(نشریه علوم دانشگاه خوارزمی)

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-11-09]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.13.8]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.621]

مترهای فینسلری λ–هم‌ارز تصویری و پایاهای تصویری فینسلری

اکبر طیبی*، مراد بهادری، حسن صادقی
دانشگاه قم، دانشکدهٔ علوم، گروه ریاضی

دریافت ۹۷/۰۸/۰۹ پذیرش ۹۸/۰۵/۰۱

چکیده

در این مقاله با استفاده از مفهوم مترهای متقارن کروی، مترهای λ–هم‌ارز تصویری را به‌عنوان تعمیمی طبیعی از مترهای هم‌ارز تصویری تعریف می‌کنیم. سپس، مثال‌های غیربدیهی از مترهای λ-هم‌ارز تصویری ارایه می‌کنیم. فرض کنید F و $\bar{F}$ دو متریک λ-هم‌ارز تصویری روی منیفلد M باشند. ابتدا رابطهٔ بین ژئودزی‌های F و $\bar{F}$ را به‌دست می‌آوریم. سپس ثابت می‌کنیم که هر ژئودزی از F مضربی از یک ژئودزی $\bar{F}$ می‌شود و برعکس. در انتها ثابت می‌کنیم که مترهای داگلاس، مترهای ویل و مترهای داگلاس- ویل تعمیم یافته همگی پایاهای λ-هم‌ارز تصویری هستند.

واژه‌های کلیدی: پایای تصویری، متر مسطح تصویری، مترهای هم‌ارز تصویری ، متر داگلاس، متر ویل، متر داگلاس- ویل تعمیم یافته.

مقدمه

مسئلهٔ چهارم هیلبرت[1] در حالت هموار این است که مترهای فینسلری روی زیر مجموعهٔ بـاز U از $\mathbb{R}^n$ را طـوری پیدا کرد که ژئودزی‌هایشان خطوط راست باشند. مترهای فینسلری که در این شرط صـدق کننـد را مترهـای مسـطح تصویری می‌گویند [۶]، [۷]، [۸]، [۹]، [۱۳]، [۱۴]، [۱۷]، [۱۹]، [۲۲].هامل[2] جواب‌هایی برای مسئلهٔ چهارم هیلبـرت پیدا کرد[۵]. او دستگاهی از PDEها را معرفی کرد که مترهـای فینسـلری مسـطح تصـویری را مشـخص مـی‌کردنـد. هم‌چنین هامل نشان داد که متر فینسلر $F = F(x,y)$ روی U مسطح تصویری است اگر و فقط اگر ضرایب ژئودزیک G^i آن بدین‌صورت باشند:

$$G^i(x,y) = P(\mathrm{x},\mathrm{y})\, y^i,$$

که در آن $P\colon TU = U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع همگن مثبت از درجهٔ یک نسبت به y است، یعنی $P(x,\lambda y) = \lambda\, P(x,y), \quad \lambda > 0$. تابع $P = P(x,y)$ را عامل تصویری F می‌گویند. دو متر دلخواه F و $\bar{F}$ روی منیفلد M هم‌ارز تصویری نامیده می‌شوند اگر که

$$G^i(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \bar{G}^i(x,y) + P(x,y)y^i$$

که در آن $G^i = G^i(x,y)$ و $\bar{G}^i = \bar{G}^i(x,y)$ به‌ترتیب ضرایب ژئودزیک F و $\bar{F}$ هستند. در این حالت هر ژئودزیک اولی ژئودزیکی برای دومی است و برعکس.

حال فرض کنیم F و $\bar{F}$ دو متر فینسلری روی منیفلد M باشد.آن‌گاه آنها را λ–هم‌ارز تصویری می‌نامیم اگر که ضرایب ژئودزیک آنها در رابطهٔ (۱) صدق کند.

$$G^i(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \lambda\bar{G}^i(\lambda x,y) + P(x,y)y^i \qquad (۱)$$

*نویسنده مسئول akbar.tayebi@gmail.com

1. Hilbert fourth problem
2. Hamel

که در آن λ یک عدد ثابت و $\mathrm{P}=\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ یک تابع همگن مثبت از درجهٔ یک نسبت به y است. در این حالت نشان می‌دهیم که هر ژئودزیک F مضربی از ژئودزیک $\bar{F}$ می‌شود و برعکس. به‌آسانی می‌توان نشان داد که λ–هم‌ارز تصویری یک رابطهٔ هم ارزی است. اگر $\lambda=1$ آن‌گاه F و $\bar{F}$ هم‌ارز تصویری هستند. علاوه براین اگر $\lambda=0$ آن‌گاه F به یک متر مسطح تصویری[۱] کاهش می‌یابد. در بخش ۳، با استفاده از مفهوم متر متقارن کروی، مثال‌های غیربدیهی از مترهای فینسلری و ریمانی λ–هم‌ارز تصویری ساخته می‌شوند. در هندسهٔ فینسلری متریک‌های مهم و معروف تصویری پایا همانند متر داگلاس[۲]، متر ویل[۳] و غیره وجود دارند [۱]، [۲]، [۱۲]، [۱۳]، [۲۱]. متر فینسلری با شرط $D^i_{jkl}=0$ و $W^i_j=0$ به‌ترتیب متر داگلاس و متر ویل نامیده می‌شوند. هم‌چنین یک متر پایای تصویری پیچیده در هندسهٔ فینسلری وجود دارد که تانسور داگلاس آن در رابطهٔ $D^i_{jkl|m}y^m=T_{jkl}y^i$ صدق می‌کند که در آن T_{jkl} تانسور دلخواه و $D^i_{jkl|m}$ نمایش مشتق افقی کواریانت تانسور انحنای داگلاس نسبت به الصاق بروالد F است. ثابت می‌شود که این رابطه، معادل با این است که به‌ازای هر سه میدان برداری خطی موازی $\mathrm{u}=\mathrm{u}(\mathrm{t})$ و $\mathrm{v}=\mathrm{v}(\mathrm{t})$ و $\mathrm{w}=\mathrm{w}(\mathrm{t})$ در طول ژئودزیک فینسلری دلخواه $\mathrm{c}=\mathrm{c}(\mathrm{t})$ تابع $T=T(t)$ چنان وجود دارد که

$$\frac{d}{dt}[D_{\dot{c}}(u,v,w)]=T\dot{c}.$$

برای مفهوم هندسی این موضوع [۱۲] و [۲۲] ملاحظه شود. چنین متریک‌های فینسلری مترهای داگلاس–ویل تعمیم یافته[۴] نامیده می‌شوند. برای منیفلد M فرض کنیم $\mathrm{GDW}(M)$ نمایش‌دهندهٔ کلاس مترهای داگلاس–ویل تعمیم یافته باشد. باکچو–پاپ[۵] نشان داد که $\mathrm{GDW}(M)$ تحت تبدیلات تصویری یک مجموعه بسته است [۳]. ساکاگوچی[۶] کلاس منیفلدهای فینسلری با انحنای پرچمی اسکالر را بررسی کرده و ثابت کرد که هر متریک ویل یک متریک داگلاس–ویل تعمیم یافته است [۱۵]. در این مقاله ثابت می‌کنیم که کلاس مترهای داگلاس، مترهای ویل و مترهای داگلاس–ویل تعمیم یافته λ–هم‌ارز تصویری است.

قضیهٔ ۱: فرض کنیم F و $\bar{F}$ دو متر فینسلری λ–هم‌ارز تصویری روی منیفلد M باشند آن‌گاه داریم:

(i) $\bar{\sigma}=\bar{\sigma}(t)$ یک ژئودزیک $\bar{F}$ است اگر و فقط اگر $\sigma(t):=\frac{1}{\lambda}\bar{\sigma}(t)$ یک ژئودزی F باشد،

(ii) F یک متر داگلاس است اگر و فقط اگر $\bar{F}$ یک متر داگلاس باشد،

(iii) F یک متر ویل است اگر و فقط اگر $\bar{F}$ یک متر ویل باشد،

(iv) F یک متر داگلاس–ویل تعمیم یافته است اگر و فقط اگر $\bar{F}$ یک متر داگلاس–ویل تعمیم یافته باشد.

لازم به ذکر است که در این پژوهش از الصاق بروالد مربوط به مترهای فینسلری استفاده می‌کنیم و مشتق افقی و عمودی کواریانت تانسورهای فینسلری به‌ترتیب با نمادهای "|" و "," نشان می‌دهیم.

مفاهیم مقدماتی

فرض کنید (M,F) یک منیفلد فینسلری باشد. یک میدان برداری خاص $\boldsymbol{G}$ وجود دارد که به‌وسیلهٔ F روی کلاف مماسی سفته $TM_0:=TM\backslash\{0\}$ تعریف می‌شود. در یک دستگاه مختصات استاندارد (x^i,y^i) برای TM_0 تعریف می‌کنیم.

1. Projectively flat metric
2. Douglas metric
3. Weyl metric
4. Generalized Douglas-Weyl metric
5. Bacso-Pap
6. Sakaguchi

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-11-09]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.13.8]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.621]

$$\boldsymbol{G} = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^i}$$

که در آن

$$G^i(x,y) := \frac{g^{il}}{4}\{\frac{\partial^2 F^2}{\partial x^k \partial y^l} y^k - \frac{\partial F^2}{\partial x^l}\}$$

ضرایب ژئودزیک مربوط به F نامیده می‌شوند. میدان برداری $\boldsymbol{G}$ را اسپری مربوط به منیفلد فینسلر(M,F) می‌نامند. در این‌صورت تصویر یک منحنی انتگرال از G یک ژئودزی M نامیده می‌شود. در مختصات موضعی، یک منحنی $c = c(t)$ یک ژئودزیک از F است اگر و فقط اگر مختصات آن $(c^i(\mathrm{t}))$ در معادلهٔ $\ddot{c}^i + 2G^i(\dot{c}) = 0$ صدق کند.

انحنای ریمانی $R_y = R^i_k dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^i}|_x : T_xM \longrightarrow T_xM$ یک خانواده از نگاشت‌های خطی روی فضای مماسی TM است، که به‌صورت (۲) تعریف می‌شوند:

$$R^i_k = 2\frac{\partial G^i}{\partial x^k} - y^i \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^i \partial y^k} + 2G^i \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^i \partial y^k} - \frac{\partial G^i}{\partial y^j}\frac{\partial G^j}{\partial y^k} \tag{۲}$$

برای یک بردار $y \in T_xM_0$ انحنای ویل[۱] با $W_y(u) := W^i_k(y)u^k \frac{\partial}{\partial x^i}|_x$ تعریف می‌شود که در آن

$$W^i_k := A^i_k - \frac{1}{n+1}\frac{\partial A^m_k}{\partial y^m} y^i \tag{۳}$$

و

$$A^i_k := R^i_k - R\delta^i_k\,, \qquad R := \frac{1}{n-1} R^m_m$$

اگر $W = 0$، آنگاه F را یک متر ویل گویند.

برای بردار ناصفر $y \in T_xM_0$ تانسورهای $B_y : T_xM \otimes T_xM \otimes T_xM \longrightarrow T_xM$ و $E_y : T_xM \otimes T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$ را به ترتیب با $B_y(u,v,w) := B^i_{jkl}(\mathrm{y})u^i v^k w^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_x$ و $E_y(u,v) := E_{ij}(y)u^i v^j$ تعریف می‌کنیم که در آن

$$B^i_{jkl} := \frac{\partial^3 G^i}{\partial y^j \partial y^k \partial y^l}, \qquad E_{ij} := \frac{1}{2}B^m_{ijm}\,،$$

و $w = w^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_x$ و $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_x$ ، $u = u^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_x$. کمیت‌های غیر ریمانی B و E به‌ترتیب انحنای برروالد[۲] و انحنای میانگین برروالد[۳] مربوط به F نامیده می‌شوند [۱۸]، [۲۰]. اگر $B = 0$ و $\mathbf{E} = 0$ آن‌گاه متر F را به‌ترتیب یک متر برروالد و متر برروالد ضعیف گویند.

با استفاده از انحناهای برروالد و میانگین برروالد می‌توان انحنای داگلاس را به‌صورت $D_y : T_xM \otimes T_xM \otimes T_xM \longrightarrow T_xM$ تعریف کرد که در آن

$$D^i{}_{jkl} := B^i{}_{jkl} - \frac{2}{n+1}\{E_{jk}\delta^i_l + E_{jl}\delta^i_k + E_{kl}\delta^i_j + E_{jk,l}y^i\}.$$

متر فینسلری F که در شرط $\mathrm{D} = 0$ صدق کند متر داگلاس نامیده می‌شود [۲]. به‌وضوح هر متر برروالدی یک متر داگلاس نیز هست. ولی مترهای داگلاسی وجود دارند که برروالدی نیستند.

1. Weyl curvature
2. Berwald curvature
3. Mean Berwald curvature

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-11-09]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.13.8]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.621]

در هندسه فینسلری یک پایای تصویری پیچیده وجود دارد که برای یک $\binom{0}{3}$–تانسور دلخواه T_{ijk}، تانسور انحنای داگلاس F در رابطهٔ (۴) صدق می‌کند

$$D^i_{jkl|m}y^m = T_{jkl}y^i. \tag{۴}$$

اگر F در رابطهٔ (۴) صدق کند آن‌گاه آن را یک متر داگلاس–ویل تعمیم یافته می‌گوییم. هم‌چنین در این حالت، به‌طور معادل داریم:

$$h^i_j D^i_{jkl|m}y^m = 0.$$

ثابت می‌شود که کلاس مترهای ویل(مترهای فینسلری با انحنای پرچمی اسکالر) و مترهای داگلاس زیر مجموعه کلاس مترهای داگلاس–ویل تعمیم یافته است.

مثال‌هایی از مترهای λ- هم‌ارز تصویری غیر بدیهی

به‌وضوح مترهای هم‌ارز تصویری و مترهای λ- هم‌ارز تصویری هستند. در این فصل با استفاده از مفهوم متر فینسلری متقارن کروی مثال‌های غیر بدیهی λ- هم‌ارز تصویری ارائه می‌کنیم.

مثال ۱: به‌منظور ساختن مثال‌های غیربدیهی از مترهای λ-هم‌ارز تصویری، به مفهوم متر فینسلری متقارن کروی نیاز داریم. فرض کنیم $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ یک دامنهٔ محدب و F یک متر فینسلری تعریف شده روی Ω باشد. اگر تبدیلات متعامد فضای $\mathbb{R}^n$ به‌عنوان ایزومتری‌هایی از (F,Ω) عمل کند آن‌گاه (F,Ω) فضای متقارن کروی[۱] نامیده می‌شود[۲۳]. در این حالت، (F,Ω) تحت هر دوران در $\mathbb{R}^n$ پایا می‌ماند. اخیراً زو نشان داده است که (F,Ω) متقارن کروی است اگر و فقط اگر F به‌صورت $F(x,y) = u\,\varphi\,(r,s)$ نوشته شود که در آن

$$s := \frac{<x,y>}{|y|}, \qquad \mathrm{r} =: |\mathrm{x}|\,, \qquad \mathrm{u} := |\mathrm{y}|$$

و نمادهای |.| و $< , >$ به‌ترتیب نمایش‌دهندهٔ نرم اقلیدسی و ضرب داخلی در $\mathbb{R}^n$ است. مو-زو[۲] ضرایب اسپری ژئودزیک مربوط به متر فینسلری متقارن کروی $\mathrm{F} = u\,\varphi(\mathrm{r}\,,\mathrm{s})$ را به‌صورت (۵) به‌دست آورد [۱۰]:

$$G^i = uPy^i + u^2Qx^i \tag{۵}$$

که در آن

$$P := -\frac{1}{\phi}[\mathrm{s}\,\phi + (r^2 - s^2)\phi_s] + \frac{1}{2r\phi}(s\phi_r + \mathrm{r}\phi_s)$$

$$Q := \frac{-\phi_r + s\phi_{rs} + r\phi_{ss}}{2r[\phi - s\phi_s + (r^2 - s^2)\phi_{ss}]}$$

مترهای راندرز $\mathrm{F(x,y)} = \mathrm{u}\,\varphi(\mathrm{x,y})$ و $\bar{F} = u\,\bar{\varphi}(r,s)$ را با این رابطه‌ها تعریف می‌کنیم:

$$\varphi(r,s) := \frac{1}{1+r^2} + p(r)s,$$

$$\bar{\varphi}(\mathrm{r,s}) := \frac{1}{1+\lambda^2 r^2} + \mathrm{q(r)s},$$

1. Spherically symmetric metric
2. Mo-Zhou

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-11-09]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.13.8]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.621]

که در آن $p:=\mathrm{p(r)}$ و $q:=q(r)$ دو تابع هموار روی $\mathbb{R}^n$ هستند. با استفاده از رابطهٔ (۵) ، ضرایب اسپری F و $\bar{F}$ بدین‌صورت بیان می‌شوند:

$$G^i(x,y)=\mathrm{u\,p(r,s)y^i}+\frac{u^2}{1+r^2}x^i \quad ، \quad \bar{G}^i(x,y)=u\,q(r,s)y^i+\frac{u^2\lambda^2}{1+\lambda^2r^2}\,x^i$$

به‌وضوح F و $\bar{F}$ دو متر λ-هم‌ارز تصویری است.

مثال ۲: مترهای ریمانی زیر را در نظر می‌گیریم

$$\alpha(\mathrm{x,y}):=\mathrm{u}\exp(r^2)\,، \qquad \bar{\alpha}(x,y):=\mathrm{u}\exp(\lambda^2r^2),$$

که در آن λ یک عدد ثابت است. با یک محاسبه سرراست، ضرایب اسپری مترهای مذکور بدین‌صورت بیان می‌شوند:

$$G^i(x,y)=\mathrm{u\,p(r,s)y^i}-u^2x^i$$
$$\bar{G}^i(\mathrm{x,y})=\mathrm{u}\bar{p}(\mathrm{r,s})\mathrm{y^i}-\lambda^2u^2x^i$$

به‌وضوح α و $\bar{\alpha}$ دو متر λ-هم‌ارز تصویری هستند.

اثبات قضیهٔ ۱

در این بخش ، قصد داریم قضیهٔ ۱ را ثابت کنیم. برای این‌کار، ابتدا روابط بین ژئودزیک‌های دومتر فینسلری λ-هم‌ارز تصویری را پیدا می‌کنیم.

لم ۱. فرض کنیم F و $\bar{F}$ دو متر فینسلری λ-هم‌ارز تصویری باشند. آن‌گاه $\bar{\sigma}=\bar{\sigma}(t)$ یک ژئودزیک از $\bar{F}$ است اگر و فقط اگر $\sigma(\mathrm{t}):=\frac{1}{\lambda}\bar{\sigma}(t)$ یک ژئودزیک از F باشد.

اثبات: فرض کنیم $\bar{\sigma}=\bar{\sigma}(t)$ یک ژئودزی $\bar{F}$ باشد. اسپری $\tilde{G}$ را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{G}:=y^i\frac{\partial}{\partial x^i}-2\tilde{G}^i\frac{\partial}{\partial y^i}$$

که در آن $\tilde{G}^i(\mathrm{x,y}):=\lambda\bar{G}^i(\lambda\,\mathrm{x,y})$. قرار می‌دهیم:

$$\sigma(\mathrm{t}):=\frac{1}{\lambda}\bar{\sigma}(t).$$

آن‌گاه داریم:

$$2\tilde{G}^i(\sigma(t),\dot{\sigma(t)})=2\lambda\bar{G}^i\left(\bar{\sigma}(t),\frac{1}{\lambda}\dot{\bar{\sigma}}(\mathrm{t})\right)=\frac{2}{\lambda}\bar{G}^i(\bar{\sigma}(t) \qquad (۶)$$

چون $\bar{\sigma}(t)$ یک ژئودزی $\bar{F}$ است پس داریم:

$$2\bar{G}^i\left(\bar{\sigma}(t),\dot{\bar{\sigma}}(t)\right)+\lambda\ddot{\sigma}(t)=2\bar{G}^i\left(\bar{\sigma}(t),\dot{\bar{\sigma}}(\mathrm{t})\right)+\ddot{\bar{\sigma}}(t)=0. \qquad (۷)$$

با استفاده از (۶) و (۷) داریم:

$$2\tilde{G}^i(\sigma(t),\dot{\sigma(t)})+\ddot{\sigma}(t)=0$$

بنابراین $\sigma=\sigma(t)$ یک ژئودزیک از $\tilde{G}$ است. به‌آسانی دیده می‌شود که G و $\tilde{G}$ اسپری‌های هم‌ارز تصویری هستند (صفحهٔ۱۷۳، [۱۶]). از این‌رو، $\sigma=\sigma(t)$ یک ژئودزی F است.

فرض کنیم F و $\bar{F}$ دومتر λ-هم‌ارز تصویری با عامل تصویری $\mathrm{P}=\mathrm{P}(x,y)$ باشند. قرار می‌دهیم:

$$\Xi:=P^2-P_{x^k}y^k, \qquad T_k:=3(P_{x^k}-PP_{y^k})+\Xi_{y^k}$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-11-09]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.13.8]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.621]

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-11-09]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.13.8]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.621]

آن‌گاه داریم:

لم ۲. فرض شود F و $\bar{F}$ دومتر λ-هم‌ارز تصویری روی منیفلد M باشند. آن‌گاه رابطهٔ بین انحناهای ریمانی F و $\bar{F}$ بدین‌صورت است:

$$R^{i}{}_{k}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \lambda^2 \bar{R}^{i}{}_{k}(\lambda\mathrm{x},\mathrm{y}) + \Xi(\mathrm{x},\mathrm{y})\delta^i_k + T_k(x,y)\, y^i. \qquad (۸)$$

اثبات: با قرار دادن رابطهٔ (۱) در (۲) به (۸) می‌رسیم.

لم ۳: فرض کنیم F و $\bar{F}$ دومتر λ-هم‌ارز تصویری روی منیفلد M باشند. آن‌گاه F یک متر ویل است اگر و فقط اگر $\bar{F}$ یک متر ویل باشد.

اثبات: با استفاده از لم ۲ داریم:

$$\mathrm{R}(x,y) = \lambda^2 \bar{R}(\lambda x,y) + \Xi(\mathrm{x},\mathrm{y})$$

که در آن

$$\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \coloneqq \frac{1}{n-1} R^m_m(\mathrm{x},\mathrm{y}), \qquad \bar{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \coloneqq \frac{1}{n-1}\bar{R}^m_m(\mathrm{x},\mathrm{y}). \qquad (۹)$$

از (۳) و (۸) داریم:

$$A^i_k(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \lambda^2 \bar{A}^i_k(\lambda\mathrm{x},\mathrm{y}) + T_k(\mathrm{x},\mathrm{y})y^i \qquad (۱۰)$$

که در آن

$$A^i_k \coloneqq R^i_k + \mathrm{R}\,\delta^i_k \qquad \text{و} \qquad \bar{A}^i_k \coloneqq \bar{R}^i_k + \bar{\mathrm{R}}\,\delta^i_k$$

با استفاده از (۱۰) داریم:

$$\frac{\partial A^m_k(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\partial y^m} = \lambda^2 \frac{\partial \bar{A}^m_k(\lambda\mathrm{x},\mathrm{y})}{\partial y^m} + (n+1)T_k(\mathrm{x},\mathrm{y}) \qquad (۱۱)$$

بنابراین از (۳) و (۱۰) و (۱۱) نتیجه می‌شود که

$$W^i_k(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \lambda^2 \bar{W}^i_k(\mathrm{x},\mathrm{y}) \qquad (۱۲)$$

طبق رابطهٔ (۱۲)، دیده می‌شود که $\mathrm{W} = 0$ اگر و فقط $\bar{W} = 0$.

لم ۴. فرض کنیم F و $\bar{F}$ دومتر λ-هم‌ارز تصویری روی منیفلد M باشند. آن‌گاه F یک متر داگلاس است اگر و فقط اگر $\bar{F}$ یک متر داگلاس باشد.

اثبات: از (۱) نسبت به y^k، y^j و y^l مشتق میگیریم:

$$B^i_{jkl}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \lambda \bar{B}^i_{jkl}(\lambda\mathrm{x},\mathrm{y}) + P_{jkl}(\mathrm{x},\mathrm{y})y^i + P_{jk}(\mathrm{x},\mathrm{y})\delta^i_l + P_{lk}\left(y.x\right)\delta^i_j + P_{jl}(\mathrm{x},\mathrm{y})\delta^i_k, \qquad (۱۳)$$

که در آن $P_{ijk} := P_{y^iy^jy^k}$. و $P_{ij} := P_{y^iy^j}$ از (۱۳) نتیجه می‌شود که

$$2E_{kl}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 2\lambda \bar{E}_{kl}(\lambda\mathrm{x},\mathrm{y}) + (n+1)P_{kl}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \qquad (۱۴)$$

از (۱۳) و (۱۴) داریم:

$$D^i_{jkl}\left(\mathrm{x}.y\right) = \lambda D^I_{JKL}\left(\lambda x.y\right) \qquad (۱۵)$$

طبق رابطهٔ (۱۵)، $\mathrm{D} = 0$ اگر و فقط اگر $\bar{D} = 0$.

دو متر فینسلر تصویری F و $\bar{F}$ به‌طور خاص هم‌ارز تصویری هستند اگر عامل تصویری آنها $P = \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ و نسبت به y خطی باشد یعنی $P_{y^iy^j} = 0$ ([۱۱] ملاحظه شود). به‌طور متشابه دو متر λ-هم‌ارز تصویری F و $\bar{F}$ را به‌طور خاص λ-هم‌ارز تصویری گوئیم اگر که $P = P(x,y)$ نسبت به y خطی باشد.

با استفاده از (۱۳) و (۱۴) نتیجهٔ ۱ به‌دست می‌آید.

نتیجهٔ ۱. فرض شود F و $\overline{F}$ دو متر فینسلری به‌طور خاص λ-هم‌ارز تصویری باشند. آن‌گاه داریم:

(i) F متر بروالد است اگر و فقط اگر $\overline{F}$ متر بروالد باشد.

(ii) F متر بروالد ضعیف است اگر و فقط اگر $\overline{F}$ متر بروالد ضعیف باشد.

کمیت غیرریمانی $\boldsymbol{H}_y = H_{ij}dx^i \otimes dx^i$ به‌صورت مشتق کواریانت از انحنای میانگین بروالد $\mathbf{E}$ در طول ژئودزیک تعریف می‌شود. یعنی

$$H_{ij} \coloneqq E_{ij|m}y^m$$

می‌توان $\boldsymbol{H}$-انحنا را بدین‌صورت نوشت:

$$2H_{ij} = y^m \frac{\partial^4 G^k}{\partial y^i \partial y^j \partial y^k \partial x^m} - 2G^m \frac{\partial^4 G^k}{\partial y^i \partial y^j \partial y^k \partial y^m} - \frac{\partial G^m}{\partial y^i} \frac{\partial^3 G^k}{\partial y^j \partial y^k \partial y^m} - \frac{\partial G^m}{\partial y^j} \frac{\partial^4 G^k}{\partial y^i \partial y^k \partial y^m}$$

فرض کنیم F و $\overline{F}$ دومتر λ-هم‌ارز تصویری روی منیفلد n-بعدی M باشند و G^i و $\bar{G}^i$ ضرایب ژئودزیک مربوط به F و $\overline{F}$ باشند. قرار می‌دهید:

$$\frac{\bar{\delta}}{\bar{\delta}x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} - 2\bar{G}^i_j \frac{\partial}{\partial y^i}, \qquad \frac{\delta}{\delta x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} - 2G^i_j \frac{\partial}{\partial y^i}$$

آن‌گاه به‌دست می‌آوریم:

$$\overline{H}_{ij} = y^r \frac{\bar{\delta}}{\bar{\delta}x^r} \bar{E}_{ij}$$

$$= \left(y^r \frac{\delta}{\delta x^r} - 2Py^r \frac{\delta}{\delta y^r}\right)\left(\lambda E_{ij} + \frac{n+1}{2} P_{ij}\right) - \left(\lambda E_{rj} + \frac{n+1}{2} P_{rj}\right)(G^r_i + P_i y^r + P\ \delta^r_i) - \left(\lambda E_{ir} + \frac{n+1}{2} P_{ir}\right)(G^r_j + P_i y^r + P\ \delta^r_i)$$

از رابطهٔ بالا داریم:

$$\overline{H}_{ij} = \lambda H_{ij} \tfrac{(n+1)}{2} P_{ij|s} y^s \tag{۱۶}$$

با استفاده از (۱۶) نتیجهٔ به‌دست می‌آید:

نتیجهٔ ۲. فرض کنیمF و $\overline{F}$ دومتر به‌طور خاص λ-هم‌ارز تصویری باشند.آن‌گاه $\overline{H} = 0$ اگر و تنها اگر $\mathrm{H} = 0$.

لم ۴. فرض کنیم F و $\overline{F}$ دومتر λ-هم‌ارز تصویری باشند. آن‌گاه F یک متر داگلاس-ویل تعمیم یافته است اگر و فقط اگر $\overline{F}$ یک متر داگلاس-ویل تعمیم یافته باشد.

اثبات: فرض شود F یک متر داگلاس-ویل تعمیم یافته باشد آن‌گاه

$$h^r_i D^i_{jkl|m} y^m = 0. \tag{۱۷}$$

تعریف (۱۷) معادل است با

$$h^r_i(\mathrm{x},\mathrm{y}) \left[\tfrac{\partial D^i_{jkl}}{\partial x^m}(\mathrm{x},\mathrm{y}) - D^i_{jk,t}(\mathrm{x},\mathrm{y}) G^t_m(\mathrm{x},\mathrm{y}) + G^i_{mt}(\mathrm{x},\mathrm{y}) D^t_{jkl}(\mathrm{x},\mathrm{y}) - G^t_{mj}(\mathrm{x},\mathrm{y}) D^i_{tkl}\left(y.x\right) - G^t_{mk}\left(y.x\right) D^i_{tlj}(\mathrm{x},\mathrm{y}) - G^t_{ml}(\mathrm{x},\mathrm{y}) D^i_{tjk}(\mathrm{x},\mathrm{y})\right] y^m = 0 \tag{۱۸}$$

که در آن

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-11-09]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.13.8]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.621]

$$D^i_{jkl,t} := \frac{\partial D^i_{jkl}}{\partial y^t}, \qquad G^i_j := \frac{\partial G^i}{\partial y^j}, \qquad G^i_{jk} := \frac{\partial G^i_j}{\partial y^k}$$

با استفاده از (۱) به‌دست می‌آوریم:

$$G^i_j(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \lambda \bar{G}^i_j(\lambda\mathrm{x},\mathrm{y}) + P_j(\mathrm{x},\mathrm{y})y^j + P(\mathrm{x},\mathrm{y})\delta^i_j \tag{۱۹}$$

$$G^i_{jk}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \lambda \bar{G}^i_{jk}(\lambda\mathrm{x},\mathrm{y}) + P_{jk}(\mathrm{x},\mathrm{y})y^j + P_j(\mathrm{x},\mathrm{y})\delta^i_k + P_k(\mathrm{x},\mathrm{y})\delta^i_j \tag{۲۰}$$

که در آن

$$\bar{G}^i_j := \frac{\partial \bar{G}^i}{\partial y^j} \quad ، \quad \bar{G}^i_{jk} := \frac{\partial \bar{G}^i_j}{\partial y^k} \quad ، \quad P_i := \frac{\partial P}{\partial y^i} \quad ، \quad P_{ij} := \frac{\partial P^i}{\partial y^j}$$

با قرار دادن (۱۹) و (۲۰) در (۱۸) به رابطهٔ (۲۱) می‌رسیم.

$$\begin{aligned} h^r_i(\mathrm{x},\mathrm{y})[&\frac{\partial D^i_{jkl}}{\partial x^m}(\mathrm{x},\mathrm{y}) - D^i_{jkl.t}(\mathrm{x},\mathrm{y})\{\lambda\bar{G}^t_m(\lambda\mathrm{x},\mathrm{y}) + P_m(\mathrm{x},\mathrm{y})y^t + P(\mathrm{x},\mathrm{y})\delta^t_m\} \\ &+D^t_{jkl}(\mathrm{x},\mathrm{y})\{\lambda\bar{G}^i_{mt}(\lambda\mathrm{x},\mathrm{y}) + P_{mt}(\mathrm{x},\mathrm{y})y^i + P_m(\mathrm{x},\mathrm{y})\delta^i_t + P_t(\mathrm{x},\mathrm{y})\delta^i_m\} \\ &-D^i_{tkl}(\mathrm{x},\mathrm{y})\{\lambda\bar{G}^t_{mj}(\lambda\mathrm{x},\mathrm{y}) + P_{mj}(\mathrm{x},\mathrm{y})y^t + P_m(\mathrm{x},\mathrm{y})\delta^t_j + P_j(\mathrm{x},\mathrm{y})\delta^t_m\} \\ &-D^i_{tlj}(\mathrm{x},\mathrm{y})\{\lambda\bar{G}^t_{mk}(\lambda\mathrm{x},\mathrm{y}) + P_{mk}(\mathrm{x},\mathrm{y})y^t + P_m(\mathrm{x},\mathrm{y})\delta^t_k + P_k(\mathrm{x},\mathrm{y})\delta^t_m\} \\ &-D^i_{tjk}(\mathrm{x},\mathrm{y})\{\lambda\bar{G}^t_{ml}(\mathrm{x},\mathrm{y}) + P_{ml}(\mathrm{x},\mathrm{y})y^t + P_m(\mathrm{x},\mathrm{y})\delta^t_l + P_l(\mathrm{x},\mathrm{y})\delta^t_m\}\,]y^m = 0. \end{aligned} \tag{۲۱}$$

با استفاده از رابطهٔ (۲۱) داریم:

$$\frac{\partial D^i_{jkl}}{\partial x^m}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \lambda^2 \frac{\partial D^i_{jkl}}{\partial x^m}(\lambda\mathrm{x},\mathrm{y}) \tag{۲۲}$$

(۱۵) و (۲۲) را در (۲۱) قرار می‌دهیم. رابطهٔ (۲۳) به‌دست می‌آید:

$$h^r_i \bar{D}^i_{jkl|m}(\lambda\mathrm{x},\mathrm{y})y^m = 0. \tag{۲۳}$$

چون $h^r_i \bar{h}^l_r = \bar{h}^l_i$ آن‌گاه با ضرب (۲۳) در $\bar{h}^l_r$ داریم:

$$\bar{h}^l_i \bar{D}^i_{jkl|m}(\lambda\mathrm{x},\mathrm{y})y^m = 0$$

بنابراین $\bar{F}$ یک متر داگلاس-ویل تعمیم یافته می‌شود و اثبات عکس به‌همین روش انجام می‌شود.

اثبات قضیهٔ ۱. با استفاده از لم‌های ۱، ۳، ۴ و ۵، قضیهٔ۱ اثبات می‌شود.

منابع

1. Akbar-Zadeh H., "Champ de vecteurs projectifs sur le fibre unitaire", J. Math. Pures Appl. 65 (1986) 47-79.
2. Bacso S., Matsumoto M., "On Finsler spaces of Douglas type, A generalization of notion of Berwald space", Publ. Math. Debrecen, 51 (1997) 385-406.
3. Bacso S., Papp I., "A note on a generalized Douglas space", Periodica Math. Hungarica, 48 (2004) 181-184.
4. Balan V., Stojanov J., "Finsler-type estimators for the cancer cell population dynamics", Publ. Inst. Math (Beograd) (N.S) 98 (2015) 53-69.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-11-09]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.13.8]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.621]

5. Hamel G., "Über die Geometrien in denen die Geraden die Kuurtzesten sind", Math. Ann. 57 (1903) 231-264.
6. Li B., "On the classification of projectively flat Finsler metrics with constant flag curvature", Adv. Math, 257 (2014) 266-284.
7. Mo X., "On some projectively flat Finsler metrics in terms of hypergeometric functions", Israel. J. Math, 184 (2011) 59-78.
8. Mo X., "An Introduction to Finsler geometry, World Scientific Press (2006).
9. Mo X., Wang X., "On projectively related spherically symmetric Finsler metrics", Publ. Math. Debrecen, 88 (2016) 249-259.
10. Mo X., Zhou L., "The curvatures of spherically symmetric Finsler metrics in R^n", arXiv, 1202, 4543.
11. Rafie-Rad M., Rezaei B., "On the projective algebra of Randers metrics of constant flag curvature", SIGMA, 7, 085 (2011) 12.
12. Najafi B., Shen Z., Tayebi A., "On a projective class of Finsler metrics", Publ. Publ. Math. Debrecen, 70 (2007) 211-219.
13. Najafi B., Tayebi A., "A new quantity in Finsler geometry", C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. 349 (2011) 81-83.
14. Najafi B., Tayebi A., "Finsler metrics of scalar flag curvature and projective invariants", Balkan, J. Geom. Appl. 15 (2010) 90-99.
15. Sakaguchi T., "On Finsler spaces of scalar curvature", Tensor N.S, 38 (1982) 211-219.
16. Shen Z., "Differential Geometry of Spray and Finsler Spaces", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2011).
17. Shen Z., "Projectively flat Finsler metrics of constant flag curvature", Trans. Amer. Math. Soc. 355 (2003) 1713-1728.
18. Tayebi A., "On the class of generalized Landsberg manifolds", Periodica Math Hungarica, 72 (2016) 29-36.
19. Tayebi A., Alipour A., "On distance functions induces by Finsler metrics", Publ Math. Debrecen, 90 (2017) 333-357.
20. Tayebi A., Barzegari M., "Generalized Berwald spaces with (α, β)-metrics", Insdagatione. Math, 27 (2016) 670-683.
21. Tayebi A., Sadeghi H., "On generalized Douglas-Weyl (α, β) –metrics", Acta Math. Sinica. Engl. Ser, 31 (10) (2015) 1611-1620.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-11-09]

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.13.8]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.621]

22. Tayebi A., Shahbazi Nia M., "A new class of projectively flat Finsler metrics with constant flag curvature K=1", Differential Geom. Appl. 41 (2015) 123-133.

23. Zhou L., "The spherically symmetric Finsler metrics with isotropic S-curvature", J. Math. Anal. Appl, 431 (2015) 1008-1021.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-11-09]

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.13.8]

[DOI: 10.52547/mmr.6.4.621]