آرنز منظم نگاشت‌های دو خطی کران‌دار

ابوطالب شیخعلی
دانشگاه پیام نور، دانشکدهٔ علوم پایه، گروه ریاضی
کاظم حق نژادآذر*،
دانشگاه محقق اردبیلی، دانشکدهٔ علوم، گروه ریاضیات و کاربردها
علی عبادیان
دانشگاه ارومیه. دانشکدهٔ علوم. گروه ریاضی

دریافت ۹۷/۰۷/۲۲ پذیرش ۹۷/۱۱/۲۸

چکیده

در این مقاله به خواص آرنز منظم نگاشت دو خطی کران‌دار می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که نگاشت دو خطی کران‌دار $f: X \times Y \to Z$ آرنز منظم است اگر و تنها اگر نگاشت خطی $l_2: Y \to X^*$ با ضابطهٔ $l_2(y) = f^{r*}(z^*, y)$ ضعیف فشرده باشد. سپس قضیه‌ای را اثبات می‌کنیم که ویژگی ضعیف فشردگی نگاشت دو خطی کران‌دار و آرنز منظم را به یک‌دیگر مرتبط می‌سازد. هم‌چنین به بررسی آرنز منظم و خاصیت ضعیف فشردگی نگاشت‌های خطی کران‌دار می‌پردازیم و نتایجی مشابه نتایج دیلز، اولگر و آریکان را بیان می‌کنیم. در ادامه ارتباط بین آرنز منظم جبرهای باناخ و انعکاسی بودن را بررسی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: آرنز منظم، جبر باناخ، دوگان دوم، ضرب‌های آرنز، ضعیف فشردگی، نگاشت دو خطی.

مقدمه

فرض کنیم X، Y و Z فضاهای باناخ باشند و $f: X \times Y \to Z$ نگاشتی دو خطی کران‌دار[1] باشد. آرنز[2] در سال ۱۹۵۱ در [1] نشان داد که توسیع های f به‌صورت‌های f^{***} و f^{r***r} از $X^{**} \times Y^{**}$ به Z^{**} هستند که هر یک از آن‌ها نگاشت دو خطی کران‌داراند. هنگامی‌که این توسیع‌ها برابر باشند آن‌گاه f آرنز منظم نامیده می‌شود. اگر A یک جبر باناخ و نگاشت ضرب، آرنز منظم باشد آن‌گاه جبر باناخ A را آرنز منظم می‌نامیم. فرض کنیم A^* دوگان اول و A^{**} دوگان دوم A باشد. A^* و A^{**} را می‌توان با جمع و ضرب اسکالر به فضای باناخ تبدیل کرد، اما هیچ‌کدام با ضرب نقطه‌ای جبر باناخ نیستند. ضرب‌های اول و دوم آرنز برای دوگان دوم جبرهای باناخ مطرح شدند و برای فضای توپولوژیک هاسدورف و فشرده X، نشان داده شده که این دو ضرب برای دوگان دوم $C(X)$ (جبر تمامی توابع پیوسته روی X) با هم یکی هستند، به‌عبارتی $C(X)$ آرنز منظم است. ضرب‌های آرنز[3] روی A^{**} آن را تبدیل به

*نویسنده مسئول Haghnejad@uma.ac.ir

1.Bounded bilinear mapping
2. R. E. Arens
3. Arens product

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.2.3]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.235]

جبر باناخ می‌کند. برای اطلاعات بیش‌تر به [۱]، [۲]، [۳]، [۴]، [۵]، [۹]، [۱۲] مراجعه شود. اولگر[1] [۱۰] نشان داد که اگر $m: X \times Y \to C$ یک فرم دو خطی کران‌دار باشد آن‌گاه m را می‌توان بدین‌صورت نمایش داد:

$$m(x,y) =< u(x), y >=< x, v(y) >$$

که $u: X \to Y^*$ و $v: Y \to X^*$ عملگرهای خطی پیوسته‌اند و $||u|| = ||v|| = ||m||$. در آن مقاله اشاره شده است که u ضعیف فشرده[2] است اگر و تنها اگر v ضعیف فشرده باشد. مطالب بالا را برای نگاشت‌های l_1 و l_2 که در ادامه تعریف می‌شوند بررسی می‌کنیم. بدین‌ترتیب ضعیف فشردگی را برای نگاشت‌های دو خطی کران‌دار تعریف می‌کنیم.

مفاهیم و مقدمات اولیه

در این بخش خلاصه‌ای از مفاهیم، تعاریف و نتایج اولیه از آرنز منظم نگاشت‌های دو خطی کران‌دار را بیان می‌کنیم:

تعریف ۱. فرض کنیم X، Y و Z فضاهای باناخ باشند و $f: X \times Y \to Z$ نگاشتی دو خطی کران‌دار باشد. الحاقی[3] f که آن را با f^* نمایش می‌دهیم برای هر $x \in X$، $y \in Y$ و $z^* \in Z^*$ بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$f^* : Z^* \times X \to Y^*$$
$$< f^*(z^*, x), y > = < z^*, f(x, y) >$$

که نگاشتی دو خطی کران‌دار است. پس می‌توان الحاقی f^* یعنی $(f^*)^*$ که آن را با f^{**} نمایش می‌دهیم به‌صورت $f^{**} : Y^{**} \times Z^* \to X^*$ و با ضابطهٔ $< f^{**}(y^{**}, z^*), x > = < y^{**}, f^*(z^*, x) >$ تعریف کنیم که $x \in X$ ، $y^{**} \in Y^{**}$ و $z^* \in Z^*$. با ادامه این روند الحاقی مراتب بالاتر نیز تعریف می‌شوند. نگاشت واگرد[4] f که آن را با f^r نمایش می‌دهیم به‌صورت $f^r : Y \times X \to Z$ و با ضابطهٔ $f^r(y,x) = f(x,y)$ تعریف می‌شود، که نگاشتی دو خطی کران‌دار است و می‌توان الحاقی‌های این نگاشت را نیز به‌دست آورد. نگاشت f را آرنز منظم می‌نامیم در صورتی‌که $f^{***} = f^{r***r}$.

تعریف ۲. نگاشت خطی کران‌دار $l: X \to Y$ را ضعیف فشرده می‌نامیم هرگاه $\overline{l(U_X)}$ در Y ضعیف فشرده باشد، که U_X گوی واحد در X است.

تعریف ۳. نگاشت دو خطی کران‌دار $f: X \times Y \to Z$ را در نظر بگیرید. در این‌صورت داریم:

$$< z^*, f(x,y) > = < z^*, f^r(y,x) > =< f^{r*}(z^*, y), x >$$
$$< z^*, f(x,y) > = < f^*(z^*, x), y >$$

حالا مشابه u و v تعریف شده در [10]، برای هر $z^* \in Z^*$ نگاشت‌های خطی کران‌دار $l_1: X \to Y^*$ با ضابطهٔ $l_1(x) = f^*(z^*, x)$ و $l_2: Y \to X^*$ با ضابطهٔ $l_2(y) = f^{r*}(z^*, y)$ را در نظر می‌گیریم. گوییم نگاشت f ضعیف فشرده است هرگاه نگاشت l_1 ضعیف فشرده باشد.

قرارداد ۴. نگاشت $\hat{}: X \to X^{**}$ را نشاندن طبیعی می‌نامیم اگر برای هر $x \in X$ و $x^* \in X^*$ داشته باشیم:

1.A. Ülger
2. Weakly compact
3. Adjoint
4. Flip map

$$< \hat{x}, x^* > = < x^*, x >$$

از آن‌جا که نشاندن طبیعی یکریختی طولپا از X به $\hat{X}$ است، در این مقاله یک فضای باناخ را با تصویر طبیعی آن در دوگان دومش یکی می‌گیریم.

قضیهٔ ۵. فرض کنیم $f: X \times Y \to Z$ نگاشتی دو خطی کران‌دار باشد. در این‌صورت این عبارات معادل هستند:

الف) نگاشت f آرنز منظم است.

ب) $f^{****} = f^{r****r}$.

پ) $f^{****}(\widehat{Z^*}, X^{**}) \subseteq Y^*$.

ت) نگاشت خطی $x \to f^*(z^*, x): X \to Y^*$ برای هر $z^* \in Z^*$ و $x \in X$ ضعیف فشرده است.

برهان. برای اثبات به [۱]، [۲]، [۸] مراجعه کنید.

قضیهٔ ۶. فرض کنیم $f: X \times Y \to Z$ نگاشتی دو خطی کران‌دار باشد. در این‌صورت f آرنز منظم است اگر و تنها اگر $f^{\mathrm{r****r}}(Y^{**}, \widehat{Z^*}) \subseteq X^*$.

برهان. برای اثبات به [۲.۲، ۱۳] مراجعه کنید.

تعریف ۷. نگاشت دو خطی کران‌دار $g_1: X \times Y \to Y$ را از چپ تقریباً یک‌دار[1] (تقریبا یک‌دار چپ) می‌نامیم هرگاه تور کران‌دار $(e_\alpha) \subseteq X$ موجود باشد که برای هر $y \in Y$ داشته باشیم $\lim_{\alpha} g_1(e_\alpha, \mathrm{y}) = \mathrm{y}$. این نگاشت را از چپ یک‌دار[2] می‌نامیم اگر $e \in X$ موجود باشد که برای هر $y \in Y$ داشته باشیم $g_1(e, \mathrm{y}) = \mathrm{y}$. به‌طریق مشابه از راست تقریباً یک‌دار (تقریباً یک‌دار راست) و از راست یک‌دار تعریف می‌شوند.

آرنز منظم نگاشت‌های دو خطی کران‌دار و خاصیت ضعیف فشردگی

در لم ۸ محکی برای آرنز منظم نگاشت‌های دو خطی کران‌دار ارائه می‌دهیم و با استفاده از این محک در ادامه، نتیجه‌ای به‌دست می‌آوریم که آرنز منظم و ضعیف فشردگی نگاشت دو خطی کران‌دار f را به‌هم مرتبط می سازد.

لم ۸. نگاشت دو خطی کران‌دار $f: X \times Y \to Z$ آرنز منظم است اگر و تنها اگر نگاشت خطی کران‌دار l_2 ضعیف فشرده باشد.

برهان. فرض کنیم f آرنز منظم باشد و $z^* \in Z^*$ و $y^{**} \in Y^{**}$. تور (y_β) در Y وجود دارد که با توپولوژی ضعیف ستاره به y^{**} همگراست. برای هر $x^{**} \in X^{**}$ داریم:

$$\begin{aligned} < f^{r****r}(y^{**}, \widehat{z^*}), x^{**} > &= < f^{r****}(\widehat{z^*}, y^{**}), x^{**} > = < \widehat{z^*}, f^{r***}(y^{**}, x^{**}) > \\ &= < f^{r***}(y^{**}, x^{**}), z^* > = < y^{**}, f^{r**}(x^{**}, z^*) > \\ &= \lim_{\beta} < f^{r**}(x^{**}, z^*), y_\beta > = \lim_{\beta} < x^{**}, f^{r*}(z^*, y_\beta) > \\ &= \lim_{\beta} < x^{**}, l_2(y_\beta) > = \lim_{\beta} < l_2^*(x^{**}), y_\beta > \\ &= < y^{**}, l_2^*(x^{**}) > = < l_2^{**}(y^{**}), x^{**} >. \end{aligned}$$

1. Approximately unital
2. Unital

بنابراین $f^{r*****r}(y^{**},\widehat{z^*}) = l_2^{**}(y^{**})$. از آن‌جاکه f آرنز منظم است پس بنا به قضیهٔ ۶ ، $f^{r*****r}(Y^{**},\widehat{Z^*}) \subseteq X^*$ در نتیجه $l_2^{**}(Y^{**}) \subseteq X^*$ بنابراین l_2 ضعیف فشرده است. برای برعکس، فرض کنیم l_2 ضعیف فشرده باشد در این صورت $l_2^{**}(Y^{**}) \subseteq X^*$ پس $f^{r*****r}(Y^{**},\widehat{Z^*}) \subseteq X^*$ بنابراین f آرنز منظم است.

قضیهٔ ۹. فرض کنیم نگاشت $f: X \times Y \to Z$ دو خطی کران‌دار باشد. در این‌صورت l_1 ضعیف فشرده است اگر و تنها اگر l_2 ضعیف فشرده باشد.

برهان. بنا به قضیهٔ ۵ نگاشت l_1 ضعیف فشرده است اگر و تنها اگر f آرنز منظم باشد. از طرفی بنا به لم ۸ f آرنز منظم است اگر و تنها اگر نگاشت خطی کران‌دار l_2 ضعیف فشرده باشد. بنابراین نتیجه می‌گیریم l_1 ضعیف فشرده است اگر و تنها اگر l_2 ضعیف فشرده باشد.

نتیجه زیر که توسیعی از قضیهٔ اولگر در [۲.۲، ۱۰] است بلافاصله از قضیهٔ ۹ به‌دست می‌آید .

نتیجهٔ ۱۰. نگاشت دو خطی کران‌دار $f: X \times Y \to Z$ آرنز منظم است اگر و تنها اگر ضعیف فشرده باشد.

آریکان[1] [۳]، نشان داد که اگر نگاشت‌های $f: X \times Y \to Z$ و $g: X \times W \to Z$ دو خطی کران‌دار باشند و نگاشت $h: Y \to W$ خطی و پیوسته باشد و f توسط g تجزیه شود و $h(U_Y)$ ضعیف فشرده باشد، که U_Y گوی واحد Y است. در این‌صورت f آرنز منظم است. محمدزاده و ابراهیمی ویشکی نیز با استفاده از قضیهٔ ۵ نتیجه مشابهی بدست آوردند [۲.۳، ۸]. در ادامه قضیه‌ای مرتبط با مطالب مذکور بررسی می‌کنیم.

قضیهٔ ۱۱. فرض کنیم $f: X \times Y \to Z$ و $g: W \times Y \to Z$ نگاشت‌های دو خطی کران‌دار باشند و نگاشت $h: X \to W$ خطی، کران‌دار و ضعیف فشرده باشد و برای هر $x \in X$ و $y \in Y$ داشته باشیم $f(x,y) = g(h(x),y)$. در این‌صورت نگاشت‌های f و f^* آرنز منظم‌اند.

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم برای هر $x^{**} \in X^{**}$ و $y^{**} \in Y^{**}$ این تساوی برقرار است:

$$f^{r***r}(x^{**},y^{**}) = g^{r***r}(h^{**}(x^{**}),y^{**})$$

برای این منظور فرض کنیم (x_α) و (y_β) به‌ترتیب تورهایی در X و Y باشند که با توپولوژی ضعیف ستاره به x^{**} و y^{**} همگرایند. در این‌صورت برای هر $z^* \in Z^*$ داریم:

$$\begin{aligned}
< f^{r***r}(x^{**},y^{**}), z^* > &= \lim_\beta \lim_\alpha < z^*, f(x_\alpha, y_\beta) > = \lim_\beta \lim_\alpha < z^*, g(h(x_\alpha), y_\beta) > \\
&= \lim_\beta \lim_\alpha < z^*, g^r\big(y_\beta, h(x_\alpha)\big) > = \lim_\beta \lim_\alpha < g^{r*}(z^*, y_\beta), h(x_\alpha) > \\
&= \lim_\beta \lim_\alpha < h^*\big(g^{r*}(z^*, y_\beta)\big), x_\alpha > = \lim_\beta < x^{**}, h^*\big(g^{r*}(z^*, y_\beta)\big) > \\
&= \lim_\beta < h^{**}(x^{**}), g^{r*}(z^*, y_\beta) > = \lim_\beta < g^{r**}(h^{**}(x^{**}), z^*), y_\beta > \\
&= < y^{**}, g^{r**}(h^{**}(x^{**}), z^*) > = < g^{r***}\big(y^{**}, h^{**}(x^{**})\big), z^* > \\
&= < g^{r***r}(h^{**}(x^{**}), y^{**}), z^* > .
\end{aligned}$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
< f^{r*****r}(y^{**}, z^{***}), x^{**} > &= < f^{r****}(z^{***}, y^{**}), x^{**} > = < z^{***}, f^{r***}(y^{**}, x^{**}) > \\
&= < z^{***}, f^{r***r}(x^{**}, y^{**}) > = < z^{***}, g^{r***r}(h^{**}(x^{**}), y^{**}) >
\end{aligned}$$

---
1. N. Arikan

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.2.3]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.235]

$$= < z^{***}, g^{r***}\left(y^{**}, h^{**}(x^{**})\right) > = < g^{r****}(z^{***}, y^{**}), h^{**}(x^{**}) >$$
$$= < g^{r****r}(y^{**}, z^{***}), h^{**}(x^{**}) > = < h^{***}\left(g^{r****r}(y^{**}, z^{***})\right), x^{**} > .$$

از آن‌جا که h ضعیف فشرده است پس h^* نیز ضعیف فشرده است. بنابراین

$$f^{r****r}\left(Y^{**}, \widehat{Z^*}\right) \subseteq f^{r****r}(Y^{**}, Z^{***}) = h^{***}\left(g^{r****r}(Y^{**}, Z^{***})\right) \subseteq h^{***}(W^{***}) \subseteq X^*$$

پس بنا به قضیهٔ ۶ نگاشت f آرنز منظم است. از آرنز منظم f با استفاده از [۲.۱، ۱۳] نتیجه می‌گیریم $f^{r****r} = f^{*****}$. بنابراین

$$(f^*)^{****}\left(\widehat{Y^{**}}, Z^{***}\right) = f^{*****}\left(\widehat{Y^{**}}, Z^{***}\right) = f^{r****r}\left(\widehat{Y^{**}}, Z^{***}\right) \subseteq X^*$$

پس با استفاده از قضیهٔ ۵ نگاشت f^* نیز آرنز منظم است.

ارتباط آرنز منظم و خاصیت انعکاسی جبر باناخ

دیلز[1]، رودریگرز[2] و ولاسکو[3] [۱. ۴، ۶] نشان دادند که برای نگاشت دو خطی کران‌دار $f: X \times Y \to Z$، نگاشت‌های f و f^{r*} آرنز منظم‌اند اگر و تنها اگر $f^{r*r***} = f^{***r*r}$. در ادامه حالت کلی این قضیه را با روشی متفاوت به اثبات می‌رسانیم.

قرارداد ۱۲. برای سهولت در نگارش، از علامت f^n نیز استفاده می‌کنیم که منظور الحاقی n ام است. به‌عنوان مثال منظور از f^{3r} نگاشت f^{***r} است.

قضیهٔ ۱۳. اگر f و f^{rn} آرنز منظم باشند آن‌گاه $f^{rnr3} = f^{3rnr}$.

برهان. چون f آرنز منظم است پس $f^{3r} = f^{r3}$ بنابراین $f^{3rn} = f^{r(n+3)}$. از طرفی آرنز منظم f^{rn} نتیجه می‌دهد که $f^{r(n+3)} = f^{rnr3r}$. بنابراین $f^{3rn} = f^{rnr3r}$ که همان حکم مطلوب است.

عکس قضیهٔ ۱۳، برای حالت $n = 1$ همان‌گونه که اشاره شد در [۱. ۴، ۶] به اثبات رسیده است. حالت‌های $n = 2, 3$ را در قضیهٔ ۱۴ اثبات می‌کنیم.

قضیهٔ ۱۴. فرض کنیم $f: X \times Y \to Z$ نگاشتی دو خطی کران‌دار باشد. در این‌صورت،

الف) اگر $f^{r2r3} = f^{3r2r}$ آن‌گاه نگاشت‌های f و f^{r2} آرنز منظم‌اند.

ب) اگر $f^{r3r3} = f^{3r3r}$ آن‌گاه نگاشت‌های f و f^{r3} آرنز منظم‌اند.

برهان. الف) برای هر $x^{**} \in X^{**}$، $y^{**} \in Y^{**}$، $z^* \in Z^*$ و $z^{***} \in Z^{***}$ داریم:

$$< f^{***}(x^{**}, y^{**}), z^* > = < f^{***r}(y^{**}, x^{**}), z^* > = < f^{***r*}(z^*, y^{**}), x^{**} >$$
$$= < f^{***r**}(x^{**}, \widehat{z^*}), y^{**} > = < f^{***r**r}(\widehat{z^*}, x^{**}), y^{**} >$$
$$= < f^{r**r***}(\widehat{z^*}, x^{**}), y^{**} > = < \widehat{z^*}, f^{r**r**}(x^{**}, y^{**}) >$$
$$= < \widehat{x^{**}}, f^{r**r*}(y^{**}, z^*) > = < y^{**}, f^{r**r}(z^*, x^{**}) >$$
$$= < y^{**}, f^{r**}(x^{**}, z^*) > =< f^{r***}(y^{**}, x^{**}), z^* >$$

---

1. H. G. Dales
2. A. Rodrigues-Palacios
3. M. V. Velasco

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.2.3]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.235]

$$=< f^{r***r}(x^{**}, y^{**}), z^{*} >.$$

بنابراین f آرنز منظم است. حالا نشان می‌دهیم f^{r**} آرنز منظم است. به‌عبارتی $f^{r**r***r} = f^{r*****}$. از طرفی $f^{r**r***r} = f^{***r**}$، پس کافی است نشان دهیم $f^{r*****} = f^{***r**}$. فرض کنیم $x^{****} \in X^{****}$ باشد و (x_α^{**}) توری در X^{**} باشد که با توپولوژی ضعیف ستاره به x^{****} همگرا است. در این‌صورت

$$< f^{r*****}(x^{****}, z^{***}), y^{**} > = < x^{****}, f^{r****}(z^{***}, y^{**}) > = \lim_\alpha$$
$$< f^{r****}(z^{***}, y^{**}), x_\alpha^{**} >$$
$$= \lim_\alpha < z^{***}, f^{r***}(y^{**}, x_\alpha^{**}) = \lim_\alpha < z^{***}, f^{r***r}(x_\alpha^{**}, y^{**}) >$$
$$= \lim_\alpha < z^{***}, f^{***}(x_\alpha^{**}, y^{**}) > = \lim_\alpha < z^{***}, f^{***r}(y^{**}, x_\alpha^{**}) >$$
$$= \lim_\alpha < f^{***r*}(z^{***}, y^{**}), x_\alpha^{**} > = < x^{****}, f^{***r*}(z^{***}, y^{**}) >$$
$$= < f^{***r**}(x^{****}, z^{***}), y^{**} >.$$

بنابراین f^{r**} نیز آرنز منظم است.

ب) به‌طریق مشابه اثبات می‌شود.

سوال. آیا برعکس قضیهٔ ۲.۳ برای $n > 3$ برقرار است؟

لم ۱۵. الف) اگر $g_1: X \times Y \to Y$ تقریباً یک‌دار چپ باشد آن‌گاه $g_1{}^{r***r} : X^{**} \times Y^{**} \to Y^{**}$ یک‌دار چپ است.

ب) اگر $g_2: X \times Y \to X$ تقریباً یک‌دار راست باشد آن‌گاه $g_2{}^{***} : X^{**} \times Y^{**} \to X^{**}$ یک‌دار راست است.

برهان. ما فقط (الف) را اثبات می‌کنیم. (ب) به طریق مشابه اثبات می‌شود. فرض کنیم g_1 تقریباً یک‌دار چپ باشد. پس تور کران‌دار (e_α) در X وجود دارد که برای هر $y \in \mathrm{Y}$،

$$\lim_\alpha g_1(e_\alpha, \mathrm{y}) = \mathrm{y}.$$

چون تور (e_α) کران‌دار است پس با رفتن به زیر تور مناسبی می‌توان فرض کرد که $e^{**} \in \mathrm{X}^{**}$ موجود است که این تور با توپولوژی ضعیف ستاره به e^{**} همگراست. فرض کنیم تور (y_β) در Y نیز با توپولوژی ضعیف ستاره به $y^{**} \in Y^{**}$ همگرا باشد. در این‌صورت برای هر $y^{*} \in Y^{*}$ داریم:

$$< g_1{}^{r***r}(e^{**}, y^{**}), y^{*} > = < g_1{}^{r***}(y^{**}, e^{**}), y^{*} > = < y^{**}, g_1{}^{r**}(e^{**}, y^{*}) >$$
$$= \lim_\beta < g_1{}^{r**}(e^{**}, y^{*}), y_\beta > = \lim_\beta < e^{**}, g_1{}^{r*}\big(y^{*}, y_\beta\big) >$$
$$= \lim_\beta \lim_\alpha < g_1{}^{r*}\big(y^{*}, y_\beta\big), e_\alpha > = \lim_\beta \lim_\alpha < y^{*}, g_1{}^{r}\big(y_\beta, e_\alpha\big) >$$
$$= \lim_\beta \lim_\alpha < y^{*}, g_1\big(e_\alpha, y_\beta\big) > = \lim_\beta < y^{*}, y_\beta > = < y^{**}, y^{*} >.$$

بنابراین $g_1{}^{r***r}(e^{**}, y^{**}) = y^{**}$ که همان حکم مطلوب است.

تبصرهٔ ۱۶. در لم ۱۵ اگر g_1 تقریباً یک‌دار چپ باشد آن‌گاه لزوماً $g_1{}^{***}$ یک‌دار چپ نیست و اگر g_2 تقریباً یک‌دار راست باشد آن‌گاه لزوماً $g_2{}^{r***r}$ یک‌دار راست نیست. لائو[1] و اولگر نشان دادند که اگر $A = k(c_\circ)$ جبر باناخ از عملگرهای فشرده بر فضای دنباله‌ای $c_\circ$ باشد آن‌گاه A دارای همانی تقریبی کران‌دار است و اگر $g_1 = \pi$ آن‌گاه

1. A. T. Lau

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.2.3]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.235]

g_1^{***} یک‌دار چپ نیست. هم‌چنین اگر $g_2 = \pi^r$ آن‌گاه g_2^{r***r} یک‌دار راست نیست. برای اطلاعات بیش‌تر به [۲.۵، ۷] مراجعه شود.

در [۴.۵، ۶] بیان و اثبات شده است که اگر جبر باناخ A دارای همانی تقریبی کران‌دار باشد، آن‌گاه $\pi^{r*r***} = \pi^{***r*r}$ اگر و تنها اگر A یک فضای باناخ انعکاسی باشد. از آن‌جا که فرض $\pi^{r*r***} = \pi^{***r*r}$ بسیار قوی است (با توجه به [۲.۲، ۸]، معادل با منظم بودن π و π^* است)، ما با جای‌گزینی فرض آرنز منظم π^* که به مراتب فرض ضعیف‌تری است، مطلب بالا را نتیجه می‌گیریم.

قضیهٔ ۱۷. الف) فرض کنیم $g: X \times X \to X$ تقریباً یک‌دار راست باشد، در این‌صورت g^* آرنز منظم است اگر و تنها اگر X انعکاسی باشد.

ب) فرض کنیم $g: X \times X \to X$ تقریباً یک‌دار چپ باشد، در این‌صورت g^{r*} منظم است اگر و تنها اگر X انعکاسی باشد.

برهان. الف) فرض کنیم g^* منظم باشد. از آن‌جا که g تقریبا یک‌دار راست است پس g^{***} یک‌دار راست است. بنابراین $e^{**} \in X^{**}$ وجود دارد که برای هر $x^{**} \in X^{**}$ داریم $g^{***}(x^{**}, e^{**}) = x^{**}$. برای هر $x^{***} \in X^{***}$ داریم

$$
\begin{aligned}
< x^{***}, x^{**} > &= < x^{***}, g^{***}(x^{**}, e^{**}) > = < g^{****}(x^{***}, x^{**}), e^{**} > \\
&= < g^{*r***r}(x^{***}, x^{**}), e^{**} > = < g^{*r***}(x^{**}, x^{***}), e^{**} > \\
&= < g^{*r**}(x^{***}, e^{**}), x^{**} >.
\end{aligned}
$$

بنابراین $g^{*r**}(x^{***}, e^{**}) = x^{***}$. اما چون $g^{*r**} : X^{***} \times X^{**} \to X^*$ پس $x^{***} \in X^*$ در نتیجه X انعکاسی است. اگر X انعکاسی باشد آن‌گاه آرنز منظم g^* بدیهی است.

ب) به‌طریق مشابه اثبات می شود.

نتیجهٔ ۱۸. فرض کنیم A یک جبر باناخ با همانی تقریبی کران‌دار باشد. در این‌صورت، π^* آرنز منظم است اگر و تنها اگر A یک فضای انعکاسی باشد.

برهان. کافی است در قضیه ۱۷ π را جای‌گزین g و A را جای‌گزین X کنیم.

منابع

1. Arens R.,"The adjoint of a bilinear operation", Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951) 839-848.
2. Arikan N., "Arens regularity and reflexivity", Quart. J. Math. Oxford Ser. 32 (1981) 383-388.
3. Arikan N., "A simple condition ensuring the Arens regularity of bilinear mappings", Proc. Amer. Math. Soc. 84 (1982) 525-532.
4. Bonsall F. F., Duncan J.,"Complete normed algebras", Springer-Verlag, Berlin (1973).
5. Dales H. G., "Banach algebras and automatic continuity", Oxford (2000).

6. Dales H. G., Rodrigues-Palacios A., Velasco M. V.,"The second transpose of a derivation", J. London Math. Soc. 64 (2) (2001) 707-721.
7. Lau A. T., Ülger A., "Topological center of certain dual algebras", Trans. Amer. Math. Soc. 384 (3) (1996) 1191-1212.
8. Mohamadzadeh S., Vishki H. R. E., "Arense regularity of module actions and the second adjoint of a derivation", Bulletin of the Australian Math Soc.77 (2008) 465-476.
9. Morrison T. J., "Functional analysis, An introduction to Banach space theory", John Wiley & Sons, Inc. (2001).
10. Ülger A., "Weakly compact bilinear forms and Arens regularity", Proc. Amer. Math. Soc. 101 (1987) 697-704.
11. Ülger A., "Some stability properties of Arens regular bilinear operators", Proc. Amer. Math. Soc. 34 (1991) 443-454.
12. Rudin W., "Functional Analysis", McGraw-Hill, New York, Inc. (1973).
13. Sheikhali A., Kanzi N., "Arens regularity of bilinear mapping and reflexivity", J. Phys. Math. Stat. 5(1) (2018) 65-68.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.2.3]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.235]