تابع‌گون‌های توسیع مدول‌های کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته

علی‌رضا وحیدی*، فیصل حسنی، الهام حسین‌زاده
دانشگاه پیام نور، گروه ریاضی، تهران

دریافت ۹۷/۰۷/۲۵ پذیرش ۹۸/۰۵/۱۴

چکیده

فرض کنیم R یک حلقه نوتری جابه‌جایی با واحد ناصفر، $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از حلقه R، M یک R–مدول متناهی‌مولد و X یک R–مدول دل‌خواه باشد. در این مقاله، برای اعداد صحیح و نامنفی s، t و R–مدول متناهی‌مولد N، متعلق بودن $\operatorname{Ext}_R^s\big(N,\mathrm{H}_\mathfrak{a}^t(M,X)\big)$ را در زیررسته‌های سر از رسته R–مدول‌ها بررسی می‌کنیم و کران‌های بالایی برای بعد انژکتیو و اعداد باس $\mathrm{H}_\mathfrak{a}^t(M,X)$ ارایه می‌کنیم. هم‌چنین برخی نتایج در مورد هم‌متناهی بودن و مینیماکس بودن $\mathrm{H}_\mathfrak{a}^t(M,X)$ و متناهی بودن $\operatorname{Ass}_R\big(\mathrm{H}_\mathfrak{a}^t(M,X)\big)$ به‌دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: اعداد باس، ایده‌آل‌های اول وابسته، بعدهای انژکتیو، تابع‌گون‌های توسیع، مدول‌های کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته، مدول‌های مینیماکس، مدول‌های هم‌متناهی.

مقدمه

در سراسر بحث حاضر، R یک حلقه نوتری جابه‌جایی با واحد ناصفر، $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از حلقه R، M یک R–مدول متناهی‌مولد و X یک R–مدول دل‌خواه است. برای نتایج اولیه، مفاهیم و اصطلاحاتی که در این مقاله استفاده شده است، به [۵]، [۶]، [۲۰] مراجعه کنید.

فرض کنیم L یک R–مدول متناهی‌مولد باشد. گروتندیک، در [۱۱]، حدس زد که به‌ازای هر j، مدول $\operatorname{Hom}_R\left(R/\mathfrak{a},\mathrm{H}_\mathfrak{a}^j(L)\right)$ متناهی مولد است. در [۱۲]، هارتشورن یک مثال نقض برای حدس فوق ارایه کرد و این پرسش را مطرح کرد که چه موقع به‌ازای هر i و j، مدول $\operatorname{Ext}_R^i\left(R/\mathfrak{a},\mathrm{H}_\mathfrak{a}^j(L)\right)$ متناهی مولد است. $j-$امین مدول کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته M و X نسبت به $\mathfrak{a}$،

$$\mathrm{H}_\mathfrak{a}^j(M,X)\cong\varinjlim_{n\in\mathbb{N}}\operatorname{Ext}_R^j(M/\mathfrak{a}^nM,X),$$

به‌وسیلهٔ هرزوگ معرفی شد [۱۴]. روشن است که $\mathrm{H}_\mathfrak{a}^j(R,X)$ مدول کوهمولوژی موضعی معمولی $\mathrm{H}_\mathfrak{a}^j(X)$ است. به‌عنوان تعمیمی از پرسش هارتشورن، پرسش ۱ را در مورد مدول‌های کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته داریم ([۲۵، پرسش ۷٫۲] ملاحظه شود).

پرسش. چه موقع به‌ازای هر i و j، مدول $\operatorname{Ext}_R^i\left(R/\mathfrak{a},\mathrm{H}_\mathfrak{a}^j(M,L)\right)$ متناهی‌مولد است؟

در این مقاله و در راستای پاسخ به پرسش مذکور، به مطالعه و بررسی خواص مدول $\operatorname{Ext}_R^i\left(N,\mathrm{H}_\mathfrak{a}^j(M,X)\right)$ می‌پردازیم که در آن N یک R–مدول متناهی‌مولد و X یک R–مدول دل‌خواه است.

در بخش ۲، چند نتیجهٔ تکنیکی (لم ۱، قضیهٔ ۲، قضیهٔ ۹ و قضیهٔ ۱۴) ارایه می‌کنیم که نشان می‌دهند، در برخی حالات معین و برای اعداد صحیح نامنفی s، t، s'، t' با شرط $s+t=s'+t'$، یک‌ریختی

$$\operatorname{Ext}_R^s\big(N,\mathrm{H}_\mathfrak{a}^t(M,X)\big)\cong\mathrm{H}_\mathfrak{a}^{s'}\big(\operatorname{Tor}_{t'}^R(N,M),X\big)$$

*نویسنده مسئول vahidi.ar@pnu.ac.ir

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.8.4]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.151]

برقرار است و هم‌چنین تحت شرایطی، مدول‌های $\mathrm{Ext}_R^s\left(N, \mathrm{H}_\mathfrak{a}^t(M,X)\right)$ و $\mathrm{H}_\mathfrak{a}^s(\mathrm{Tor}_t^R(N,M),X)$ متعلق به یک زیررسته سر[1] از رسته R−مدول‌ها هستند (زیررسته سر، یک رده از R−مدول‌هاست که نسبت به زیرمدول، خارج‌قسمت و توسیع، بسته است).

بخش ۳ به ارایهٔ کاربردها اختصاص یافته است. در این بخش، نتایج بخش ۲ را برای برخی زیررسته‌های سر (مانند رده R−مدول‌های صفر و رده R−مدول‌های متناهی‌مولد) به‌کار برده و خواصی از مدول‌های کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته را نتیجه می‌گیریم. در نتایج ۱۷، ۱۹، کران‌های بالایی برای بعد انژکتیو و اعداد باس مدول‌های کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته به‌دست می‌آوریم. در نتایج ۲۰ الی ۲۴ هم‌متناهی بودن و مینیماکس بودن مدول‌های کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته را بررسی می‌کنیم. یادآوری می‌شود که یک R−مدول مانند X را $\mathfrak{a}$−هم‌متناهی (به‌ترتیب، مینیماکس) گوییم هرگاه $\mathrm{Supp}_R(X) \subseteq \mathrm{Var}(\mathfrak{a})$ و به‌ازای هر i، مدول $\mathrm{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a}, X)$ متناهی‌مولد باشد (به‌ترتیب، زیرمدولی متناهی‌مولد مانند X' از X موجود باشد به‌طوری‌که X/X' آرتینی شود) که در آن $\mathrm{Var}(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) | \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\}$. نشان می‌دهیم اگر به‌ازای هر i کوچک‌تر از $t+1$، مدول $\mathrm{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a}, X)$ متناهی‌مولد و به‌ازای هر i کوچک‌تر از t، مدول $\mathrm{H}_\mathfrak{a}^i(M,X)$ مینیماکس باشد، آن‌گاه به‌ازای هر i کوچک‌تر از t، $\mathrm{H}_\mathfrak{a}^i(M,X)$ مدولی $\mathfrak{a}$−هم‌متناهی و $\mathrm{Hom}_R\left(R/\mathfrak{a}, \mathrm{H}_\mathfrak{a}^t(M,X)\right)$ مدولی متناهی‌مولد است. ثابت می‌کنیم اگر به‌ازای هر i کوچک‌تر از $\mathrm{ara}(\mathfrak{a})+1$، که در آن $\mathrm{ara}(\mathfrak{a})$ رتبهٔ حسابی ایده‌آل $\mathfrak{a}$ است، $\mathrm{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a}, X)$ مدولی متناهی‌مولد و به‌ازای هر i مخالف t، $\mathrm{H}_\mathfrak{a}^i(M,X)$ مدولی $\mathfrak{a}$−هم‌متناهی باشد، آن‌گاه $\mathrm{H}_\mathfrak{a}^t(M,X)$ نیز مدولی $\mathfrak{a}$−هم‌متناهی است. نشان می‌دهیم اگر R موضعی، $\dim(R/\mathfrak{a}) \leq 2$ و به‌ازای هر i کوچک‌تر از $t+2$، $\mathrm{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a}, X)$ مدولی متناهی‌مولد باشد، آن‌گاه به‌ازای هر i کوچک‌تر از t، $\mathrm{H}_\mathfrak{a}^i(M,X)$ مدولی $\mathfrak{a}$−هم‌متناهی است اگر و تنها اگر به‌ازای هر i کوچک‌تر از $t+1$، $\mathrm{Hom}_R\left(R/\mathfrak{a}, \mathrm{H}_\mathfrak{a}^i(M,X)\right)$ مدولی متناهی‌مولد باشد. هم‌چنین ثابت می‌کنیم اگر R موضعی، $\dim(R/\mathfrak{a}) \leq 2$ و به‌ازای هر i، $\mathrm{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a}, X)$ مدولی متناهی‌مولد و $\mathrm{H}_\mathfrak{a}^{2i}(M,X)$ (یا $\mathrm{H}_\mathfrak{a}^{2i+1}(M,X)$) مدولی $\mathfrak{a}$−هم‌متناهی باشد، آن‌گاه به‌ازای هر i، $\mathrm{H}_\mathfrak{a}^i(M,X)$ مدولی $\mathfrak{a}$−هم‌متناهی است. در نتیجهٔ ۲۵، ضعیف‌ترین شرایط ممکن برای متناهی بودن مجموعه ایده‌آل‌های اول وابسته به مدول‌های کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته را بیان می‌کنیم. توجه می‌کنیم که با به‌کار بردن زیررسته‌های سر دیگر در نتایج بخش ۲، می‌توان خواص بیش‌تری از مدول‌های کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته را به‌دست آورد.

نتایج اصلی

لم ۱ در اثبات قضایای اصلی این مقاله مورد نیاز است.

لم ۱. فرض کنیم X یک R−مدول دل‌خواه و M، N دو R−مدول متناهی‌مولد باشند. در این صورت دنباله‌های طیفی ناحیه سوم

الف) ${}^{I}\mathrm{E}_2^{p,q} := \mathrm{H}_\mathfrak{a}^p\left(\mathrm{Tor}_q^R(N,M), X\right) \underset{p}{\Rightarrow} H^{p+q}$ و

ب) ${}^{II}\mathrm{E}_2^{p,q} := \mathrm{Ext}_R^p\left(N, \mathrm{H}_\mathfrak{a}^q(M,X)\right) \underset{p}{\Rightarrow} H^{p+q}$

را داریم.

برهان. فرض کنیم

$$E^{\bullet X}: 0 \longrightarrow E^0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^i \longrightarrow \cdots$$

1. Serre

یک تحلیل انژکتیو محذوف برای X باشد. با تأثیر تابع‌گون $\mathrm{Hom}_R\big(M,\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)\big)$ بر هم‌بافت $E^{\bullet X}$، هم‌بافت

$$\mathrm{Hom}_R\big(M,\Gamma_{\mathfrak{a}}(E^{\bullet X})\big): 0\longrightarrow \mathrm{Hom}_R\big(M,\Gamma_{\mathfrak{a}}(E^0)\big)\longrightarrow\cdots\longrightarrow \mathrm{Hom}_R\Big(M,\Gamma_{\mathfrak{a}}\big(E^i\big)\Big)\longrightarrow\cdots$$

را داریم. با توجه به [۲۰، قضیهٔ ۴۵,۱۰]، فرض کنیم

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}_R\big(M,\Gamma_{\mathfrak{a}}(E^{\bullet X})\big)\longrightarrow T^{\bullet,0}\longrightarrow\cdots\longrightarrow T^{\bullet,j}\longrightarrow\cdots$$

یک تحلیل انژکتیو کارتن-ایلنبرگ[1] برای $\mathrm{Hom}_R\big(M,\Gamma_{\mathfrak{a}}(E^{\bullet X})\big)$ باشد. حال دوهم‌بافت ناحیهٔ سوم $\mathcal{T}=\{\mathrm{Hom}_R(N,T^{p,q})\}$ را در نظر گرفته و هم‌بافت کلی آن را با $\mathrm{Tot}(\mathcal{T})$ نشان می‌دهیم.

الف) فرض کنیم $^{I}\mathrm{E}_2^{p,q}=\mathrm{H}'^{p}\mathrm{H}''^{p,q}(\mathcal{T})$ همولوژی تکراری اول از $\mathcal{T}$ نسبت به صافی اول باشد. در این صورت طبق [۵، گزارهٔ ۴,۱,۲] و [۲۰، نتیجهٔ ۶۳,۱۰]،

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}''^{p,q}(\mathcal{T}) &\cong \mathrm{H}^q\big(\mathrm{Hom}_R(N,T^{p,\bullet})\big)\\
&\cong \mathrm{Ext}_R^q\Big(N,\mathrm{Hom}_R\big(M,\Gamma_{\mathfrak{a}}(E^p)\big)\Big)\\
&\cong \mathrm{Hom}_R\Big(\mathrm{Tor}_q^R(N,M),\Gamma_{\mathfrak{a}}(E^p)\Big).
\end{aligned}$$

در نتیجه بنا به بند اول [۱۰، لم ۱,۲]،

$$\begin{aligned}
{}^{I}\mathrm{E}_2^{p,q} &\cong \mathrm{H}'^{p}\mathrm{H}''^{p,q}(\mathcal{T})\\
&\cong \mathrm{H}^p\Big(\mathrm{Hom}_R\Big(\mathrm{Tor}_q^R(N,M),\Gamma_{\mathfrak{a}}(E^{\bullet X})\Big)\Big)\\
&\cong \mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^p\big(\mathrm{Tor}_q^R(N,M),X\big)
\end{aligned}$$

که دنبالهٔ طیفی ناحیهٔ سوم

$${}^{I}\mathrm{E}_2^{p,q}:=\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^p\big(\mathrm{Tor}_q^R(N,M),X\big)\underset{p}{\Rightarrow}\mathrm{H}^{p+q}\big(\mathrm{Tot}(\mathcal{T})\big)$$

را نتیجه می‌دهد.

ب) فرض کنیم $^{II}\mathrm{E}_2^{p,q}=\mathrm{H}''^{p}\mathrm{H}'^{q,p}(\mathcal{T})$ همولوژی تکراری دوم از $\mathcal{T}$ نسبت به صافی دوم باشد. توجه می‌کنیم که چون هر دنباله دقیق کوتاه از مدول‌های انژکتیو، شکافته‌شده است پس با تأثیر تابع‌گون $\mathrm{Hom}_R(N,-)$ بر آن، شکافته‌شده باقی می‌ماند. با توجه به این نکته و این که $T^{\bullet,\bullet}$ یک تحلیل انژکتیو کارتن-ایلنبرگ برای $\mathrm{Hom}_R\big(M,\Gamma_{\mathfrak{a}}(E^{\bullet X})\big)$ است خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}'^{q,p}(\mathcal{T}) &\cong \mathrm{H}^q\big(\mathrm{Hom}_R(N,T^{\bullet,p})\big)\\
&\cong \mathrm{Hom}_R\big(N,\mathrm{H}^q(T^{\bullet,p})\big)\\
&\cong \mathrm{Hom}_R(N,\mathrm{H}^{q,p}).
\end{aligned}$$

در نتیجه بنا به بند اول [۱۰، لم ۱,۲]،

$$\begin{aligned}
{}^{II}\mathrm{E}_2^{p,q} &\cong \mathrm{H}''^{p}\mathrm{H}'^{q,p}(\mathcal{T})\\
&\cong \mathrm{H}^p\big(\mathrm{Hom}_R(N,\mathrm{H}^{q,\bullet})\big)\\
&\cong \mathrm{Ext}_R^p\Big(N,\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^q(M,X)\Big)
\end{aligned}$$

که دنبالهٔ طیفی ناحیه سوم

$${}^{II}\mathrm{E}_2^{p,q}:=\mathrm{Ext}_R^p\Big(N,\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^q(M,X)\Big)\underset{p}{\Rightarrow}\mathrm{H}^{p+q}\big(\mathrm{Tot}(\mathcal{T})\big)$$

1. Cartan-Eilenberg

را نتیجه می‌دهد.

فرض کنیم s، t، s'، t' اعداد صحیح نامنفی و N یک R–مدول متناهی‌مولد باشد. در قضیهٔ ۲ یک یک‌ریختی بین R–مدول‌های $\mathrm{Ext}_R^s\left(N, \mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^t(M,X)\right)$ و $\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{s'}\left(\mathrm{Tor}_{t'}^R(N,M),X\right)$ به‌دست می‌آوریم.

قضیهٔ ۲. فرض کنیم X یک R–مدول دل‌خواه، M، N دو R–مدول متناهی‌مولد و s، t، s'، t' اعداد صحیح نامنفی باشند به‌طوری‌که $(n=)s+t=s'+t'$. فرض کنیم

الف) به‌ازای هر i کوچک‌تر از t، $\mathrm{Ext}_R^{n+1-i}\left(N, \mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^i(M,X)\right)=0$،

ب) به‌ازای هر i بزرگ‌تر از t، $\mathrm{Ext}_R^{n-1-i}\left(N, \mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^i(M,X)\right)=0$،

ج) به‌ازای هر i مخالف t، $\mathrm{Ext}_R^{n-i}\left(N, \mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^i(M,X)\right)=0$،

د) به‌ازای هر i کوچک‌تر از t'، $\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{n+1-i}(\mathrm{Tor}_i^R(N,M),X)=0$،

ه) به‌ازای هر i بزرگ‌تر از t'، $\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{n-1-i}(\mathrm{Tor}_i^R(N,M),X)=0$ و

و) به‌ازای هر i مخالف t'، $\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{n-i}(\mathrm{Tor}_i^R(N,M),X)=0$.

در این صورت $\mathrm{Ext}_R^s\left(N, \mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^t(M,X)\right)\cong \mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{s'}\left(\mathrm{Tor}_{t'}^R(N,M),X\right)$.

برهان. با توجه به بند (ب) لم ۱، دنبالهٔ طیفی ناحیهٔ سوم

$$^{II}\mathrm{E}_2^{p,q}:=\mathrm{Ext}_R^p\left(N, \mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^q(M,X)\right)\underset{p}{\Rightarrow} H^{p+q}$$

را داریم. به‌ازای هر r بزرگ‌تر از 1، فرض کنیم $^{II}\mathrm{Z}_r^{s,t}=\mathrm{Ker}\left(^{II}\mathrm{E}_r^{s,t}\longrightarrow {}^{II}\mathrm{E}_r^{s+r,t+1-r}\right)$ و $^{II}\mathrm{B}_r^{s,t}=\mathrm{Im}\left(^{II}\mathrm{E}_r^{s-r,t-1+r}\longrightarrow {}^{II}\mathrm{E}_r^{s,t}\right)$. چون بنا به فرض‌های (الف) و (ب)، $^{II}\mathrm{E}_2^{s-r,t-1+r}=0={}^{II}\mathrm{E}_2^{s+r,t+1-r}$ پس $^{II}\mathrm{E}_r^{s-r,t-1+r}=0={}^{II}\mathrm{E}_r^{s+r,t+1-r}$. بنابراین $^{II}\mathrm{Z}_r^{s,t}={}^{II}\mathrm{E}_r^{s,t}$ و $^{II}\mathrm{B}_r^{s,t}=0$. در نتیجه $^{II}\mathrm{E}_r^{s,t}={}^{II}\mathrm{E}_{r+1}^{s,t}$ و از این‌رو،

$$^{II}\mathrm{E}_\infty^{s,t}=\cdots={}^{II}\mathrm{E}_{n+2}^{s,t}={}^{II}\mathrm{E}_{n+1}^{s,t}=\cdots={}^{II}\mathrm{E}_3^{s,t}={}^{II}\mathrm{E}_2^{s,t}=\mathrm{Ext}_R^s\left(N, \mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^t(M,X)\right).$$

یک صافی متناهی به‌صورت

$$0=\varphi^{n+1}H^n\subseteq\varphi^nH^n\subseteq\cdots\subseteq\varphi^1H^n\subseteq\varphi^0H^n=H^n$$

موجود است به‌طوری‌که به‌ازای هر r کوچک‌تر از $n+1$، $^{II}\mathrm{E}_\infty^{n-r,r}\cong\varphi^{n-r}H^n/\varphi^{n-r+1}H^n$. توجه می‌کنیم که بنا به فرض (ج) و به‌ازای هر r مخالف t، $^{II}\mathrm{E}_\infty^{n-r,r}=0$. از این‌رو

$$0=\varphi^{n+1}H^n=\varphi^nH^n=\cdots=\varphi^{s+2}H^n=\varphi^{s+1}H^n$$

و

$$\varphi^sH^n=\varphi^{s-1}H^n=\cdots=\varphi^1H^n=\varphi^0H^n=H^n.$$

بنابراین $^{II}\mathrm{E}_\infty^{s,t}\cong\varphi^sH^n/\varphi^{s+1}H^n=H^n$ و در نتیجه $\mathrm{Ext}_R^s\left(N, \mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^t(M,X)\right)\cong H^n$.

از طرف دیگر، طبق بند (الف) لم ۱ و فرض‌های (د)، (ه) و (و)، مشابه اثبات مذکور می‌توان نشان داد که $H^n\cong \mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{s'}\left(\mathrm{Tor}_{t'}^R(N,M),X\right)$. در نتیجه $\mathrm{Ext}_R^s\left(N, \mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^t(M,X)\right)\cong \mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{s'}\left(\mathrm{Tor}_{t'}^R(N,M),X\right)$.

نتیجهٔ ۳ کاربردی از قضیهٔ ۲ است و [۲۲، قضیهٔ ۲۱،۲] را تعمیم می‌دهد.

نتیجهٔ ۳. فرض کنیم X یک R–مدول دل‌خواه، M، N دو R–مدول متناهی‌مولد و s، t اعداد صحیح نامنفی باشند. فرض کنیم

الف) به‌ازای هر i کوچک‌تر از t، $\mathrm{Ext}_R^{s+t+1-i}\left(N, \mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^i(M,X)\right)=0$،

ب) به‌ازای هر i بزرگ‌تر از t، $\mathrm{Ext}_R^{s+t-1-i}\left(N, \mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^i(M,X)\right)=0$،

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.8.4]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.151]

ج) به‌ازای هر i مخالف t، $\mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s+t-i}}\left(\mathrm{N},\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{\mathrm{i}}(\mathrm{M},\mathrm{X})\right)=0$،

د) به‌ازای هر i بزرگ‌تر از 0، $\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{\mathrm{s+t-1-i}}\left(\mathrm{Tor}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{R}}(\mathrm{N},\mathrm{M}),\mathrm{X}\right)=0$ و

ه) به‌ازای هر i بزرگ‌تر از 0، $\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{s+t-i}\left(\mathrm{Tor}_{i}^{R}(N,M),X\right)=0$.

در این صورت $\mathrm{Ext}_{R}^{s}\left(N,\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{t}(M,X)\right)\cong\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{s+t}(N\otimes_{R}M,X)$.

برهان. کافی است در قضیهٔ ۲ قرار دهیم $s'=s+t$ و $t'=0$.

نتیجهٔ ۴ یک یک‌ریختی بین $\mathrm{Ext}_{R}^{s}\left(N,\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{t}(M,X)\right)$ و $\mathrm{Ext}_{R}^{s'}\left(\mathrm{Tor}_{t'}^{R}(N,M),X\right)$ فراهم می‌کند.

نتیجهٔ ۴. فرض کنیم X یک R–مدول دل‌خواه و M، N دو R–مدول متناهی‌مولد باشند به‌طوری‌که $\mathrm{Supp}_{R}(N)\cap\mathrm{Supp}_{R}(M)\cap\mathrm{Supp}_{R}(X)\subseteq\mathrm{Var}(\mathfrak{a})$. فرض کنیم s، t، s'، t' اعداد صحیح نامنفی باشند به‌طوری‌که $s+t=s'+t'(=n)$. هم‌چنین فرض کنیم

الف) به‌ازای هر i کوچک‌تر از t، $\mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n+1-i}}\left(\mathrm{N},\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{\mathrm{i}}(\mathrm{M},\mathrm{X})\right)=0$،

ب) به‌ازای هر i بزرگ‌تر از t، $\mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n-1-i}}\left(\mathrm{N},\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{\mathrm{i}}(\mathrm{M},\mathrm{X})\right)=0$،

ج) به‌ازای هر i مخالف t، $\mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n-i}}\left(\mathrm{N},\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{\mathrm{i}}(\mathrm{M},\mathrm{X})\right)=0$،

د) به‌ازای هر i کوچک‌تر از t'، $\mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n+1-i}}\left(\mathrm{Tor}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{R}}(\mathrm{N},\mathrm{M}),\mathrm{X}\right)=0$،

ه) به‌ازای هر i بزرگ‌تر از t'، $\mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n-1-i}}\left(\mathrm{Tor}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{R}}(\mathrm{N},\mathrm{M}),\mathrm{X}\right)=0$ و

و) به‌ازای هر i مخالف t'، $\mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n-i}}\left(\mathrm{Tor}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{R}}(\mathrm{N},\mathrm{M}),\mathrm{X}\right)=0$.

در این صورت $\mathrm{Ext}_{R}^{s}\left(N,\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{t}(M,X)\right)\cong\mathrm{Ext}_{R}^{s'}\left(\mathrm{Tor}_{t'}^{R}(N,M),X\right)$.

برهان. با توجه به بند سوم [۲۲، لم ۵٫۲] و قضیهٔ ۲ برقرار است.

نتیجهٔ ۵ [۲، قضیهٔ ۵٫۳] را تعمیم می‌دهد.

نتیجهٔ ۵. فرض کنیم X یک R–مدول دل‌خواه و M، N دو R–مدول متناهی‌مولد باشند به‌طوری‌که $\mathrm{Supp}_{R}(N)\cap\mathrm{Supp}_{R}(M)\cap\mathrm{Supp}_{R}(X)\subseteq\mathrm{Var}(\mathfrak{a})$. فرض کنیم s، t اعداد صحیح نامنفی باشند به‌طوری‌که

الف) به‌ازای هر i کوچک‌تر از t، $\mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s+t+1-i}}\left(\mathrm{N},\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{\mathrm{i}}(\mathrm{M},\mathrm{X})\right)=0$،

ب) به‌ازای هر i بزرگ‌تر از t، $\mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s+t-1-i}}\left(\mathrm{N},\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{\mathrm{i}}(\mathrm{M},\mathrm{X})\right)=0$،

ج) به‌ازای هر i مخالف t، $\mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s+t-i}}\left(\mathrm{N},\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{\mathrm{i}}(\mathrm{M},\mathrm{X})\right)=0$،

د) به‌ازای هر i بزرگ‌تر از 0، $\mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s+t-1-i}}\left(\mathrm{Tor}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{R}}(\mathrm{N},\mathrm{M}),\mathrm{X}\right)=0$ و

ه) به‌ازای هر i بزرگ‌تر از 0، $\mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s+t-i}}\left(\mathrm{Tor}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{R}}(\mathrm{N},\mathrm{M}),\mathrm{X}\right)=0$.

در این صورت $\mathrm{Ext}_{R}^{s}\left(N,\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{t}(M,X)\right)\cong\mathrm{Ext}_{R}^{s+t}(N\otimes_{R}M,X)$.

برهان. کافی است در نتیجهٔ ۴ قرار دهیم $s'=s+t$ و $t'=0$.

نتیجهٔ ۶. ([۲، نتیجهٔ ۶٫۳] را ملاحظه کنید) فرض کنیم X یک R–مدول دل‌خواه و M، N دو R–مدول متناهی‌مولد باشند به‌طوری‌که $\mathrm{Supp}_{R}(N)\cap\mathrm{Supp}_{R}(M)\cap\mathrm{Supp}_{R}(X)\subseteq\mathrm{Var}(\mathfrak{a})$. فرض کنیم t یک عدد صحیح نامنفی باشد به‌طوری‌که

الف) به‌ازای هر i کوچک‌تر از t، $\mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{t+1-i}}\left(\mathrm{N},\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{\mathrm{i}}(\mathrm{M},\mathrm{X})\right)=0$،

ب) به‌ازای هر i کوچک‌تر از t، $\mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{t-i}}\left(\mathrm{N},\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{\mathrm{i}}(\mathrm{M},\mathrm{X})\right)=0$،

ج) به‌ازای هر i بزرگ‌تر از 0، $\mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{t-1-i}}\left(\mathrm{Tor}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{R}}(\mathrm{N},\mathrm{M}),\mathrm{X}\right)=0$ و

د) به‌ازای هر i بزرگ‌تر از 0، $\mathrm{Ext}_{R}^{t-i}\left(\mathrm{Tor}_{i}^{R}(N,M),X\right)=0$.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.8.4]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.151]

در این صورت $\mathrm{Hom}_R\big(N,\mathrm{H}^t_{\mathfrak{a}}(M,X)\big)\cong \mathrm{Ext}^t_R(N\otimes_R M,X)$.

برهان. کافی است نتیجهٔ ۵ را با $s=0$ به‌کار بریم.

یادآوری می‌کنیم که یک زیررسته سر از رسته R–مدول‌ها مانند $\mathcal{S}$، یک رده از R–مدول‌هاست که به‌ازای هر دنباله دقیق کوتاه از R–مدول‌ها مانند

$$0\longrightarrow X'\longrightarrow X\longrightarrow X''\longrightarrow 0، \tag{۱}$$

مدول X متعلق به $\mathcal{S}$ است اگر و تنها اگر مدول‌های X' و X'' متعلق به $\mathcal{S}$ باشند. فرض کنیم $\lambda:\mathcal{S}\longrightarrow\mathcal{T}$ یک نگاشت از زیررسته سر $\mathcal{S}$ به تک‌واره آبلی مرتب جزیی $(\mathcal{T},\circ,\preccurlyeq)$ باشد. در این صورت λ را یک نگاشت زیرجمعی گوییم هرگاه $\lambda(0)=0$ و به‌ازای هر دنباله دقیق کوتاه مانند (۱) که در آن X، X' و X'' متعلق به $\mathcal{S}$ هستند داشته باشیم $\lambda(X')\preccurlyeq\lambda(X)$، $\lambda(X'')\preccurlyeq\lambda(X)$ و $\lambda(X)\preccurlyeq\lambda(X')\circ\lambda(X'')$ (به [۲۲، تعریف ۳,۲] مراجعه کنید).

در این مقاله، $\mathcal{S}$ یک زیررسته سر از رسته R–مدول‌ها، $(\mathcal{T},\circ,\preccurlyeq)$ یک تک‌واره آبلی مرتب جزیی و $\lambda:\mathcal{S}\longrightarrow\mathcal{T}$ یک نگاشت زیرجمعی است.

لم ۷. ([۱۸، نتیجهٔ ۵,۲] و بند اول [۱۳، گزارهٔ ۴,۳] ملاحظه شود) فرض کنیم N یک R–مدول متناهی‌مولد، X یک R–مدول دل‌خواه و t یک عدد صحیح نامنفی باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر i کوچک‌تر از $t+1$ (به‌ترتیب، به‌ازای هر i)، $\mathrm{Ext}^i_R(N,X)\in\mathcal{S}$. در این صورت به‌ازای هر R–مدول متناهی‌مولد L با شرط $\mathrm{Supp}_R(L)\subseteq\mathrm{Supp}_R(N)$ و به‌ازای هر i کوچک‌تر از $t+1$ (به‌ترتیب، به‌ازای هر i)، $\mathrm{Ext}^i_R(L,X)\in\mathcal{S}$.

برهان. کافی است به استقرا روی t عمل نماییم. توجه می‌کنیم که با توجه به قضیهٔ گروسون[۱] [۲۴، قضیهٔ ۱,۴] و برای یک R–مدول متناهی‌مولد مانند L، یک صافی متناهی به‌صورت

$$0=L_0\subset L_1\subset\cdots\subset L_{n-1}\subset L_n=L$$

از زیرمدول‌های L وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر j که $1\leq j\leq n$، دنباله دقیق کوتاه

$$0\longrightarrow L'_j\longrightarrow N^{\alpha_j}\longrightarrow L_j/L_{j-1}\longrightarrow 0$$

موجود است که در آن α_j یک عدد صحیح نامنفی است.

در بند دوم [۲۲، قضیهٔ ۱۰,۲]، نشان داده شده است که اگر به‌ازای هر i کوچک‌تر از t، $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(X)=0$، آن‌گاه $\mathrm{Hom}_R\big(R/\mathfrak{a},\mathrm{H}^t_{\mathfrak{a}}(M,X)\big)\cong\mathrm{Ext}^t_R(M/\mathfrak{a}M,X)$. در نتیجه زیر این مطلب را بهبود می‌بخشیم. توجه می‌کنیم که بنا به [۱۳، گزارهٔ ۳,۲] یا [۲۲، نتیجهٔ ۹,۲]، اگر به‌ازای هر i کوچک‌تر از t، $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(X)=0$، آن‌گاه به‌ازای هر i کوچک‌تر از t، $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(M,X)=0$.

نتیجهٔ ۸. فرض کنیم X یک R–مدول دل‌خواه، M یک R–مدول متناهی‌مولد و t یک عدد صحیح نامنفی باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر i کوچک‌تر از t، $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(M,X)=0$. در این صورت به‌ازای هر R–مدول متناهی‌مولد $\mathfrak{a}$–تابی N، $\mathrm{Hom}_R\big(N,\mathrm{H}^t_{\mathfrak{a}}(M,X)\big)\cong\mathrm{Ext}^t_R(N\otimes_R M,X)$. به‌ویژه، $\mathrm{Hom}_R\big(R/\mathfrak{a},\mathrm{H}^t_{\mathfrak{a}}(M,X)\big)\cong\mathrm{Ext}^t_R(M/\mathfrak{a}M,X)$ و در نتیجه $\mathrm{Ass}_R\big(\mathrm{H}^t_{\mathfrak{a}}(M,X)\big)=\mathrm{Ass}_R\big(\mathrm{Ext}^t_R(M/\mathfrak{a}M,X)\big)$.

برهان. طبق [۲۲، نتیجهٔ ۱۷,۲] و به‌ازای هر i کوچک‌تر از t، $\mathrm{Ext}^i_R(M/\mathfrak{a}M,X)=0$. بنابراین با توجه به لم ۷ و به‌ازای هر i بزرگ‌تر از 0، $\mathrm{Ext}^{t-1-i}_R(\mathrm{Tor}^R_i(N,M),X)=0=\mathrm{Ext}^{t-i}_R(\mathrm{Tor}^R_i(N,M),X)$. از این‌رو، بنا به نتیجهٔ ۶، $\mathrm{Hom}_R\big(N,\mathrm{H}^t_{\mathfrak{a}}(M,X)\big)\cong\mathrm{Ext}^t_R(N\otimes_R M,X)$. برای قسمت آخر، توجه می‌کنیم که طبق [۶، تمرین ۲۷,۲,۱]،

$$\mathrm{Ass}_R\Big(\mathrm{Hom}_R\big(R/\mathfrak{a},\mathrm{H}^t_{\mathfrak{a}}(M,X)\big)\Big)=\mathrm{Supp}_R(R/\mathfrak{a})\cap\mathrm{Ass}_R\big(\mathrm{H}^t_{\mathfrak{a}}(M,X)\big)=\mathrm{Ass}_R\big(\mathrm{H}^t_{\mathfrak{a}}(M,X)\big)$$

---
1. Gruson

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.8.4]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.151]

و در نتیجه حکم برقرار است.

در قضیهٔ ۹ که تعمیمی از [۲۲، قضیهٔ ۱۳،۲] است، شرایط کافی برای متعلق بودن $\mathrm{Ext}_R^s\big(N,\mathrm{H}_\mathfrak{a}^t(M,X)\big)$ در یک زیررسته سر از رسته R–مدول‌ها را ارایه می‌کنیم.

قضیهٔ ۹. فرض کنیم X یک R–مدول دل‌خواه، M، N دو R–مدول متناهی‌مولد و s، t اعداد صحیح نامنفی باشند. فرض کنیم

الف) به‌ازای هر i، $\mathrm{H}_\mathfrak{a}^{s+t-i}(\mathrm{Tor}_i^R(N,M),X)\in\mathcal{S}$،

ب) به‌ازای هر i کوچک‌تر از t، $\mathrm{Ext}_R^{s+t+1-i}\left(N,\mathrm{H}_\mathfrak{a}^i(M,X)\right)\in\mathcal{S}$ و

ج) به‌ازای هر i بزرگ‌تر از t، $\mathrm{Ext}_R^{s+t-1-i}\left(N,\mathrm{H}_\mathfrak{a}^i(M,X)\right)\in\mathcal{S}$.

در این صورت $\mathrm{Ext}_R^s\big(N,\mathrm{H}_\mathfrak{a}^t(M,X)\big)\in\mathcal{S}$ و

$$\lambda\left(\mathrm{Ext}_R^s\big(N,\mathrm{H}_\mathfrak{a}^t(M,X)\big)\right)\preccurlyeq\left(\circ_{i=0}^{s+t}\lambda\left(\mathrm{H}_\mathfrak{a}^{s+t-i}(\mathrm{Tor}_i^R(N,M),X)\right)\right)$$
$$\circ\left(\circ_{i=0}^{t-1}\lambda\left(\mathrm{Ext}_R^{s+t+1-i}\left(N,\mathrm{H}_\mathfrak{a}^i(M,X)\right)\right)\right)\circ\left(\circ_{i=t+1}^{s+t-1}\lambda\left(\mathrm{Ext}_R^{s+t-1-i}\left(N,\mathrm{H}_\mathfrak{a}^i(M,X)\right)\right)\right).$$

برهان. با توجه به بند (الف) لم ۱، دنباله طیفی ناحیهٔ سوم

$${}^{I}\mathrm{E}_2^{p,q}:=\mathrm{H}_\mathfrak{a}^p\big(\mathrm{Tor}_q^R(N,M),X\big)\underset{p}{\Rightarrow}H^{p+q}$$

را داریم. به‌ازای هر i کوچک‌تر از $s+t+1$، ${}^{I}\mathrm{E}_\infty^{s+t-i,i}={}^{I}\mathrm{E}_{s+t+2}^{s+t-i,i}$ زیرا به‌ازای هر j بزرگ‌تر از $s+t+1$، ${}^{I}\mathrm{E}_j^{s+t-i+j,i+1-j}=0={}^{I}\mathrm{E}_j^{s+t-i-j,i-1+j}$. بنابراین چون ${}^{\mathrm{I}}\mathrm{E}_{s+t+2}^{s+t-i,i}$ زیرخارج‌قسمتی از ${}^{I}\mathrm{E}_2^{s+t-i,i}$ است و با توجه به فرض (الف)، ${}^{I}\mathrm{E}_2^{s+t-i,i}$ متعلق به $\mathcal{S}$ است پس ${}^{I}\mathrm{E}_\infty^{s+t-i,i}$ عضوی از $\mathcal{S}$ است و

$$\lambda\left({}^{I}\mathrm{E}_\infty^{s+t-i,i}\right)\preccurlyeq\lambda\left({}^{I}\mathrm{E}_2^{s+t-i,i}\right).$$

یک صافی متناهی به‌صورت

$$0=\varphi^{s+t+1}H^{s+t}\subseteq\varphi^{s+t}H^{s+t}\subseteq\cdots\subseteq\varphi^1H^{s+t}\subseteq\varphi^0H^{s+t}=H^{s+t}$$

موجود است به‌طوری‌که به‌ازای هر i کوچک‌تر از $s+t+1$، ${}^{I}\mathrm{E}_\infty^{s+t-i,i}\cong\varphi^{s+t-i}H^{s+t}/\varphi^{s+t-i+1}H^{s+t}$.

حال به‌ازای هر i کوچک‌تر از $s+t+1$، دنباله‌های دقیق کوتاه

$$0\longrightarrow\varphi^{s+t-i+1}H^{s+t}\longrightarrow\varphi^{s+t-i}H^{s+t}\longrightarrow{}^{I}\mathrm{E}_\infty^{s+t-i,i}\longrightarrow0$$

را داریم که نشان می‌دهند $H^{s+t}\in\mathcal{S}$ و

$$\lambda(H^{s+t})\preccurlyeq\circ_{i=0}^{s+t}\lambda\left({}^{I}\mathrm{E}_\infty^{s+t-i,i}\right)\preccurlyeq\circ_{i=0}^{s+t}\lambda\left({}^{I}\mathrm{E}_2^{s+t-i,i}\right).$$

از طرف دیگر و با توجه به بند (ب) لم ۱، دنبالهٔ طیفی ناحیهٔ سوم

$${}^{II}\mathrm{E}_2^{p,q}:=\mathrm{Ext}_R^p\left(N,\mathrm{H}_\mathfrak{a}^q(M,X)\right)\underset{p}{\Rightarrow}H^{p+q}$$

را داریم. در نتیجه یک صافی متناهی به‌صورت

$$0=\psi^{s+t+1}H^{s+t}\subseteq\psi^{s+t}H^{s+t}\subseteq\cdots\subseteq\psi^1H^{s+t}\subseteq\psi^0H^{s+t}=H^{s+t}$$

موجود است به‌طوری‌که به‌ازای هر i کوچک‌تر از $s+t+1$، ${}^{II}\mathrm{E}_\infty^{s+t-i,i}\cong\psi^{s+t-i}H^{s+t}/\psi^{s+t-i+1}H^{s+t}$.

چون H^{s+t} متعلق به $\mathcal{S}$ است پس ψ^sH^{s+t} نیز متعلق به $\mathcal{S}$ است. در نتیجه ${}^{II}\mathrm{E}_\infty^{s,t}\cong\psi^sH^{s+t}/\psi^{s+1}H^{s+t}$ عضوی از $\mathcal{S}$ است و $\lambda\left({}^{II}\mathrm{E}_\infty^{s,t}\right)\preccurlyeq\lambda(\psi^sH^{s+t})\preccurlyeq\lambda(H^{s+t})$. بنابراین ${}^{II}\mathrm{E}_{s+t+2}^{s,t}\in\mathcal{S}$ و

$$\lambda\left({}^{II}\mathrm{E}_{s+t+2}^{s,t}\right)\preccurlyeq\lambda(H^{s+t})$$

زیرا چون به‌ازای هر j بزرگ‌تر از $s+t+1$، ${}^{II}\mathrm{E}_j^{s+j,t+1-j}=0={}^{II}\mathrm{E}_j^{s-j,t-1+j}$ پس

$${}^{II}\mathrm{E}_\infty^{s,t}={}^{II}\mathrm{E}_{s+t+2}^{s,t}.$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.8.4]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.151]

به‌ازای هر r بزرگ‌تر از 1، با فرض $^{II}\mathrm{Z}_r^{s,t} = \mathrm{Ker}\left(^{II}\mathrm{E}_r^{s,t} \longrightarrow {}^{II}\mathrm{E}_r^{s+r,t+1-r}\right)$ و

$$^{II}\mathrm{B}_r^{s,t} = \mathrm{Im}\left(^{II}\mathrm{E}_r^{s-r,t-1+r} \longrightarrow {}^{II}\mathrm{E}_r^{s,t}\right)$$

دنباله‌های دقیق کوتاه

$$0 \longrightarrow {}^{II}\mathrm{Z}_r^{s,t} \longrightarrow {}^{II}\mathrm{E}_r^{s,t} \longrightarrow {}^{II}\mathrm{E}_r^{s,t}/{}^{II}\mathrm{Z}_r^{s,t} \longrightarrow 0$$

و

$$0 \longrightarrow {}^{II}\mathrm{B}_r^{s,t} \longrightarrow {}^{II}\mathrm{Z}_r^{s,t} \longrightarrow {}^{II}\mathrm{E}_{r+1}^{s,t} \longrightarrow 0$$

را داریم. چون بنا به فرض‌های (ب) و (ج)، $^{II}\mathrm{E}_2^{s+r,t+1-r}$ و $^{II}\mathrm{E}_2^{s-r,t-1+r}$ متعلق به $\mathcal{S}$ هستند پس $^{II}\mathrm{E}_r^{s+r,t+1-r}$ و $^{II}\mathrm{E}_r^{s-r,t-1+r}$ نیز متعلق به $\mathcal{S}$ هستند. در نتیجه $^{II}\mathrm{E}_r^{s,t}/{}^{II}\mathrm{Z}_r^{s,t}$ و $^{II}\mathrm{B}_r^{s,t}$ متعلق به $\mathcal{S}$ هستند. از این‌رو، $^{II}\mathrm{E}_r^{s,t}$ متعلق به $\mathcal{S}$ است هرگاه $^{II}\mathrm{E}_{r+1}^{s,t}$ متعلق به $\mathcal{S}$ باشد و داریم

$$\begin{aligned}
\lambda\left(^{II}\mathrm{E}_r^{s,t}\right) &\preccurlyeq \lambda\left(^{II}\mathrm{E}_{r+1}^{s,t}\right) \circ \lambda\left(^{II}\mathrm{E}_r^{s,t}/{}^{II}\mathrm{Z}_r^{s,t}\right) \circ \lambda\left(^{II}\mathrm{B}_r^{s,t}\right)\\
&\preccurlyeq \lambda\left(^{II}\mathrm{E}_{r+1}^{s,t}\right) \circ \lambda\left(^{II}\mathrm{E}_r^{s+r,t+1-r}\right) \circ \lambda\left(^{II}\mathrm{E}_r^{s-r,t-1+r}\right)\\
&\preccurlyeq \lambda\left(^{II}\mathrm{E}_{r+1}^{s,t}\right) \circ \lambda\left(^{II}\mathrm{E}_2^{s+r,t+1-r}\right) \circ \lambda\left(^{II}\mathrm{E}_2^{s-r,t-1+r}\right).
\end{aligned}$$

در نتیجه $^{II}\mathrm{E}_2^{s,t}$ متعلق به $\mathcal{S}$ است و

$$\begin{aligned}
\lambda\left(^{II}\mathrm{E}_2^{s,t}\right) &\preccurlyeq \lambda\left(^{II}\mathrm{E}_3^{s,t}\right) \circ \lambda\left(^{II}\mathrm{E}_2^{s+2,t-1}\right) \circ \lambda\left(^{II}\mathrm{E}_2^{s-2,t+1}\right)\\
&\preccurlyeq \lambda\left(^{II}\mathrm{E}_4^{s,t}\right) \circ \lambda\left(^{II}\mathrm{E}_2^{s+3,t-2}\right) \circ \lambda\left(^{II}\mathrm{E}_2^{s+2,t-1}\right) \circ \lambda\left(^{II}\mathrm{E}_2^{s-2,t+1}\right) \circ \lambda\left(^{II}\mathrm{E}_2^{s-3,t+2}\right)\\
&\preccurlyeq \cdots\\
&\preccurlyeq \lambda\left(^{II}\mathrm{E}_{s+t+2}^{s,t}\right) \circ \left(\circ_{i=0}^{t-1} \lambda\left(^{II}\mathrm{E}_2^{s+t+1-i,i}\right)\right) \circ \left(\circ_{i=t+1}^{s+t-1} \lambda\left(^{II}\mathrm{E}_2^{s+t-1-i,i}\right)\right).
\end{aligned}$$

بنابراین حکم برقرار است.

به‌عنوان کاربردی از قضیهٔ ۹، [۲، قضیهٔ ۳,۲] را در نتیجهٔ ۱۰ تعمیم می‌دهیم.

نتیجهٔ ۱۰. فرض کنیم X یک R–مدول دل‌خواه و M، N دو R–مدول متناهی‌مولد باشند به‌طوری‌که $\mathrm{Supp}_R(N) \cap \mathrm{Supp}_R(M) \cap \mathrm{Supp}_R(X) \subseteq \mathrm{Var}(\mathfrak{a})$. فرض کنیم s، t اعداد صحیح نامنفی باشند به‌طوری‌که

الف) به‌ازای هر i، $\mathrm{Ext}_R^{s+t-i}(\mathrm{Tor}_i^R(N,M),X) \in \mathcal{S}$،

ب) به‌ازای هر i کوچک‌تر از t، $\mathrm{Ext}_R^{s+t+1-i}\left(N, \mathrm{H}_\mathfrak{a}^i(M,X)\right) \in \mathcal{S}$ و

ج) به‌ازای هر i بزرگ‌تر از t، $\mathrm{Ext}_R^{s+t-1-i}\left(N, \mathrm{H}_\mathfrak{a}^i(M,X)\right) \in \mathcal{S}$.

در این صورت $\mathrm{Ext}_R^s\left(N, \mathrm{H}_\mathfrak{a}^t(M,X)\right) \in \mathcal{S}$ و

$$\begin{aligned}
\lambda\left(\mathrm{Ext}_R^s\left(N, \mathrm{H}_\mathfrak{a}^t(M,X)\right)\right) &\preccurlyeq \left(\circ_{i=0}^{s+t} \lambda\left(\mathrm{Ext}_R^{s+t-i}(\mathrm{Tor}_i^R(N,M),X)\right)\right)\\
&\circ \left(\circ_{i=0}^{t-1} \lambda\left(\mathrm{Ext}_R^{s+t+1-i}\left(N, \mathrm{H}_\mathfrak{a}^i(M,X)\right)\right)\right) \circ \left(\circ_{i=t+1}^{s+t-1} \lambda\left(\mathrm{Ext}_R^{s+t-1-i}\left(N, \mathrm{H}_\mathfrak{a}^i(M,X)\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

برهان. با توجه به بند سوم [۲۲، لم ۵,۲] و قضیهٔ ۹ برقرار است.

یادآوری می‌کنیم که یک زیررسته سر از رسته R–مدول‌ها مانند $\mathcal{S}$ را ملکرسون[۱] نسبت به ایده‌آل $\mathfrak{a}$ گوییم هرگاه به‌ازای هر R–مدول $\mathfrak{a}$–تابی مانند X، $(0:_X \mathfrak{a}) \in \mathcal{S}$ نتیجه دهد $X \in \mathcal{S}$ ([۱، تعریف ۱,۲] و [۲، تعریف ۱,۳] را ملاحظه کنید).

1. Melkersson

نتیجهٔ ۱۱. ([۲، نتیجهٔ ۴٫۲] و [۲۳، قضیهٔ ۳٫۲] ملاحظه شود) فرض کنیم X یک R–مدول دل‌خواه و M، N دو R–مدول متناهی‌مولد باشند به‌طوری‌که $\mathrm{Supp}_R(N) \cap \mathrm{Supp}_R(M) \cap \mathrm{Supp}_R(X) \subseteq \mathrm{Var}(\mathfrak{a})$. فرض کنیم t یک عدد صحیح نامنفی باشد به‌طوری‌که

الف) به‌ازای هر i کوچک‌تر از $t+1$، $\mathrm{Ext}_R^{t-i}(\mathrm{Tor}_i^R(N,M),X) \in \mathcal{S}$ و

ب) به‌ازای هر i کوچک‌تر از t، $\mathrm{Ext}_R^{t+1-i}\left(N,\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^i(M,X)\right) \in \mathcal{S}$.

در این صورت $\mathrm{Hom}_R\left(N,\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^t(M,X)\right) \in \mathcal{S}$. به‌ویژه اگر $N = R/\mathfrak{a}$ و $\mathcal{S}$ ملکرسون نسبت به ایده‌آل $\mathfrak{a}$ باشد، آن‌گاه $\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^t(M,X) \in \mathcal{S}$.

برهان. کافی است در نتیجهٔ ۱۰ قرار دهیم $s=0$.

تذکر ۱۲. فرض کنیم X یک R–مدول دل‌خواه، M یک R–مدول متناهی‌مولد و t یک عدد صحیح نامنفی باشد به‌طوری‌که $\mathrm{Ext}_R^t(M/\mathfrak{a}M,X) \in \mathcal{S}$ و به‌ازای هر j کوچک‌تر از t، $\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^j(X) \in \mathcal{S}$. فرض کنیم i یک عدد صحیح نامنفی باشد به‌طوری‌که $1 \le i \le t$. چون به‌ازای هر j کوچک‌تر از

$$t-i+1 \text{ ،} \mathrm{Ext}_R^{t-i-j}\left(\mathrm{Tor}_i^R(R/\mathfrak{a},M),\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^j(X)\right) \in \mathcal{S}$$

پس طبق [۲، قضیهٔ ۱٫۲]، $\mathrm{Ext}_R^{t-i}(\mathrm{Tor}_i^R(R/\mathfrak{a},M),X) \in \mathcal{S}$. بنابراین به‌ازای هر i کوچک‌تر از $t+1$، $\mathrm{Ext}_R^{t-i}(\mathrm{Tor}_i^R(R/\mathfrak{a},M),X) \in \mathcal{S}$. از طرف دیگر با توجه به [۲۲، نتیجهٔ ۹٫۲] و به‌ازای هر i کوچک‌تر از t، $\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^i(M,X) \in \mathcal{S}$. در نتیجه به‌ازای هر i کوچک‌تر از t، $\mathrm{Ext}_R^{t+1-i}\left(R/\mathfrak{a},\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^i(M,X)\right) \in \mathcal{S}$. ازاین‌رو، بنا به نتیجهٔ ۱۱، $\mathrm{Hom}_R\left(R/\mathfrak{a},\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^t(M,X)\right) \in \mathcal{S}$. بنابراین [۲۲، بند اول قضیهٔ ۱۰٫۲ و نتیجهٔ ۱۲٫۲] به‌وسیلهٔ نتیجهٔ ۱۱ بهبود یافته‌اند.

نتیجهٔ ۱۳. ([۲، قضیهٔ ۴٫۴] و [۲۳، قضیهٔ ۷٫۲] را ملاحظه کنید) فرض کنیم X یک R–مدول دل‌خواه و M، N دو R–مدول متناهی‌مولد باشند به‌طوری‌که $\mathrm{Supp}_R(N) \cap \mathrm{Supp}_R(M) \cap \mathrm{Supp}_R(X) \subseteq \mathrm{Var}(\mathfrak{a})$. فرض کنیم t یک عدد صحیح نامنفی باشد به‌طوری‌که

الف) به‌ازای هر i کوچک‌تر از $t+2$، $\mathrm{Ext}_R^{t+1-i}(\mathrm{Tor}_i^R(N,M),X) \in \mathcal{S}$ و

ب) به‌ازای هر i کوچک‌تر از t، $\mathrm{Ext}_R^{t+2-i}\left(N,\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^i(M,X)\right) \in \mathcal{S}$.

در این صورت $\mathrm{Ext}_R^1\left(N,\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^t(M,X)\right) \in \mathcal{S}$.

برهان. کافی است نتیجهٔ ۱۰ را با $s=1$ به‌کار بریم.

قضیهٔ ۱۴. فرض کنیم X یک R–مدول دل‌خواه، M، N دو R–مدول متناهی‌مولد و s، t اعداد صحیح نامنفی باشند. فرض کنیم

الف) به‌ازای هر i، $\mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s+t-i}}\left(\mathrm{N},\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{\mathrm{i}}(\mathrm{M},\mathrm{X})\right) \in \mathcal{S}$،

ب) به‌ازای هر i کوچک‌تر از t، $\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{\mathrm{s+t+1-i}}\left(\mathrm{Tor}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{R}}(\mathrm{N},\mathrm{M}),\mathrm{X}\right) \in \mathcal{S}$ و

ج) به‌ازای هر i بزرگ‌تر از t، $\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{\mathrm{s+t-1-i}}\left(\mathrm{Tor}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{R}}(\mathrm{N},\mathrm{M}),\mathrm{X}\right)$.

در این صورت $\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^s(\mathrm{Tor}_t^R(N,M),X) \in \mathcal{S}$ و

$$\lambda\left(\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^s(\mathrm{Tor}_t^R(N,M),X)\right) \preccurlyeq \left(\circ_{i=0}^{s+t} \lambda\left(\mathrm{Ext}_R^{s+t-i}\left(N,\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^i(M,X)\right)\right)\right)$$
$$\circ \left(\circ_{i=0}^{t-1} \lambda\left(\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{s+t+1-i}(\mathrm{Tor}_i^R(N,M),X)\right)\right) \circ \left(\circ_{i=t+1}^{s+t-1} \lambda\left(\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{s+t-1-i}(\mathrm{Tor}_i^R(N,M),X)\right)\right).$$

برهان. مشابه برهان قضیهٔ ۹ است و به خواننده واگذار می‌شود.

نتیجهٔ ۱۵. ([۲۳، قضیهٔ ۱۳،۲] را ملاحظه کنید) فرض کنیم X یک R–مدول دل‌خواه، M، N دو R–مدول متناهی‌مولد و s یک عدد صحیح نامنفی باشد. فرض کنیم

الف) به‌ازای هر i کوچک‌تر از $s+1$، $\mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s-i}}\left(\mathrm{N}, \mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{\mathrm{i}}(\mathrm{M},\mathrm{X})\right) \in \mathcal{S}$ و

ب) به‌ازای هر i که $0 < i < s$، $\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{\mathrm{s-1-i}}\left(\mathrm{Tor}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{R}}(\mathrm{N},\mathrm{M}),\mathrm{X}\right) \in \mathcal{S}$.

در این صورت $\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{s}(N\otimes_R M, X) \in \mathcal{S}$. به‌ویژه اگر $\mathrm{Supp}_R(N)\cap \mathrm{Supp}_R(M)\cap \mathrm{Supp}_R(X) \subseteq \mathrm{Var}(\mathfrak{a})$ (به‌ترتیب، $N = R/\mathfrak{a}$)، آن‌گاه $\mathrm{Ext}_R^{s}(N\otimes_R M, X) \in \mathcal{S}$ (به‌ترتیب، $\mathrm{Ext}_R^{s}(M/\mathfrak{a}M, X) \in \mathcal{S}$).

برهان. کافی است در قضیهٔ ۱۴ قرار دهیم $t = 0$. قسمت آخر از بند سوم [۲۲، لم ۵،۲] نتیجه می‌شود.

یادآوری می‌کنیم که یک R–مدول مانند X را $(\mathcal{S},\mathfrak{a})$–هم‌متناهی گوییم هرگاه $\mathrm{Supp}_R(X) \subseteq \mathrm{Var}(\mathfrak{a})$ و به‌ازای هر i، مدول $\mathrm{Ext}_R^{i}(R/\mathfrak{a}, X)$ متعلق به $\mathcal{S}$ باشد ([۲، تعریف ۱،۴] ملاحظه شود). توجه می‌کنیم که اگر $\mathcal{S}$ رده R–مدول‌های متناهی‌مولد باشد، آن‌گاه X یک R–مدول $(\mathcal{S},\mathfrak{a})$–هم‌متناهی است اگر و تنها اگر یک R–مدول $\mathfrak{a}$–هم‌متناهی باشد.

نتیجهٔ ۱۶. ([۱۸، نتیجهٔ ۱۰،۳]، [۲، قضیهٔ ۲،۴] و [۲۳، نتیجهٔ ۱۴،۲] ملاحظه شود) فرض کنیم M یک R–مدول متناهی‌مولد، X یک R–مدول دل‌خواه و t یک عدد صحیح نامنفی باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر i کوچک‌تر از $t+1$ (به‌ترتیب، به‌ازای هر i)، $\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{i}(M,X)$ مدولی $(\mathcal{S},\mathfrak{a})$–هم‌متناهی است. در این صورت به‌ازای هر i کوچک‌تر از $t+1$ (به‌ترتیب، به‌ازای هر i)، $\mathrm{Ext}_R^{i}(M/\mathfrak{a}M, X)$ متعلق به $\mathcal{S}$ است.

برهان. برای اثبات حکم، کافی است لم ۷، بند سوم [۲۲، لم ۵،۲] و نتیجهٔ ۱۵ را در نظر گرفته و به استقرا روی t عمل کنیم.

کاربردها

فرض کنیم X یک R–مدول دل‌خواه باشد. بعد انژکتیو و بعد یک‌دست X را به‌ترتیب با $\mathrm{id}_R(X)$ و $\mathrm{fd}_R(X)$ نشان می‌دهیم. نویسنده اول، در [۲۱] و برای عدد صحیح نامنفی t، بعد انژکتیو مدول کوهمولوژی موضعی $\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{t}(X)$ را با بعد انژکتیو X و بعدهای انژکتیو مدول‌های کوهمولوژی موضعی $\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{i}(X)$ که در آن $i \neq t$، مورد مقایسه قرار داد. او، در [۲۱، قضیهٔ ۸،۲]، ثابت کرد که نامساوی

$$\begin{aligned}\mathrm{id}_R\left(\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{t}(X)\right) \leq \sup\{&\mathrm{id}_R(X) - t\}\\ &\cup\left\{\mathrm{id}_R\left(\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{i}(X)\right) - t + i - 1 \,\middle|\, i < t\right\} \cup \left\{\mathrm{id}_R\left(\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{i}(X)\right) - t + i + 1 \,\middle|\, i > t\right\}\end{aligned}$$

برقرار است. در نتیجهٔ زیر، نامساوی مذکور را تعمیم می‌دهیم.

نتیجهٔ ۱۷. فرض کنیم M یک R–مدول متناهی‌مولد، X یک R–مدول دل‌خواه و t یک عدد صحیح نامنفی باشد. در این صورت نامساوی

$$\begin{aligned}\mathrm{id}_R\left(\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{t}(M,X)\right) \leq \sup\{&\mathrm{fd}_R(M) + \mathrm{id}_R(X) - t\}\\ &\cup\left\{\mathrm{id}_R\left(\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{i}(M,X)\right) - t + i - 1 \,\middle|\, i < t\right\} \cup \left\{\mathrm{id}_R\left(\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{i}(M,X)\right) - t + i + 1 \,\middle|\, i > t\right\}\end{aligned}$$

برقرار است.

برهان. فرض کنیم طرف راست نامساوی یک عدد متناهی مانند r باشد. هم‌چنین فرض کنیم $r < s$ و N یک R–مدول متناهی‌مولد باشد. در این صورت اگر در قضیهٔ ۹، $\mathcal{S}$ را رده R–مدول‌های صفر در نظر بگیریم، آن‌گاه $\mathrm{Ext}_R^{s}\left(N, \mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{t}(M,X)\right) = 0$. در نتیجه حکم برقرار است.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.8.4]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.151]

به‌ازای هر ایده‌آل اول از حلقه R مانند $\mathfrak{p}$، عدد $\mu^i(\mathfrak{p},X)=\dim_{\kappa(\mathfrak{p})}\left(\mathrm{Ext}^i_{R_\mathfrak{p}}(\kappa(\mathfrak{p}),X_\mathfrak{p})\right)$ را i–امین عدد باس[۱] X نسبت به $\mathfrak{p}$ گوییم که در آن $\kappa(\mathfrak{p})=R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$. هرگاه R موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ باشد، آن‌گاه $\mu^i(\mathfrak{m},X)$ را با $\mu^i(X)$ و $R/\mathfrak{m}$ را با κ نشان می‌دهیم. برای اعداد صحیح نامنفی s و t، در [۸، قضیهٔ ۶٫۲]، نشان داده شده است که نامساوی

$$\mu^s\left(\mathrm{H}^t_\mathfrak{a}(X)\right)\leq \mu^{s+t}(X)+\sum_{i=0}^{t-1}\mu^{s+t+1-i}\left(\mathrm{H}^i_\mathfrak{a}(X)\right)+\sum_{i=t+1}^{s+t-1}\mu^{s+t-1-i}\left(\mathrm{H}^i_\mathfrak{a}(X)\right)$$

برقرار است. در نتیجهٔ ۱۸، نامساوی مذکور را تعمیم می‌دهیم.

نتیجهٔ ۱۸. فرض کنیم R یک حلقه موضعی، M یک R–مدول متناهی‌مولد، X یک R–مدول دل‌خواه و s، t اعداد صحیح نامنفی باشند. در این صورت نامساوی

$$\mu^s\left(\mathrm{H}^t_\mathfrak{a}(M,X)\right)\leq \sum_{i=0}^{s+t}\dim_\kappa\left(\mathrm{Ext}^{s+t-i}_R(\mathrm{Tor}^R_i(\kappa,M),X)\right)+\sum_{i=0}^{t-1}\mu^{s+t+1-i}\left(\mathrm{H}^i_\mathfrak{a}(M,X)\right)+\sum_{i=t+1}^{s+t-1}\mu^{s+t-1-i}\left(\mathrm{H}^i_\mathfrak{a}(M,X)\right)$$

برقرار است.

برهان. کافی است نتیجهٔ ۱۰ را با $N=\kappa$ به‌کار بریم.

به‌عنوان کاربردی از نتیجهٔ ۱۸، نتیجهٔ ۱۹ را داریم.

نتیجهٔ ۱۹. فرض کنیم R یک حلقه کوهن–مکالی موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ و M یک R–مدول متناهی‌مولد با بعد تصویری متناهی باشد. در این صورت نامساوی

$$\mu^s\left(\mathrm{H}^{\dim(R)}_\mathfrak{m}(M,R)\right)\leq \dim_\kappa\left(\mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{Tor}^R_{s+\dim(R)}(\kappa,M),R\right)\right)$$

را به‌ازای هر s داریم.

برهان. طبق [۲۲، نتیجهٔ ۹٫۲] و [۷، نتیجهٔ ۲٫۳] و به‌ازای هر i مخالف $\dim(R)$، $\mathrm{H}^i_\mathfrak{m}(M,R)=0$. بنابراین حکم از نتیجهٔ ۱۸ حاصل می‌شود.

در دو نتیجهٔ بعدی، [۲، گزارهٔ ۱۰٫۴ و نتیجهٔ ۱۱٫۴] را تعمیم می‌دهیم. توجه می‌کنیم که بنا به نتیجهٔ ۱۶، به‌ازای هر i کوچک‌تر از t، $\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{a},X)$ مدولی متناهی‌مولد است هرگاه به‌ازای هر i کوچک‌تر از t، $\mathrm{H}^i_\mathfrak{a}(X)$ مدولی $\mathfrak{a}$–هم‌متناهی باشد.

نتیجهٔ ۲۰. فرض کنیم M یک R–مدول متناهی‌مولد، X یک R–مدول دل‌خواه و s، t اعداد صحیح نامنفی باشند به‌طوری‌که

الف) به‌ازای هر i کوچک‌تر از $s+t+1$، $\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{a},X)$ مدولی متناهی‌مولد است،

ب) به‌ازای هر i کوچک‌تر از t، $\mathrm{H}^i_\mathfrak{a}(M,X)$ مدولی $\mathfrak{a}$–هم‌متناهی است و

ج) به‌ازای هر i که $t\leq i\leq s+t$، $\mathrm{H}^i_\mathfrak{a}(M,X)$ مدولی مینیماکس است.

در این صورت به‌ازای هر i کوچک‌تر از $s+t+1$، $\mathrm{H}^i_\mathfrak{a}(M,X)$ مدولی $\mathfrak{a}$–هم‌متناهی است.

برهان. با توجه به لم ۷، نتیجهٔ ۱۱ و [۱۸، گزارهٔ ۳٫۴] برقرار است.

نتیجهٔ ۲۱. فرض کنیم M یک R–مدول متناهی‌مولد، X یک R–مدول دل‌خواه و t یک عدد صحیح نامنفی باشد به‌طوری‌که

1. Bass

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.8.4]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.151]

الف) به‌ازای هر i کوچک‌تر از $t+1$، $\mathrm{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a},X)$ مدولی متناهی‌مولد است و

ب) به‌ازای هر i کوچک‌تر از t، $\mathrm{H}_\mathfrak{a}^i(M,X)$ مدولی مینیماکس است.

در این صورت به‌ازای هر i کوچک‌تر از t، $\mathrm{H}_\mathfrak{a}^i(M,X)$ مدولی $\mathfrak{a}$ –هم‌متناهی و $\mathrm{Hom}_R\left(R/\mathfrak{a},\mathrm{H}_\mathfrak{a}^t(M,X)\right)$ مدولی متناهی‌مولد است. هم‌چنین اگر مدول $\mathrm{Ext}_R^{t+1}(R/\mathfrak{a},X)$ نیز متناهی‌مولد باشد، آن‌گاه مدول

$$\mathrm{Ext}_R^1\left(R/\mathfrak{a},\mathrm{H}_\mathfrak{a}^t(M,X)\right)$$

متناهی‌مولد است.

برهان. چون $\mathrm{Hom}_R\left(R/\mathfrak{a},\Gamma_\mathfrak{a}(M,X)\right)\cong\mathrm{Hom}_R(M/\mathfrak{a}M,X)$، بنا به لم ۷، مدولی متناهی‌مولد است پس $\Gamma_\mathfrak{a}(M,X)$، طبق [۱۸، گزارهٔ ۳،۴]، مدولی $\mathfrak{a}$ –هم‌متناهی است. بنابراین با توجه به نتیجهٔ ۲۰ و به هر i کوچک‌تر از t، $\mathrm{H}_\mathfrak{a}^i(M,X)$ مدولی $\mathfrak{a}$ –هم‌متناهی است. در نتیجه طبق لم ۷ و نتیجهٔ ۱۱، $\mathrm{Hom}_R\left(R/\mathfrak{a},\mathrm{H}_\mathfrak{a}^t(M,X)\right)$ مدولی متناهی‌مولد است. قسمت آخر حکم از لم ۷ و نتیجهٔ ۱۳ حاصل می‌شود.

فرض کنیم X یک R –مدول دل‌خواه باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر i، $\mathrm{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a},X)\in\mathcal{S}$ و t یک عدد صحیح نامنفی باشد. در [۲، قضیهٔ ۲،۴] نشان داده شده است که اگر به‌ازای هر i مخالف t، $\mathrm{H}_\mathfrak{a}^i(X)$ مدولی $(\mathcal{S},\mathfrak{a})$ –هم‌متناهی باشد، آن‌گاه $\mathrm{H}_\mathfrak{a}^t(X)$ مدولی $(\mathcal{S},\mathfrak{a})$ –هم‌متناهی است ([۱۷، گزارهٔ ۵،۲] و [۱۸، گزارهٔ ۱۱،۳] را نیز ملاحظه کنید). این مطلب را در نتیجهٔ ۲۲ تعمیم می‌دهیم که [۱۹، نتیجهٔ ۱،۲،۳] را نیز تعمیم داده و بهبود می‌بخشد. توجه می‌کنیم که بنا به [۳، قضیهٔ ۳،۳]، به‌ازای هر i، $\mathrm{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a},X)$ مدولی متناهی‌مولد است اگر و تنها اگر به‌ازای هر i کوچک‌تر از $\mathrm{ara}(\mathfrak{a})+1$، $\mathrm{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a},X)$ مدولی متناهی‌مولد باشد.

نتیجهٔ ۲۲. فرض کنیم M یک R –مدول متناهی‌مولد (که لزوماً با بعد تصویری متناهی نیست)، X یک R –مدول دل‌خواه به‌طوری‌که به‌ازای هر i، $\mathrm{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a},X)\in\mathcal{S}$ و t یک عدد صحیح نامنفی باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر i مخالف t، $\mathrm{H}_\mathfrak{a}^i(M,X)$ مدولی $(\mathcal{S},\mathfrak{a})$ –هم‌متناهی است. در این صورت $\mathrm{H}_\mathfrak{a}^t(M,X)$ مدولی $(\mathcal{S},\mathfrak{a})$ –هم‌متناهی است. به‌ویژه، اگر به‌ازای هر i کوچک‌تر از $\mathrm{ara}(\mathfrak{a})+1$، $\mathrm{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a},X)$ مدولی متناهی‌مولد باشد و به‌ازای هر i مخالف t، $\mathrm{H}_\mathfrak{a}^i(M,X)$ مدولی $\mathfrak{a}$ –هم‌متناهی باشد، آن‌گاه $\mathrm{H}_\mathfrak{a}^t(M,X)$ مدولی $\mathfrak{a}$ –هم‌متناهی است.

برهان. فرض کنیم s یک عدد صحیح نامنفی باشد. چون به‌ازای هر i کوچک‌تر از $s+t+1$، $\mathrm{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a},X)\in\mathcal{S}$ پس بنا به لم ۷ و به‌ازای هر i کوچک‌تر از $s+t+1$، $\mathrm{Ext}_R^{s+t-i}(\mathrm{Tor}_i^R(R/\mathfrak{a},M),X)\in\mathcal{S}$. از این‌رو، با فرض $N=R/\mathfrak{a}$ در نتیجهٔ ۱۰، داریم $\mathrm{Ext}_R^s\left(R/\mathfrak{a},\mathrm{H}_\mathfrak{a}^t(M,X)\right)\in\mathcal{S}$.

در دو نتیجهٔ ۲۳ و ۲۴، [۴، قضایای ۷،۳ و ۸،۳] را تعمیم داده و بهبود می‌بخشیم.

نتیجهٔ ۲۳. فرض کنیم R یک حلقه موضعی، $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل از حلقه R با شرط $\dim(R/\mathfrak{a})\leq 2$، M یک R –مدول متناهی‌مولد، X یک R –مدول دل‌خواه و t یک عدد صحیح نامنفی باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر i کوچک‌تر از $t+2$، $\mathrm{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a},X)$ مدولی متناهی‌مولد است. در این صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:

الف) به‌ازای هر i کوچک‌تر از t، $\mathrm{H}_\mathfrak{a}^i(M,X)$ مدولی $\mathfrak{a}$ –هم‌متناهی است؛

ب) به‌ازای هر i کوچک‌تر از $t+1$، $\mathrm{Hom}_R\left(R/\mathfrak{a},\mathrm{H}_\mathfrak{a}^i(M,X)\right)$ مدولی متناهی‌مولد است.

برهان. (الف)$\Leftarrow$(ب). بنا به لم ۷ و نتیجهٔ ۱۱ برقرار است.

(ب)$\Leftarrow$(الف). کافی است لم ۷، قضیهٔ ۹ و [۴، قضیهٔ ۵،۳] را در نظر گرفته و به استقرا روی t عمل کنیم.

نتیجهٔ ۲۴. فرض کنیم R یک حلقه موضعی، $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل از حلقه R با شرط $\dim(R/\mathfrak{a})\leq 2$، M یک R –مدول متناهی‌مولد و X یک R –مدول دل‌خواه باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر i، $\mathrm{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a},X)$ مدولی متناهی-

مولد است. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند:

الف) اگر به‌ازای هر i، $\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{2i}(M,X)$ مدولی $\mathfrak{a}$ –هم‌متناهی باشد، آن‌گاه به‌ازای هر i، $\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{i}(M,X)$ مدولی $\mathfrak{a}$ –هم‌متناهی است؛

ب) اگر به‌ازای هر i، $\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{2i+1}(M,X)$ مدولی $\mathfrak{a}$ –هم‌متناهی باشد، آن‌گاه به‌ازای هر i، $\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{i}(M,X)$ مدولی $\mathfrak{a}$ –هم‌متناهی است.

برهان. کافی است لم ۷، قضیهٔ ۹ و [۴، قضیهٔ ۵٫۳] را در نظر گرفته و به استقرا روی i عمل کنیم.

در نتیجه زیر، ضعیف‌ترین شرایط ممکن برای متناهی بودن مجموعه ایده‌آل‌های اول وابسته به مدول‌های کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته را بیان می‌کنیم. این نتیجه، [۲، نتیجهٔ ۵٫۲] را تعمیم داده و [۱۵، قضیهٔ ۱٫۳]، [۱۶، قضیهٔ ۳٫۳] و [۲۲، نتیجهٔ ۱۱٫۳] را بهبود می‌بخشد (تذکر ۱۲٫۲ ملاحظه شود). یادآوری می‌کنیم که یک R –مدول مانند X را لسکرین ضعیف[1] گوییم هرگاه مجموعه ایده‌آل‌های اول وابسته به هر مدول خارج‌قسمتی از X متناهی باشد ([۹، تعریف ۱٫۲] ملاحظه شود). رده R –مدول‌های لسکرین ضعیف یک زیررسته سر از رسته R –مدول‌هاست (به بند اول [۹، لم ۳٫۲] مراجعه شود).

نتیجهٔ ۲۵. فرض کنیم X یک R –مدول دل‌خواه، M یک R –مدول متناهی‌مولد و t یک عدد صحیح نامنفی باشد به طوری که

الف) به‌ازای هر i کوچک‌تر از $t+1$، $\mathrm{Ext}_R^{t-i}(\mathrm{Tor}_i^R(R/\mathfrak{a},M),X)$ مدولی لسکرین ضعیف است و

ب) به‌ازای هر i کوچک‌تر از t، $\mathrm{Ext}_R^{t+1-i}\left(R/\mathfrak{a},\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{i}(M,X)\right)$ مدولی لسکرین ضعیف است.

در این صورت $\mathrm{Hom}_R\big(R/\mathfrak{a},\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{t}(M,X)\big)$ مدولی لسکرین ضعیف و در نتیجه مجموعه $\mathrm{Ass}_R\big(\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{t}(M,X)\big)$ متناهی است.

برهان. چون طبق [۶، تمرین ۲۷٫۲٫۱]،

$$\mathrm{Ass}_R\left(\mathrm{Hom}_R\big(R/\mathfrak{a},\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{t}(M,X)\big)\right)=\mathrm{Supp}_R(R/\mathfrak{a})\cap\mathrm{Ass}_R\big(\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{t}(M,X)\big)=\mathrm{Ass}_R\big(\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{t}(M,X)\big)$$

پس حکم با توجه به نتیجهٔ ۱۱ برقرار است.

تشکر و قدردانی

این پژوهش با حمایت مالی دانشگاه پیام نور انجام شده است که بدین‌وسیله قدردانی و تشکر می‌کنیم. هم‌چنین از داوران محترم که نظرات ارزشمندشان موجب بهبود مقاله شد نهایت تشکر و قدردانی را داریم.

منابع

1. Aghapournahr M., Melkersson L., "Local cohomology and Serre subcategories", J. Algebra, 320 (2008) 1275-1287.
2. Aghapournahr M., Taherizadeh A.J., Vahidi A., "Extension functors of local cohomology modules", Bull. Iranian Math. Soc., 37 (2011) 117-134.
3. Bahmanpour K., Aghapournahr M., "A note on cofinite modules", Comm. Algebra, 44 (2016) 3683-3691.
4. Bahmanpour K., Naghipour R., Sedghi M., "Cofiniteness with respect to ideals of small dimensions", Algebr. Represent. Theory, 18 (2015) 369-379.

1. Weakly Laskerian

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.8.4]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.151]

5. Brodmann M.P., Sharp R.Y., "Local Cohomology: An Algebraic Introduction with Geometric Applications", Cambridge University Press, Cambridge (1998).
6. Bruns W., Herzog J., "Cohen-Macaulay Rings", Cambridge University Press, Cambridge (1998).
7. Cuong N.T., Hoang N.V., "On the vanishing and the finiteness of supports of generalized local cohomology modules", Manuscripta Math., 126 (2008) 59-72.
8. Dibaei M.T., Yassemi S., "Bass numbers of local cohomology modules with respect to an ideal", Algebr. Represent. Theory, 11 (2008) 299-306.
9. Divaani-Aazar K., Mafi A., "Associated primes of local cohomology modules", Proc. Amer. Math. Soc., 133 (2005) 655-660.
10. Divaani-Aazar K., Sazeedeh R., Tousi M., "On vanishing of generalized local cohomology modules", Algebra Colloq., 12 (2005) 213-218.
11. Grothendieck A., "Cohomologie Locale des Faisceaux Coherents et Theoremes de Lefschetz Locaux et Globaux (SGA 2)", North-Holland Pub. Co., Amsterdam (1969).
12. Hartshorne R., "Affine duality and cofiniteness", Invent. Math., 9 (1970) 145-164.
13. Hasanzadeh S. H., Vahidi A., "On vanishing and cofinitness of generalized local cohomology modules", Comm. Algebra, 37 (2009) 2290-2299.
14. Herzog J., "Komplexe, Auflosungen und Dualitat in der Lokalen Algebra", Habilitationsschrift, Universitat Regensburg, Regensburg (1970).
15. Khashyarmanesh K., "On the finiteness properties of associated primes of generalized local cohomology modules", Forum Math., 20 (2008) 265-273.
16. Mafi A., "A generalization of the finiteness problem in local cohomology modules", Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci., 119 (2009) 159-164.
17. Marley T., Vassilev J.C., "Cofiniteness and associated primes of local cohomology modules", J. Algebra, 256 (2002) 180-193.
18. Melkersson L., "Modules cofinite with respect to an ideal", J. Algebra, 285 (2005) 649-668.
19. Rahimpour Nasbi Y., Vahidi A., Ahmadi Amoli K., "Torsion functors of generalized local cohomology modules", Comm. Algebra, 45 (2017) 5420-5430.
20. Rotman J.J., "An Introduction to Homological Algebra", Springer Science and Business Media, New York (2008).
21. Vahidi A., "Injective dimensions of local cohomology modules", Bull. Korean Math. Soc., 54 (2017) 1331-1336.
22. Vahidi A., Aghapournahr M., "Some results on generalized local cohomology modules", Comm. Algebra, 43 (2015) 2214-2230.
23. Vahidi A., Hassani F., Hoseinzade E., "Finiteness of extension functors of generalized local cohomology modules", Comm. Algebra, 47 (2019) 1376-1384.
24. Vasconcelos W., "Divisor Theory in Module Categories", North-Holland Pub. Co., Amsterdam (1974).
25. Yassemi S., "Cofinite modules", Comm. Algebra, 29 (2001) 2333-2340.
26. Zoschinger H., "Minimax moduln", J. Algebra, 102 (1986) 1-32.