

خواصی از عملگرهای b -ضعیف فشرده روی شبکه‌های باناخ

کاظم حق‌نژاد آذر^{*}، اکبر بهرام‌نژاد

دانشگاه محقق اردبیلی، دانشکده علوم، گروه ریاضیات و کاربردها

دریافت: ۹۷/۰۷/۲۲

پذیرش: ۹۷/۱۱/۲۸

چکیده

در این مقاله شرط لازم و کافی برای این‌که شبکه باناخ E ، KB -فضا باشد ارائه و بعضی از خواص عملگرهای b -ضعیف فشرده از شبکه باناخ E به فضای باناخ X را بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم هر عملگر فشرده ضعیف ترتیبی از شبکه باناخ E به فضای باناخ X b -ضعیف فشرده است و با آوردن یک مثال، عکس آن را نقض می‌کنیم. همچنین ثابت می‌کنیم که تحت شرایطی عکس آن برقرار است.

واژه‌های کلیدی: شبکه باناخ، KB -فضا، عملگر b -ضعیف فشرده.

رده‌بندی ریاضی: ۴۶B۴۲ و ۴۶A۴۰

مقدمه

آلپای^۱ و همکارانش در [۲] رده جدیدی از عملگرها را به نام عملگرهای b -ضعیف فشرده^۲ مطرح کردند. آنها در این مقاله نشان دادند که عملگرهای b -ضعیف فشرده، متمایز از عملگرهای شناخته شده دیگر هستند. بعداً آلپای و ارکان^۳ در [۳] و آلتین^۴ در [۴] درباره خواص عملگرهای b -ضعیف فشرده تحقیقاتی انجام دادند و رابطه عملگرهای b -ضعیف فشرده را با رده‌های دیگری از عملگرهای شناخته شده مانند عملگرهای ضعیف فشرده و نیم-فشرده^۵ و غیره بررسی کردند. اکزوز^۶ و همکارانش در [۵] نشان دادند که دوگان یک عملگر b -ضعیف فشرده در حالت کلی یک عملگر b -ضعیف فشرده نیست ولی تحت شرایطی لازم و کافی امکان‌پذیر است.

در این مقاله روی خواص عملگرهای ضعیف فشرده و b -ضعیف فشرده بررسی و تحقیق می‌کنیم. نشان می‌دهیم که در حالت کلی عملگر b -ضعیف فشرده، ضعیف فشرده نیست ولی تحت شرایطی روی شبکه‌های باناخ، هر عملگر b -ضعیف فشرده، می‌تواند ضعیف فشرده باشد. همچنین رابطه عملگرهای b -ضعیف فشرده را با عملگرهای فشرده

^{*}نویسنده مسئول haghnejad@uma.ac.ir

1. Alpay
2. b-weakly compact
3. Ercan
4. Altin
5. Semi-compact
6. Aqzzouz

ضعیف ترتیبی^۱ بررسی کرده و نشان می‌دهیم که اگر شبکه باناخ E دارای خاصیت b باشد، در این صورت هر عملگر فشرده^۲ ضعیف ترتیبی از E بتوی فضای باناخ مانند X ، b -ضعیف فشرده است.

در سرتا سر این مقاله، فضای ریس^۳ (مشبکه برداری) را با E نمایش می‌دهیم و فضای ریس را کامل دکنید^۴ می‌نامیم هرگاه هر زیرمجموعه^۵ ناتهی و از بالا کراندار آن دارای سوپریمم باشد.

تعریف ۱. در فضای ریس E دو عضو x و y را مجزا (عمود بر هم) گوییم هرگاه:

$$|x| \wedge |y| = 0$$

و می‌نویسیم $x \perp y$.

تعریف ۲. نرم $\|\cdot\|$ بر فضای ریس E را نرم مشبکه‌ای گوییم هرگاه برای هر $x, y \in E$ ، اگر $|x| \leq |y|$ آن‌گاه $\|x\| \leq \|y\|$. مشبکه^۵ برداری مجهز به این نرم را مشبکه^۶ برداری نرم‌دار می‌گوییم. اگر مشبکه^۶ برداری نرم‌دار E تام^۴ باشد، آن‌گاه آن را مشبکه باناخ می‌نامیم.

یادآوری می‌کنیم که دوگان جبری X^* از فضای برداری X شامل همه تابع‌های خطی روی X است. فرض کنید X و Y فضاهای برداری باشند. در این صورت الحاقی عملگر $T: X \rightarrow Y$ را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$T^*: Y^* \rightarrow X^*$$

$$(T^*f)(x) = f(Tx), \quad (f \in Y^*, \quad x \in X).$$

فرض کنیم (X, τ) یک فضای برداری توپولوژیک باشد. دوگان توپولوژیک X' از (X, τ) یک زیرفضای برداری از X^* شامل تمام تابع‌های خطی τ -پیوسته روی X است. دوگان توپولوژیک فضای نرم‌دار ریس E را با E' و دوگان دوم توپولوژیک E را با E'' نشان می‌دهیم. برای هر $f \in E'$ نرم $\|f\|$ را به صورت

$$\|f\| = \sup\{\|f(x)\|: \|x\| \leq 1\},$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت منظور ما از نرم E' ، $\|f\|$ برای هر $f \in E'$ است. اگر E یک مشبکه برداری باشد در این صورت E_+ را مجموعه تمام عضوهای مثبت E می‌گیریم، به عبارت بهتر $E_+ = \{x \geq 0: x \in E\}$.

تعریف ۳. مشبکه^۶ باناخ E را یک KB -فضا^۵ می‌نامیم هرگاه هر دنباله صعودی نرم کراندار در E_+ نرم همگرا باشد.

تعریف ۴. زیرفضای برداری A از فضای ریس E را ایده‌آل نامیم هرگاه به ازای هر $x, y \in E$ اگر $|x| \leq |y|$ و $y \in A$ آن‌گاه $x \in A$.

1. order weakly compact
2. Riesz space
3. Dedekind complete
4. complete
5. KB-space

تعریف ۵. در فضای ریس E تور $(x_\alpha)_\alpha$ را همگرای ترتیبی به x گوئیم، هرگاه تور^۱ دیگری مانند $(y_\alpha)_\alpha$ وجود داشته باشد به طوری که :

$$y_\alpha \downarrow 0, \quad \forall \alpha: |x_\alpha - x| \leq y_\alpha$$

در این صورت این همگرایی را به صورت $x_\alpha \xrightarrow{0} x$ نشان می‌دهیم. عبارت $y_\alpha \downarrow 0$ به این معنی است که $(y_\alpha)_\alpha$ دنباله‌ای نزولی است و $\inf(y_\alpha) = 0$.

تعریف ۶. زیرمجموعه A از فضای ریس E را بسته^۲ ترتیبی^۳ نامیم، هرگاه اگر $(x_\alpha) \subseteq A$ و $x_\alpha \xrightarrow{0} x$ آن‌گاه $x \in A$. هر ایده‌آل بسته^۴ ترتیبی را یک نوار^۳ می‌نامیم و نوار تولید شده به وسیله^۴ مجموعه^۴ A در فضای ریس E را با B_A نمایش می‌دهیم.

قضیه ۷. مشبک G باناخ E, KB - فضا است اگر و فقط اگر E نوری در E'' باشد.

اثبات. به قضیه ۴,۶۰ از منبع [۱] مراجعه شود

تعریف ۸. زیرمجموعه^۴ A از فضای ریس E را کراندار ترتیبی نامیم هرگاه y ای در E موجود باشد به طوری که به ازای هر $x \in A$ داشته باشیم $|x| \leq y$.

تعریف ۹. فرض کنیم E و F دو فضای ریس باشند. عملگر خطی $T: E \rightarrow F$ را:

$$T(x) \geq 0 \quad x \in E_+$$

(الف) مثبت گوئیم هرگاه به ازای هر $x \in E_+$ داشته باشیم $T(x) \geq 0$.

(ب) کراندار ترتیبی^۴ گوئیم هرگاه برای هر زیرمجموعه^۴ کراندار ترتیبی A از E ، $T(A)$ در F کراندار ترتیبی باشد. گردایه^۴ همه تابع‌های خطی کراندار ترتیبی بر فضای ریس E را با $E^\sim$ نشان می‌دهیم و آن را دوگان ترتیبی E می‌نامیم. با توجه به صفحه ۵۸ از [۱] فضای دوگان ترتیبی، $E^\sim$ یک فضای ریس است. دوگان ترتیبی $E^\sim$ را دوگان دوم ترتیبی فضای ریس E می‌گوئیم و با $E^{\sim\sim}$ نشان می‌دهیم به عبارت دیگر

$$E^{\sim\sim} := (E^\sim)^\sim.$$

تعاریف b - کراندار ترتیبی و خاصیت b برای یک فضای ریس را که در زیر آورده‌ایم، برای اولین بار به وسیله^۴ آلپای و همکارانش برای بررسی خواص عملگرهای b -ضعیف فشرده ارائه شدند، برای اطلاعات بیش‌تر به [۳] مراجعه شود.

تعریف ۱۰. فرض کنیم E یک فضای ریس باشد. در این صورت

(الف) $A \subseteq E$ را b -کراندار ترتیبی می‌نامیم هرگاه A در $E^{\sim\sim}$ کراندار ترتیبی باشد.

(ب) E دارای خاصیت b است هرگاه هر زیرمجموعه^۴ b -کراندار ترتیبی E در E کراندار ترتیبی باشد.

1. net
2. Order closed
3. Band
4. Order bounded

می‌توان نشان داد فضای ریس E دارای خاصیت b است اگر و تنها اگر برای هر $(x_\alpha)_\alpha \subseteq E$ و x در E'' که $0 \leq x_\alpha \uparrow x$ ، تور (x_α) در E کراندار ترتیبی باشد. رفت این قضیه واضح است، برای قسمت برگشت، فرض کنیم که $A \subseteq E$ ، b -کراندار ترتیبی باشد. در این صورت $x'' \in E_+''$ موجود است که برای هر $x \in A$ داریم $|x| \leq x''$. بازه $[0, x'']$ را به صورت توری مانند $(x''_\alpha)_{\alpha \in I}$ در نظر می‌گیریم که در این جا $I = [0, x'']$ و برای هر $\alpha \in I$ قرار می‌دهیم $x''_\alpha = \alpha$. در این صورت $0 \leq x''_\alpha \uparrow x''$. حال اگر قرار دهیم $B = \{x \in A : x \leq x''_\alpha\}$ ، آن گاه B یک زیرتوری مانند $(x_\beta)_{\beta \in J}$ از $(x''_\alpha)_{\alpha \in I}$ است که $0 \leq x_\beta \uparrow x''$. در این صورت بنا به فرض $z \in E$ موجود است که $0 \leq x_\beta \uparrow z$ و بنا براین A کراندار ترتیبی است.

تعریف ۱۱. فرض کنیم E یک شبکه باناخ با نرم $\|\cdot\|$ باشد. دراین صورت نرم $\|\cdot\|$ بر شبکه باناخ E را پیوسته ترتیبی گوئیم هرگاه اگر $x_\alpha \downarrow 0$ آن گاه $\|x_\alpha\| \rightarrow 0$.

قضیه ۱۲. برای شبکه باناخ E احکام زیر هم‌ارزند.

۱. E دارای نرم پیوسته ترتیبی است.

۲. E یک ایده‌آل در E'' است.

۳. هر بازه مرتب E فشرده ضعیف است.

اثبات. برای اثبات به قضیه ۴،۹ از منبع [۱] مراجعه شود.

قضیه ۱۳. شرط لازم و کافی برای این که شبکه باناخ E یک KB -فضا باشد آن است که E دارای خاصیت b و نرم پیوسته ترتیبی باشد.

اثبات. فرض کنیم E یک KB -فضا باشد. در این صورت با توجه به توضیحات صفحه ۲۳۲ از [۱] شبکه باناخ E دارای نرم پیوسته ترتیبی است. حال نشان می‌دهیم E دارای خاصیت b نیز هست. فرض کنیم $(x_\alpha) \subseteq E$ و x'' ای در E'' وجود داشته باشد که $0 \leq x_\alpha \uparrow x''$. بنابراین $0 \leq x_\alpha \uparrow x'' < +\infty$ و چون E یک KB -فضا است، در نتیجه $x \in E$ موجود است که $\|x_\alpha - x\| \rightarrow 0$. در این صورت بنا به قضیه ۳،۴۶ از [۱] داریم $0 \leq x_\alpha \uparrow x$ و بنابراین حکم برقرار است.

برعکس، با توجه به قضیه ۷ کافی است نشان دهیم E نواری در $E'' = E^{\sim\sim}$ است. از این که E دارای نرم پیوسته ترتیبی است بنا بر قضیه ۱۲، E ایده‌آلی در E'' است. حال فرض می‌کنیم (x_α) یک تور در E باشد به طوری که به‌ازای x'' ای در E'' شرط $0 \leq x_\alpha \uparrow x''$ برقرار باشد. کافی است بنا به لم ۱،۳۷ از [۱] نشان دهیم که $x'' \in E$ از آن جاکه بنا به فرض E دارای خاصیت b است، پس $z \in E$ ای با شرط $0 \leq x_\alpha \leq z$ برای هر α برقرار است. چون با توجه به نتیجه ۴،۱۰ از [۱]، E یک فضای کاملاً ددکنید است در این صورت $x = \sup x_\alpha$ وجود دارد و بنا براین

$x \in E$ از این رو، $x = x''$ ، و بنابراین E نواری در E'' است.

بخش اصلی

تعریف ۱۴. فرض کنیم E یک مشبکه باناخ و X یک فضای باناخ باشد. عملگر $T: E \rightarrow X$ را b -ضعیف فشرده می‌نامیم هرگاه T ، هر زیرمجموعه b -کراندار ترتیبی از E را به زیرمجموعه فشرده نسبی ضعیف از X ببرد. مجموعه همه عملگرهای فشرده ضعیف از E به توی X را با $W(E, X)$ و مجموعه همه عملگرهای b -ضعیف فشرده را با $W_b(E, X)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۵. فرض کنیم E یک فضای ریس باشد. در این صورت E یک KB -فضا است اگر و فقط اگر عملگر همانی $I: E \rightarrow E$ عملگری b -ضعیف فشرده باشد.

اثبات. فرض کنیم E یک KB -فضا و A یک دنباله b -کراندار ترتیبی از E باشد. بنا بر قضیه ۱۳ هر KB -فضا دارای خاصیت b است پس E دارای خاصیت b است. از این‌رو، A یک زیرمجموعه کراندار ترتیبی E است. بنابراین $x \in E_+$ وجود دارد به‌طوری‌که $A \subset [-x, x]$. از طرفی بنا بر قضیه ۱۲ مجموعه $[-x, x]$ فشرده ضعیف است. چون $[-x, x]$ گوی یکه بسته است پس A زیرمجموعه نسبی فشرده ضعیف است. از آن‌جاکه I عملگر همانی است در نتیجه I, b -ضعیف فشرده است.

برعکس، فرض کنیم $I: E \rightarrow E$ ، b -ضعیف فشرده و (x_n) یک دنباله صعودی و نرم کراندار در E_+ باشد. نشان می‌دهیم (x_n) همگرا است. نگاشت $\hat{x}: E'_+ \rightarrow R$ را برای هر $f \in E'_+$ به‌صورت $\hat{x}(f) = \lim_n f(x_n)$ تعریف می‌کنیم. $\hat{x}$ روی E'_+ جمعی است زیرا:

$$\begin{aligned}\hat{x}(f+g) &= \lim_n (f+g)(x_n) = \lim_n (f(x_n) + g(x_n)) \\ &= \lim_n (f(x_n)) + \lim_n (g(x_n)) = \hat{x}(f) + \hat{x}(g)\end{aligned}$$

از این‌رو، بنابه قضیه ۱، ۱۰ از [۱] به یک عنصر E'' قابل توسیع است که آن را دوباره با $\hat{x}$ نشان می‌دهیم. در E'' برای هر n داریم: $0 \leq x_n \leq \hat{x}$. بنابراین (x_n) زیرمجموعه b -کراندار ترتیبی از E است. حال چون I, b -ضعیف فشرده است پس $(I(x_n))$ نسبت به نرم همگرا است از این‌رو، (x_n) همگرا است. و حکم ثابت می‌شود.

گزاره ۱۶. فرض کنیم E مشبکه باناخ باشد. در این صورت گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

۱. E یک KB -فضاست.

۲. برای هر فضای باناخ F داریم: $L(E, F) = W_b(E, F)$.

اثبات (۱→۲). فرض کنیم E یک KB -فضا باشد و فرض کنیم F یک فضای باناخ و T عملگری پیوسته از E بتوی F و A یک زیرمجموعه b -کراندار ترتیبی از E باشد. بنا بر قضیه ۱۳ هر KB -فضا دارای خاصیت b است، پس A در E کراندار ترتیبی است. از این‌رو، عنصر مثبتی مانند x در E وجود دارد که $A \subseteq [-x, x]$. چون E دارای نرم پیوسته ترتیبی است (بنا به قضیه ۱۳ هر KB -فضا دارای نرم پیوسته ترتیبی است)، بنا بر قضیه ۱۲ بازه مرتب $[-x, x]$ یک

زیرمجموعه نسبی فشرده ضعیف است. از طرفی، $\bar{A}^w \subseteq [-x, x]$ و چون $\bar{A}^w$ بسته ضعیف و $[-x, x]$ فشرده ضعیف است از این رو، $\bar{A}^w$ فشرده ضعیف است. از این که عملگر T پیوسته است نتیجه می‌شود که $T(\bar{A}^w)$ فشرده ضعیف است. حال چون $\bar{T(A)}^w \subseteq T(\bar{A}^w)$ لذا $\bar{T(A)}^w$ فشرده ضعیف است پس T, b -ضعیف فشرده است یعنی

$$L(E, F) \subseteq W_b(E, F).$$

از طرفی بدیهی است که $W_b(E, F) \subseteq L(E, F)$ بنابراین حکم ثابت می‌شود.

۱ → ۲. فرض کنیم برای هر فضای باناخ $F, L(E, F) = W_b(E, F)$. در این صورت عملگر همانی $I: E \rightarrow E$ ، b -ضعیف فشرده است. بنابراین از قضیه ۱۵، نتیجه می‌شود که E یک KB -فضا است.

قضیه ۱۷. فرض کنیم $T: E \rightarrow X$ یک عملگر پیوسته از مشبکه باناخ E به فضای باناخ X باشد. در این صورت عملگر T, b -ضعیف فشرده است اگر و فقط اگر به ازای هر دنباله b -کراندار ترتیبی مجزا مانند (x_n) در E_+ داشته باشیم:

$$\lim_n \|T(x_n)\| = 0.$$

اثبات. برای اثبات به گزاره ۱ از منبع [۴] مراجعه شود.

گزاره ۱۸. فرض کنیم $T: E \rightarrow F$ یک عملگر کراندار ترتیبی از مشبکه باناخ E بتوی مشبکه باناخ کامل ددکنید F باشد. اگر c_0 در F نشانه نشود، آن گاه $L(E, F) = W_b(E, F)$.

اثبات. با توجه به این که $T = T^+ - T^-$ ، بدون این که به کلیت خللی وارد شود T را مثبت می‌گیریم. حال چون T مثبت است بنا به قضیه ۳، ۴ از [۱] عملگر T پیوسته است. بنا به قضیه ۱۷ کافی است نشان دهیم به ازای هر دنباله b -کراندار ترتیبی مجزا مانند (x_n) در E_+ ، $\lim_n \|T(x_n)\| = 0$. فرض کنیم (x_n) یک دنباله مجزا در E_+ باشد که در رابطه با آن x ای در E'' وجود دارد به طوری که به ازای هر n ، $0 \leq x_n \leq x$. در این صورت بنابر قضیه ۳، ۱ از [۱] داریم $\sum_{n=1}^k x_n = \sum_{n=1}^k x_n$ و بنابراین به ازای هر $x' \in E'$ مثبت و هر k داریم $x'(\sum_{n=1}^k x_n) = x'(\sum_{n=1}^k x_n) \leq x'(x)$. از این رو به ازای هر $x' \in E'$ ، $\sum_{n=1}^\infty x'(x_n) < \infty$. در این صورت به ازای هر $x' \in F'$ داریم $\sum_{n=1}^\infty x'(Tx_n) = \sum_{n=1}^\infty x'(Tx_n)$ و با توجه به این که دنباله $(S_m = \sum_{n=1}^m Tx_n)_m$ کراندار ضعیف است، بنا به قضیه ۵، ۵، ۲ از [۷] کراندار نرمی است. از آن جاکه c_0 در F نشانه نمی‌شود بنا به قضیه ۶، ۴ از [۱] مشبکه باناخ F یک KB -فضا است. چون دنباله (S_m) صعودی و نرم کراندار است پس نرم همگرا است و بنابراین $(\sum_{n=m}^k Tx_n)$ در نرم همگرا به صفر است و چون عملگر T مثبت است داریم $\|Tx_m\| \leq \|\sum_{n=m}^k Tx_n\|$ و بنابراین $\lim_n \|Tx_n\| = 0$. در نتیجه بنا به قضیه ۲، ۴ عملگر T, b -ضعیف فشرده است.

تعریف ۱۹. فرض کنید E و F دو فضای ریس و T, S عملگرهایی از E بتوی F باشند. در این صورت می‌گوییم S به وسیله T محدود شده است هرگاه به ازای هر $x \in E$ داشته باشیم

$$|S(x)| \leq T(|x|).$$

قضیه ۲۰. فرض کنیم $S, T: E \rightarrow F$ عملگرهایی بین شبکه‌های باناخ و S به وسیله T محدود شده باشد. اگر عملگر T, b -ضعیف فشرده باشد، آن گاه S نیز b -ضعیف فشرده است.

اثبات. فرض کنیم (x_n) یک دنباله b -کراندار مرتب مجزا در E باشد. کافی است که بنا به قضیه ۱۷ ثابت کنیم که $\lim_n \|S(x_n)\| = 0$. به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $x_n = x_n^+ - x_n^-$ بنابراین (x_n^+) و (x_n^-) دنباله‌هایی مجزا هستند و چون S به وسیله T محدود شده است داریم

$$0 \leq |S(x_n^+)| \leq T(|x_n^+|) = T(x_n^+),$$

$$0 \leq |S(x_n^-)| \leq T(|x_n^-|) = T(x_n^-),$$

از این رو

$$0 \leq |S(x_n)| = |S(x_n^+ - x_n^-)| \leq |S(x_n^+)| + |S(x_n^-)| \leq T(x_n^+) + T(x_n^-).$$

از طرف دیگر چون عملگر T, b -ضعیف فشرده است بنا بر قضیه ۱۷ داریم $\lim_n T(x_n^+) = 0$ و $\lim_n T(x_n^-) = 0$ از این رو، $\lim_n \|S(x_n)\| = 0$ یعنی عملگر S, b -ضعیف فشرده است.

تعریف ۲۱. عملگر T از شبکه باناخ E بتوی فضای باناخ X را فشرده ضعیف ترتیبی گوئیم هرگاه به ازای هر $x \in E_+$ $\overline{T([-x, x])}$ زیرمجموعه فشرده ضعیف از X باشد.

قضیه ۲۲. اگر شبکه باناخ E دارای خاصیت b باشد، در این صورت هر عملگر فشرده ضعیف ترتیبی از E بتوی فضای باناخ X, b -ضعیف فشرده است.

اثبات. فرض کنیم که E دارای خاصیت b و $T: E \rightarrow X$ یک عملگر فشرده ضعیف ترتیبی و A زیرمجموعه b -کراندار ترتیبی E باشد. از آن جاکه E دارای خاصیت b است، پس A در E کراندار ترتیبی است. از این رو، عنصر مثبتی مانند x در E وجود دارد به طوری که $A \subseteq [-x, x]$ پس داریم:

$$T(A) \subseteq T([-x, x]) \Rightarrow \overline{T(A)}^w \subseteq \overline{T([-x, x])}^w.$$

با توجه به این که عملگر T فشرده ضعیف ترتیبی است پس نتیجه می شود که $\overline{T(A)}^w$ زیرمجموعه فشرده ضعیف از X است. از این رو T, b -ضعیف فشرده است.

تبصره: هر زیرمجموعه b -کراندار ترتیبی، کراندار است. پس هر عملگر فشرده ضعیف، b -ضعیف فشرده است. یعنی

$$W(E, X) \subseteq W_b(E, X) \quad (۱)$$

زیرا، فرض کنیم $T \in W(E, X)$ و $B \subseteq E$ مجموعه‌ای b -کراندار ترتیبی باشد از این رو، B کراندار است و چون T فشرده ضعیف است پس $\overline{T(B)}$ فشرده ضعیف است لذا T, b -ضعیف فشرده است.

تعریف ۲۳. نرم $\|\cdot\|$ تعریف شده روی مشبکه باناخ E را p -جمعی^۱ ($1 \leq p < \infty$) گوییم هرگاه به‌ازای هر $x, y \in E_+$ عمود بر هم، تساوی $\|x + y\|^p = (\|x\|)^p + (\|y\|)^p$ برقرار باشد.

گزاره ۲۴. فرض کنیم $1 \leq p < \infty$. در این صورت هر مشبکه باناخ E با یک نرم p -جمعی یک KB -فضاست. اثبات. برای اثبات به نتیجه ۲,۴,۱۳ از منبع [۶] مراجعه شود.

مثال ۲۵. عملگر همانی $I: L_1[a, b] \rightarrow L_1[a, b]$ b -ضعیف فشرده است، که در این جا

$$(L_1[a, b] = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : \|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx < \infty\}).$$

(در $L_1[a, b]$ دو عضو را که تقریباً همه جا مساوی باشند، یکی می‌گیریم) با توجه به این که $L_1[a, b]$ یک فضای باناخ است و تحت رابطه $f \leq g$ (در این جا برای هر $x \in [a, b]$ داریم: $f(x) \leq g(x)$) یک فضای ریس است و به‌ازای هر $f, g \in L_1[a, b]$ که $|f(x)| \leq |g(x)|$ داریم:

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b |g(x)| dx$$

یعنی $\|f\|_1 \leq \|g\|_1$ ، از این‌رو، $L_1[a, b]$ یک مشبکه باناخ است. به‌ازای هر دو عنصر مثبت و عمود بر هم $f, g \in L_1[a, b]$ داریم:

$$\|f + g\|_1 = \int_a^b |f(x) + g(x)| dx = \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \|f\|_1 + \|g\|_1$$

پس $L_1[a, b]$ دارای نرم p -جمعی است (در این جا $p = 1$). در نتیجه بنا به گزاره ۲۴، $L_1[a, b]$ یک KB -فضا است. از این‌رو، از قضیه ۱۵ نتیجه می‌شود که عملگر همانی فوق b -ضعیف فشرده است. از طرفی، چون $L_1[a, b]$ انعکاسی نیست، بنا به قضیه ۲,۸,۲ از [۷]، $L_1[a, b]$ ضعیف فشرده نیست.

گزاره ۲۶. فرض کنیم عملگر خطی T از مشبکه باناخ E بتوی فضای باناخ X پیوسته باشد. در این صورت اگر B_E نوار تولید شده به‌وسیله E در E'' باشد، آن‌گاه $T''(B_E) \subset X$ است اگر و فقط اگر T, b -ضعیف فشرده باشد. اثبات. برای اثبات به گزاره ۲,۸ از منبع [۲] مراجعه شود.

قضیه ۲۷. این احکام برای مشبکه باناخ E هم‌ارزند:

۱. نرم تعریف شده روی E' پیوسته ترتیبی است.

۲. $B_E = E''$ (نوار تولید شده توسط E در E'' است).

۳. E' یک KB -فضا است.

اثبات. برای اثبات به قضیه ۲,۴,۱۴ از منبع [۶] مراجعه شود.

1. P-additive

قضیه ۲۸. اگر $T: X \rightarrow Y$ عملگر پیوسته بین فضاهای باناخ باشد، آن‌گاه این عبارات معادلند:

۱. T فشردۀ ضعیف است.

۲. $T''(X'') \subset Y$.

۳. T' فشردۀ ضعیف است.

اثبات. برای اثبات به قضیه ۵،۲۳ از منبع [۱] مراجعه شود.

قضیه ۲۹. فرض کنیم E شبکه باناخ و X فضای باناخ باشند. اگر نرم تعریف شده روی E' پیوسته ترتیبی باشد آن‌گاه هر عملگر پیوسته b -ضعیف فشردۀ $T: E \rightarrow X$ ، فشردۀ ضعیف است.

اثبات. فرض کنیم نرم تعریف شده روی E' پیوسته ترتیبی باشد و فرض کنیم $T: E \rightarrow X$ یک عملگر b -ضعیف فشردۀ و B_E یک نوار تولید شده به وسیله E در E'' باشد. در این صورت از گزاره ۲۶ نتیجه می‌شود که $T''(B_E) \subset X$ که T'' الحاقی دوم T است. از طرفی چون نرم تعریف شده روی E' پیوسته ترتیبی است بنابر قضیه ۲۷ داریم $B_E = E''$ بنابر این $T''(E'') \subset X$ و از این رو بنابر قضیه ۲۸ نتیجه حاصل می‌شود.

References

1. Aliprantis C. D., Burkinshaw O., "Positive Operators", Academic press, Inc. (2006).
2. Alpay S., Altin B., Tonyal C., "On property (b) of vector lattices", Positivity, 7 (2003) 135-139.
3. Alpay S., Ercan Z., "Characterizations of Riesz spaces with b-property", Positivity, 13 (2009) 21-30.
4. Altin B., "On b-weakly compact operators on Banach lattices", Taiwan. J. Math, 11, (2007) 143-150.
5. Aqzzouz B., Elbour A., Hamichane J., "The duality problem for the class of b-weakly compact operators", Positivity 13 (2009) 683-692.
6. Meyer-Nieberg P., "Banach Lattices", Springer, Berlin, (1991).
7. Megginson R., "An introduction to Banach space theory", Springer (1991).