر و تنها اگر دستگاه معادلات جبری (۲۱) دارای جواب باشد:

$$\begin{cases} \left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{s_j^2}{\lambda_i-\mu_j}+\sum_{j=1}^{r}\frac{t_j^2}{\lambda_i-\nu_j}+(a_{m+1}-\lambda_i)\right\}\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{u_j^2}{\lambda_i-\nu_j}+\sum_{j=1}^{r}\frac{v_j^2}{\lambda_i-\gamma_j}+(a_{m+r+1}-\lambda_i)\right\} \\ \qquad =\beta^2\left\{\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{\Lambda_j(\lambda_i-\nu_j)}\right\}^2, \quad i=1,\dots,N, \\ t_iu_i=\dfrac{\beta}{\Lambda_i}, \qquad i=1,\dots,r, \\ a_{m+1}+a_{m+r+2}=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i-\sum_{i=1}^{N-2}\hat{\mu}_i. \end{cases} \tag{۲۱}$$

اثبات. لزوم. فرض کنید ماتریس J جواب مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس باشد که داده‌های طیفی آن به‌صورت (۸) است. دستگاه معادلات (۱۹) را می‌توان به‌صورت (۲۲) نوشت:

$$\begin{cases} (\mu_j-\lambda)p_j+s_jx_{m+1}=0, \quad j=1,2,\dots,m, \\ \sum_{j=1}^{m}s_jp_j+(a_{m+1}-\lambda)x_{m+1}+\sum_{j=1}^{r}t_jh_j=0, \\ t_jx_{m+1}+(\nu_j-\lambda)h_j+u_jx_{m+r+2}=0, \;\; j=1,2,\dots,n, \\ \sum_{j=1}^{n}u_jh_j+(a_{m+r+2}-\lambda)x_{m+r+2}+\sum_{j=1}^{n}v_jw_j=0, \\ v_jx_{m+r+2}+(\gamma_j-\lambda)w_j=0, \;\; j=1,2,\dots,n. \end{cases} \tag{۲۲}$$

با محاسبهٔ مقادیر p_j، h_j و w_j به‌ترتیب از معادلات اول، سوم و پنجم در (۲۲) سپس جای‌گذاری روابط حاصل در معادلات دوم و چهارم در (۲۲) داریم:

$$\begin{cases} [\sum_{j=1}^{m}\frac{s_j^2}{\lambda-\mu_j}+\sum_{j=1}^{r}\frac{t_j^2}{\lambda-\nu_j}+(a_{m+1}-\lambda)]x_{m+1}+\sum_{j=1}^{r}\frac{t_ju_j}{\lambda-\nu_j}x_{m+r+2}=0, \\ \sum_{j=1}^{r}\frac{t_ju_j}{\lambda-\nu_j}x_{m+1}+[\sum_{j=1}^{m}\frac{u_j^2}{\lambda-\nu_j}+\sum_{j=1}^{r}\frac{v_j^2}{\lambda-\gamma_j}+(a_{m+r+2}-\lambda)]x_{m+r+2}=0. \end{cases} \tag{۲۳}$$

طبق لم ۲ دترمینان ماتریس ضرایب در (۲۳) به‌ازای $\lambda=\{\lambda_i\}_{i=1}^{N}$ صفر است و دستگاه معادلات (۲۴) به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} &\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{s_j^2}{\lambda_i-\mu_j}+\sum_{j=1}^{r}\frac{t_j^2}{\lambda_i-\nu_j}+(a_{m+1}-\lambda_i)\right\}\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{u_j^2}{\lambda_i-\nu_j}+\sum_{j=1}^{r}\frac{v_j^2}{\lambda_i-\gamma_j}+(a_{m+r+2}-\lambda_i)\right\} \\ &\qquad -\left\{\sum_{j=1}^{r}\frac{t_ju_j}{\lambda_i-\nu_j}\right\}^2=0, \qquad i=1,\dots,N. \end{aligned} \tag{۲۴}$$

با اعمال بند ج لم ۱ برای ماتریس ژاکوبی B داریم:

$$z_{ri}=\frac{\det(\nu_iI-B_r)}{\prod_{j=m+2}^{m+r}b_j}z_{1i}, \quad i=1,\dots,r. \tag{۲۵}$$

از طرفی بنا بر (۷) داریم:

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2025-12-13]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.11.6]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.671]

$$z_{ri}^2=\frac{\det(\nu_i I-B_r)}{\prod_{j=1,\, j\neq i}^{r}(\nu_i-\nu_j)},\quad i=1,\dots,r. \tag{۲۶}$$

روابط (۲۵) و (۲۶) نتیجه می‌دهند که

$$z_{1i}z_{ri}=\frac{\prod_{j=m+2}^{m+r} b_j}{\prod_{j=1,\, j\neq i}^{r}(\nu_i-\nu_j)},\quad i=1,\dots,r, \tag{۲۷}$$

از روابط (۲۰) و (۲۷) نتیجه می‌شود:

$$t_i u_i=\frac{\beta}{\Lambda_i},\quad i=1,\dots,r. \tag{۲۸}$$

که در آن $\Lambda_i=\prod_{j=1,\, j\neq i}^{r}(\nu_i-\nu_j)$ و $\beta=\prod_{j=m+1}^{m+r+1} b_j$. با به‌کار بردن فرمول اثر برای ماتریس‌های J و $J_{m+1,m+r+2}$ به دست می‌آوریم:

$$a_{m+1}+a_{m+r+2}=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i-\sum_{i=1}^{N-2}\hat{\mu}_i, \tag{۲۹}$$

معادلات (۲۴)، (۲۸) و (۲۹) دستگاه معادلات (۲۱) را نتیجه می‌دهند.

کفایت. فرض کنید $\{s_j\}_{j=1}^{m}$، $\{t_j\}_{j=1}^{r}$، $\{u_j\}_{j=1}^{r}$ و $\{v_j\}_{j=1}^{n}$ جواب دستگاه معادلات (۲۱) باشند. با توجه به این‌که بردارهای $\mathbf{y}_m$ ، $\mathbf{z}_1$، $\mathbf{z}_r$ و $\mathbf{q}_1$ یکه است، معادلات (۲۰) نتیجه می‌دهند:

$$b_m^2=\sum_{j=1}^{m}s_j^2,\quad b_{m+1}^2=\sum_{j=1}^{r}t_j^2,\quad b_{m+r+1}^2=\sum_{j=1}^{r}u_j^2,\quad b_{m+r+2}^2=\sum_{j=1}^{n}v_j^2. \tag{۳۰}$$

با استفاده دوباره از معادلات (۲۰) به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y_{m,j}=\dfrac{s_j}{b_m},\ \ j=1,\dots,m,\quad q_{1,k}=\dfrac{v_k}{b_{m+r+2}},\ \ k=1,\dots,n,\\[2ex] z_{1,i}=\dfrac{t_i}{b_{m+1}},\quad z_{r,i}=\dfrac{u_i}{b_{m+r+1}},\quad i=1,\dots,r. \end{cases} \tag{۳۱}$$

با داشتن $\{y_{m,j}\}_{j=1}^{m}$ ، $\{z_{1,i}\}_{i=1}^{r}$ و $\{q_{1,k}\}_{k=1}^{n}$ می‌توان با استفاده از الگوریتم لانکسوز [۱] ماتریس‌های ژاکوبی معین مثبت A، B و C را بازسازی کرد. هم‌چنین دو درایهٔ a_{m+1} و a_{m+r+2} از ماتریس J جواب دستگاه معادلات (۲۱) است. بدین‌ترتیب ماتریس J به شکل (۹) بازسازی می‌شود و مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس جواب دارد.

می‌توان با الگوریتم زیر ماتریس ژاکوبی J را بازسازی کرد:

الگوریتم ۱.

گام ۱. دستگاه معادلات (۲۱) را حل کرده و مقادیر $\{s_j\}_{j=1}^{m}$، $\{t_j\}_{j=1}^{r}$، $\{u_j\}_{j=1}^{r}$، $\{v_j\}_{j=1}^{n}$ ، a_{m+1} و a_{m+r+2} را به‌دست آورید.

گام ۲. از روابط (۳۰) مقادیر b_m، b_{m+1}، b_{m+r+1} و b_{m+r+2} را محاسبه کنید.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2025-12-13]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.11.6]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.671]

گام ۳. از روابط (۳۱) مقادیر $\{y_{m,j}\}_{j=1}^{m}$، $\{q_{1,j}\}_{j=1}^{n}$، $\{z_{1,j}\}_{j=1}^{r}$ و $\{z_{r,j}\}_{j=1}^{r}$ را محاسبه کنید.

گام ۴. به‌کمک الگوریتم لانکسوز [۱] ماتریس‌های A، B و C را بازسازی کنید.

به‌ازای $r=0$ و مقادیر دلخواه m و n می‌توان قضیهٔ ۳ را برای وجود جواب مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس بیان کرد:

قضیهٔ ۳. فرض کنید $r=0$، $P(\lambda)=\prod_{i=1}^{N}(\lambda-\lambda_i)$، $Q(\lambda)=\prod_{i=1}^{m}(\lambda-\mu_i)$، $R(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\gamma_i)$ و داده‌های طیفی $\{\lambda_i\}_{i=1}^{N}$ و $\{\hat{\mu}_j\}_{j=1}^{N-2}$ متمایز و در شرایط قضیهٔ ۱ صدق می‌کنند. آن‌گاه مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس دارای جواب است اگر و تنها اگر چندجمله‌ای

$$F(\lambda)=P(\lambda)+\beta^2Q(\lambda)R(\lambda),$$

دارای $m+1$ ریشهٔ متمایز $\{\gamma_i^*\}_{i=1}^{m+1}$ باشد که در شرایط (۱۵) و (۱۶) صدق می‌کنند.

اثبات. لزوم. فرض کنید ماتریس ژاکوبی J جواب مسئله با داده‌های طیفی (۸) باشد. بنابراین ماتریس ژاکوبی P با مقادیر ویژهٔ $\{\gamma_i^*\}_{i=1}^{m+1}$ وجود دارد به‌طوری‌که γ_i^*ها در شرایط (۱۵) و (۱۶) صدق می‌کنند. ثابت می‌کنیم $\{\gamma_i^*\}_{i=1}^{m+1}$ ریشه‌های چندجمله‌ای $F(\lambda)$ می‌باشند. طبق لم ۱ داریم:

$$x_{m+1}=\frac{\prod_{i=1}^{m}(\lambda-\mu_i)}{\prod_{i=1}^{m}b_i}x_1,\quad x_{m+2}=\frac{\prod_{i=1}^{m+1}(\lambda-\gamma_i^*)}{\prod_{i=1}^{m+1}b_i}x_1. \tag{۳۲}$$

با جای‌گذاری مقادیر (۳۲) در معادلهٔ دوم دستگاه معادلات (۲۳) به‌دست می‌آوریم:

$$\beta^2\prod_{j=1}^{m}(\lambda-\mu_j)+[\sum_{j=1}^{n}\frac{v_j^2}{(\lambda-\gamma_j)}+a_{m+2}-\lambda]\prod_{j=1}^{m+1}(\lambda-\gamma_j^*)=0,\quad \forall\lambda=\lambda_i,\ i=1,\dots,N. \tag{۳۳}$$

طرف اول در معادلهٔ (۳۳) یک کسر گویا با درجهٔ صورت و مخرج به‌ترتیب N و n است که $\{\lambda_i\}_{i=1}^{N}$ و $\{\gamma_i\}_{i=1}^{n}$ به‌ترتیب صفرها و قطب‌های سادهٔ آن هستند، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\beta^2\prod_{j=1}^{m}(\lambda-\mu_j)+[\sum_{j=1}^{n}\frac{v_j^2}{(\lambda-\gamma_j)}+a_{m+2}-\lambda]\prod_{j=1}^{m+1}(\lambda-\gamma_j^*)=-\frac{P(\lambda)}{R(\lambda)}. \tag{۳۴}$$

با محاسبهٔ حد دو طرف معادلهٔ (۳۴) به‌ازای $\lambda\to\gamma_j^*$ داریم:

$$P(\gamma_j^*)+\beta^2Q(\gamma_j^*)R(\gamma_j^*)=0,\quad j=1,\dots,m+1,$$

بنابراین چندجمله‌ای $F(\lambda)$ دارای $m+1$ ریشه است که در شرایط (۱۵) و (۱۶) صدق می‌کنند.

کفایت. حال فرض کنید چندجمله‌ای $F(\lambda)$ دارای $m+1$ ریشهٔ متمایز $\{\gamma_i^*\}_{i=1}^{m+1}$ باشد که در شرایط (۱۵) و (۱۶) صدق می‌کنند؛ ثابت می‌کنیم مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس دارای جواب است. فرض کنید:

$$\varphi(\lambda)=\det(\lambda I-P)=\prod_{i=1}^{m+1}(\lambda-\gamma_i^*),$$

با ضرب دو طرف معادلهٔ (۳۳) در $(\lambda-\gamma_j)$ و سپس محاسبهٔ حد دو طرف به‌ازای $\lambda\to\gamma_j$ به‌دست می‌آوریم:

$$v_j^2=-\frac{P(\gamma_j)}{R'(\gamma_j)\varphi(\gamma_j)},\quad j=1,\dots,n. \tag{۳۵}$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2025-12-13]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.11.6]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.671]

با جای‌گذاری مقادیر (۳۲) در معادلهٔ اول دستگاه معادلات (۲۳) به‌دست می‌آوریم:

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{s_j^2}{\lambda-\mu_j}+a_{m+1}-\lambda=-\frac{\varphi(\lambda)}{Q(\lambda)}.$$

با ضرب دو طرف معادلهٔ فوق در $(\lambda-\mu_j)$ و سپس محاسبهٔ حد دو طرف به‌ازای $\lambda\to\mu_j$ به‌دست می‌آوریم:

$$s_j^2=-\frac{\varphi(\mu_j)}{Q'(\mu_j)},\ \ j=1,\dots,m. \qquad (۳۶)$$

با توجه به تو در تو بودن طیف‌ها عبارت طرف راست در روابط (۳۵) و (۳۶) مثبت است. با معلوم بودن مقادیر s_j و v_j مشابه قضیهٔ ۲ ماتریس‌های ژاکوبی A و C بازسازی می‌شوند (در حالت $r=0$ ماتریس B را نداریم). با به‌کار بردن فرمول اثر برای ماتریس‌های J و J_{m+2} و ماتریس‌های J_{m+2}، $J_{m+1,m+2}$ داریم:

$$a_{m+2}=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i-\sum_{i=1}^{m+1}\gamma_i^*-\sum_{i=1}^{n}\gamma_i,\quad a_{m+1}=\sum_{i=1}^{m+1}\gamma_i^*-\sum_{i=1}^{m}\mu_i.$$

هم‌چنین با توجه به داده‌های طیفی داریم:

$$b_{m+1}=\beta. \qquad (۳۷)$$

بنابراین ماتریس ژاکوبی J بازسازی می‌شود و مسئله دارای جواب است.

در حالت $r=0$ می‌توان با الگوریتم زیر ماتریس ژاکوبی J را بازسازی کرد:

الگوریتم ۲.

گام ۱. ریشه‌های چندجمله‌ای $F(\lambda)$ را محاسبه کرده و $m+1$ ریشهٔ متمایز $\{\gamma_i^*\}_{i=1}^{m+1}$ که در شرایط (۱۵) و (۱۶) صدق می‌کنند را انتخاب کنید.

گام ۲. از روابط (۳۵) و (۳۶) مقادیر $\{s_j\}_{j=1}^{m}$ و $\{v_j\}_{j=1}^{n}$، را محاسبه کنید.

گام ۳. از روابط (۳۰) b_m و b_{m+2} و از (۳۷) مقدار b_{m+1} را محاسبه کنید.

گام ۴. به‌کمک الگوریتم لانکسوز [۱] ماتریس‌های A و C را بازسازی کنید.

در این مقاله، به‌ازای مقادیر دیگر r دستگاه معادلات (۲۱) به‌روش نیوتن حل شده است.

با داشتن ماتریس ژاکوبی J می‌توان سیستم جرم-فنر متناظر را به‌کمک الگوریتم موجود در [۱] بازسازی کرد. در مثال‌های عددی بخش ۴ این کار انجام شده است.

نتایج عددی

در این بخش با ارائهٔ چند مثال عددی، الگوریتم بخش قبل را برای بازسازی ماتریس ژاکوبی و سیستم جرم-فنر متناظر بکار می‌بریم.

مثال ۱. فرض کنید داده‌های طیفی مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس بدین‌صورت باشند:

$$\{\lambda_i\}_{i=1}^{8}=\{2 \qquad\qquad 37\}$$

$$\{\mu_i\}_{i=1}^{2}=\{61,\ 183\},\quad \{\mu_i\}_{i=1}^{2}=\{62,\ 185\},\quad \{\gamma_i\}_{i=1}^{6}=\{25,\ 163\},$$

$$\beta=-232366.$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2025-12-13]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.11.6]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.671]

طبق داده‌های مسئلهٔ $N=8$ و $m=r=n=2$. واضح است که داده‌های طیفی در شرایط قضیهٔ ۱ صدق می‌کنند. ماتریس ژاکوبی متناظر طبق الگوریتم ۱بدین‌صورت به‌دست می‌آید:

$$J=\begin{bmatrix} 147.7449 & -55.3010 & & & & & & \\ -55.3010 & 96.2551 & -86.8734 & & & & & \\ & -86.8734 & 105.0000 & -0.0842 & & & & \\ & & -0.0842 & 91.6298 & -52.5979 & & & \\ & & & -52.5979 & 155.3702 & -52.3758 & & \\ & & & & -52.3758 & 136.0000 & -66.8414 & \\ & & & & & -66.8414 & 151.7718 & -37.7282 \\ & & & & & & -37.7282 & 36.2282 \end{bmatrix}$$

سختی‌های فنر و جرم‌های سیستم جرم-فنر متناظر بدین‌صورت است:

$$\{m_i\}=M\{0.1211,\ 0.1174,\ 0.1244,\ 0.1261,\ 0.1285,\ 0.1342,\ 0.1295,\ 0.1186\},$$
$$\{k_i\}=M\{7.2064\quad 7.2712\quad 7.3550\quad 7.3748\quad 7.8195\quad 8.4382\quad 8.0179\ 7.8070\},$$

که در آن M جرم کل سیستم است. محاسبهٔ طیف ماتریس J درستی نتایج را تأیید می‌کند.

مثال ۲. فرض کنید داده‌های طیفی مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس بدین‌صورت داده شده است:

$$\{\lambda_i\}_{i=1}^{15}=\{1.3229$$
$$352.3597 \qquad .9471 \qquad 8,$$
$$32.4185\},$$

$$\{\mu_i\}_{i=1}^{7}=\{36.1155 \qquad 509$$
$$\},$$

$$\{\gamma_i\}_{i=1}^{6}=\{11.1602 \qquad 416 \qquad \},$$

$$\beta=-234.7826.$$

ماتریس ژاکوبی متناظر را بازسازی می‌کنیم. طبق داده‌های مسئله $N=15$، $r=0$، $m=7$ و $n=6$. واضح است که داده‌های طیفی در شرایط قضیهٔ ۱ صدق می‌کنند. ریشه‌های چندجمله‌ای $F(\lambda)$ که در شرایط (۱۵) و (۱۶) صدق می‌کنند، بدین‌صورت است:

$$\{\gamma_i^*\}_{i=1}^{8}=\{28.5760,\ \underline{87.3925,\ 110.9031},\ \underline{232.1002,\ 237.0352},\ \underline{391.7558,\ 417.2856},$$
$$\underline{556.3976,\ 610.9288},\ 711.0871,\ \underline{779.5367,\ 837.1224},\ 919.2890\}.$$

ریشه‌های چندجمله‌ای در شرایط قضیهٔ ۳ صدق می‌کنند. هم‌چنین به پنج تا از γ_i^*ها دو انتخاب ممکن وجود دارد (زیر آن‌ها خط کشیده شده است). بنابراین طبق قضیهٔ ۳، مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس متناظر با داده‌های مذکور دارای ۳۲ جواب است. با انتخاب

$$\{\gamma_i^*\}_{i=1}^{8}=\{28.5760 \qquad 58$$
$$779.5367, \qquad 890\},$$

ماتریس ژاکوبی با الگوریتم ۲ بدین‌صورت بازسازی می‌شود:

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2025-12-13]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.11.6]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.671]

$$\{a_i\}_{i=1}^{15} = \{493.6251 \quad 4153 \quad 445.2201, 441.5448 \quad 5862, 517.7157 \quad 440.1674, \quad 03462\},$$

$$\{b_i\}_{i=1}^{14} = -\{241.5326 \quad 4083 \quad 254.5736,\ 234.7826, \quad 1.3547 \quad 23, \quad 220.02733,\ 1 \quad .\ 2 \quad \}.$$

سیستم جرم و فنر متناظر بدین‌صورت است:

$$\{m_i\} = M\{0.0289 \quad 0.0540, \quad 72\},$$

$$\{k_i\} = M\{5.5821 \quad ,\ 1 \quad 21, \quad 219 \quad 6070, \quad \},$$

محاسبهٔ طیف ماتریس به‌دست آمده درستی نتایج را تأیید می‌کند.

مثال ۲. فرض کنید داده‌های طیفی مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس بدین‌صورت داده شده است:

$$\{\lambda_i\}_{i=1}^{12} = \{1.3144, 20.4457, 57.3293, 109.7336, 174.3673, 247.1681,\ 323.5590, \quad 70, 571.6528, 600.0172\},$$

$$\{\mu_i\}_{i=1}^{3} = \{90.6098, 309.4149, 528.1275\}, \quad \{\nu_i\}_{i=1}^{3} = \{89.1772, 304.4952, 519.7683\},$$

$$\{\gamma_i\}_{i=1}^{4} = \{15.4396, 148.5976, 352.4692, 531.7168\}, \quad \beta = 537477120.$$

می‌خواهیم ماتریس ژاکوبی متناظر را بازسازی کنیم. طبق داده‌های مسئلهٔ $N=12$، $r=3$ ، $m=3$ و $n=4$. واضح است که داده‌های طیفی در شرایط قضیهٔ ۱ صدق می‌کنند. با حل دستگاه معادلات (۲۱) به‌روش نیوتن به‌دست می‌آوریم:

$$\{s_j\} = \{77.1493 \quad \} \qquad \{t_j\} = \{ \quad .2791 \quad \}$$

$$\{u_j\} = \{75.9992 \quad - \quad \} \qquad a_{m+1} = \quad .5627, \qquad a_{m+r+2} = 302.76,$$

$$\{v_j\} = \{33.2458 \quad \}$$

از روابط (۳۰) و (۳۱) به‌دست می‌آوریم:

$$b_3 = -153.6001, \quad b_4 = - \qquad b_7 = - \qquad b_8 = -$$

$$\{y_{3,j}\} = \{0.502274, 0.708897, 0.495163\},$$

$$\{z_{1,j}\} = \{0.498557, 0.706006, 0.502988\},$$

$$\{z_{3,j}\} = \{0.501383, -0.708192, 0.497070\},$$

$$\{q_{1,j}\} = \{0.219879, 0.576151, 0.657709, 0.432576\}.$$

ماتریس ژاکوبی J طبق الگوریتم ۱ بدین‌صورت بازسازی می‌شود:

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2025-12-13]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.11.6]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.671]

$$\{a_i\}_{i=1}^{12} = \{311.0059, 309.3061, 307.8401, 306.5627, 305.4393, 304.4445,$$
$$303.5569, 302.7600, 302.0407, 301.3883, 300.7939, 144.0003\},$$
$$\{b_i\}_{i=1}^{11} = -\{155.0769, 154.2858, 153.6001, 152.9998, 152.4705, 152.0001,$$
$$151.5791, 151.2000, 150.8571, 150.5455, 150.2609\}.$$

سیستم جرم- فنر متناظر بدین‌صورت است:

$$\{m_i\} = M\{\ 0.0398$$
$$\}$$
$$\{k_i\} = M\{5.7259 \quad 9.7918 \quad 1 \quad 8 \quad 1$$
$$13.5530 \quad 92 \quad \}.$$

نتیجه‌گیری

در این مقاله، الگوریتمی برای بازسازی ماتریس ژاکوبی با استفاده از دو طیف و یک دادهٔ اضافی بررسی شد. جزئیات روش بازسازی و داده‌های طیفی مورد نیاز برای حالتی که دو سطر و ستون از ماتریس ژاکوبی حذف می‌شوند، ارائه شد. این مسئله را می‌توان برای حالتی که تعداد بیش‌تری از سطرها و ستون‌های ماتریس ژاکوبی حذف می‌شوند، نیز توسیع داد. هم‌چنین می‌توان دربارهٔ امکان توسیع الگوریتم مقاله، به مسئلهٔ مقدار ویژهٔ $JX = \lambda MX$ که در گسسته‌سازی میلهٔ مرتعش غیریکنواخت با روش عناصر محدود ظاهر می‌شود؛ بررسی کرد.

منابع

1. Gladwell G. M. L., "Inverse problem in vibration", New York: Kluwer academic publishers (2004).
2. Singh K. V., "The transcendental eigenvalue problem and its application in system identification, Department of mechanical engineering", Phd thesis, Louisiana State University (2003).
3. Hochstadt H., "On some inverse problems in matrix theory", Archiv der Mathematik, 18 (2) (1967) 201-207.
4. Hochstadt H., "On the reconstruction of a Jacobi matrix from spectral data", Linear Alegbra and its Applications, 68 (8) (1947) 435-446.
5. Hald O. H., "Inverse eigenvalue problems for Jacobi matrices", Linear Alegbra and its Applications, 14 (1) (1976) 63-85.
6. Gladwell G. M. L., Willms N. B., "The reconstruction of a tridiagonal system from its frequency response at an interior point ", Inverse Problems, 4 (87) (1988) 1018-1024.
7. Gladwell G. M. L., "Minimal mass solutions to inverse eigenvalue problem"s, Inverse problems, 22 (2) (2006) 539-551.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2025-12-13]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.11.6]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.671]

8. Porter B., "Synthesis of lumped-parameter vibrating systems by an inverse Holzer technique", Journal of Mechanical Engineering Science, 12(1) (1970) 17-19.
9. Porter B., "Synthesis of lumped-parameter vibrating systems using transfer matrices", International Journal of Mechanical Sciences, 13 (1) (1971) 29-34.
10. Gladwell G. M. L., "The inverse mode problem for lumped-mass systems", Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 39 (2) (1986) 297-307.
11. Gladwell G. M. L., "Inverse finite element vibration problems", Journal of Sound and Vibration, 211 (2) (1999) 309-324.
12. Ghanbari K., "M-functions and inverse generalized eigenvalue problem", Inverse problems, 17 (2001) 211-217.
13. Ghanbari K., Parvizpour F., Mirzaei H., "Constructing Jacobi matrices using prescribed mixed eigendata", Linear and Multilinear Algebra, 62 (6) (2014) 721-734.
14. Aydin A., Guseinov G.sh., "Inverse spectral problem for finite Jacobi matrices with zero diagonal", Linear and Multilinear Algebra, 23 (8) (2015) 1267-1282.
15. Wei Y., "Inverse eigenvalue problem of Jacobi matrix with mixed data", Linear Alegbra and its Applications, 466 (1) (2015) 102-116.
16. Peng Z. Y., Han X. L., "Constructing Jacobi matrices with prescribed ordered defective eigenpairs and a principal submatrix", Journal of Computational and Applied Mathematics, 175 (2) (2005) 321-333.
17. Bai Y., Wei G., "A new inverse three spectral theorem for Jacobi matrices", Linear Alegbra and its Applications, 493 (1) (2016) 301-312.
18. Nazari A. M., Mahdinasab F., "Inverse eigenvalue problem of distance matrix via orthogonal matrix", Linear Alegbra and its Applications, 450 (1) (2014) 202-216.
19. Nazari A. M., Kamali Maher S., "On the nonnegative inverse eigenvalue problem of traditional matrices", Journal of Linear and Topological Algebra, 2 (3) (2013) 161-167.
20. Nazari A. M., Afshari E., "On the construction of symmetric nonnegative matrix with prescribed Ritz values", Journal of Linear and Topological Algebra 3 (2) (2014) 61-65.
21. Mirzaei H., "Inverse eigenvalue problem for pseudo-symmetric jacobi matrices with two spectra", Linear and Multilinear Algebra, 66 (4) (2018) 759-768.
22. Bebiano N., Fonseca C. M., Providencia J., "An inverse eigenvalue problem for periodic Jacobi matrices in Minkowski spaces", Linear Alegbra and its Applications, 435 (1) (2011) 2033-2045.
23. Bebiano N., Providencia J., "Inverse eigenvalue problems for pseudo-Jacobi matrices: existence and uniqueness", Inverse Problem, 27 (2011) 1-12.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2025-12-13]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.11.6]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.671]