مطالعهٔ حدسی از اردوش روی اعداد رمزی گراف‌ها

غلامرضا امیدی، لیلا ماهرانی*
دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکدهٔ علوم ریاضی
پژوهشگاه دانش‌های بنیادین (IPM)

دریافت ۹۷/۰۸/۲۳ پذیرش ۹۹/۰۳/۱۰

چکیده

عدد رمزی $R(H,G)$ به ازای گراف‌های داده شده‌ی H و G، کوچکترین عدد طبیعی n تعریف می‌شود به‌طوری‌که در هر ۲-رنگ‌آمیزی یالی گراف کامل از مرتبه‌ی n با دو رنگ قرمز و آبی، بتوان زیرگراف تک‌رنگ یک‌ریخت با H از رنگ قرمز یا زیرگراف تک‌رنگ یک‌ریخت با G از رنگ آبی یافت. در سال ۱۹۸۳ اردوش حدس زد که ثابت $c > 0$ موجود است به‌طوری‌که برای هر گراف m یالی و بدون رأس تنهای G، داریم $R(G,G) \leq 2^{c\sqrt{m}}$. این حدس در سال ۲۰۱۱ توسط سوداکو اثبات شد. ما در این مقاله با قرار دادن شرایط مناسب، نتیجهٔ سوداکو را به گراف‌های G1 و $G2$ تعمیم می‌دهیم. هم‌چنین با قرار دادن $G1 = Kn$ و $G2 = Kl + H$ که در آن H یک گراف تنک است، نتیجه‌ی مشابهی برای $R(G1,G2)$ به دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: عدد رمزی، عدد رمزی قطری، حدس اردوش

۱- مقدمه

عدد رمزی $R(H,G)$ به ازای گراف‌های داده شده‌ی H و G، کوچکترین عدد طبیعی n تعریف می‌شود به‌طوری‌که در هر ۲-رنگ‌آمیزی یالی گراف کامل از مرتبه‌ی n با دو رنگ قرمز و آبی، بتوان زیرگراف یک‌ریخت با H از رنگ قرمز یا زیرگراف یک‌ریخت با G از رنگ آبی یافت. $R(G,G)$ را عدد رمزی قطری گراف G یا به اختصار عدد رمزی گراف G می‌گوییم و با $R(G)$ نمایش می‌دهیم. وجود این عدد طبق قضیه‌ی کلاسیک رمزی تضمین شده است [۹]. تعداد رئوس گراف را مرتبه‌ی گراف می‌گوییم. مکمل گراف G را با نماد G^c نشان می‌دهیم.

* نویسندهٔ مسئول: maherani@ipm.ir

در سال ۱۹۳۵ اردوش و زکرس برای اولین بار از قضیه‌ی رمزی در نظریه‌ی گراف استفاده کردند [۶]. نتایج و تکنیک‌های آن در شاخه‌های دیگر ریاضی مانند نظریه مجموعه‌ها، توپولوژی، هندسه، منطق، نظریه اطلاعات و ... به کار می‌روند [۱۰].

نظریه‌ی رمزی شاخه‌ای از ریاضیات است که به افتخار منطق‌دان انگلیسی، فرنک رمزی، به این نام نامگذاری شده است. پایه‌ی این نظریه، مطالعه‌ی وجود زیرساختار مشخص در یک کلاس افراز، به ازای هر افراز یک ساختار به اندازه‌ی کافی بزرگ است. به طور کلی این قضیه بیان می‌کند که، هرگاه زیرمجموعه‌های r عضوی یک مجموعه‌ی به اندازه‌ی کافی بزرگ S را به q کلاس افراز کنیم، یک زیرمجموعه‌ی p عضوی از S وجود دارد که تمام زیرمجموعه‌های r عضوی آن در یک کلاس قرار گیرند. این قضیه تعمیمی از اصل لانه کبوتری نیز است.

با این که تعیین مقدار دقیق اعداد رمزی دشوار است ولی تاکنون اعداد رمزی کلاس‌های مختلفی از گراف‌ها تعیین شده است [۸]. برای بسیاری از گراف‌هایی که هنوز مقدار دقیق اعداد رمزی محاسبه نشده، حدس‌ها و کران‌های زیادی وجود دارد. یکی از مسأله‌های جالب در نظریه رمزی، محاسبه‌ی اعداد رمزی قطری گراف‌ها است. در تعیین عدد رمزی قطری گراف‌ها، شاید پیچیده‌ترین مسأله، تعیین عدد رمزی $R(K_n)$ است. این عدد اولین بار توسط اردوش و زکرس در سال ۱۹۳۵ مطالعه شد که در این میان می‌توان به قضیه‌ی زیر اشاره کرد.

قضیه ۱ [۶] برای هر عدد صحیح و مثبت n، $R(K_n) \leq 2^{2n}$.

اگرچه در نگاه اول این کران بسیار بزرگ به نظر می‌رسد ولی اردوش در سال ۱۹۴۷ موفق شد با روش‌های احتمالاتی یک کران پایین نمایی نیز برای $R(K_n)$ ارایه کند [۳].

قضیه ۲ [۳] اگر $n > 2$ عدد صحیح و مثبت باشد، آن‌گاه $R(K_n) > 2^{\frac{n}{2}}$.

تلاش‌های بسیار زیادی برای بهتر کردن این دو کران انجام شده است ولی بهترین کران توسط کنلن در سال ۲۰۱۰ به دست آمده است [۲].

قضیه ۳ [۲] عدد ثابت و مثبت c وجود دارد به طوری که $R(K_{n+1}) \leq n^{-c\frac{\log n}{\log\log n}}\binom{2n}{n}$.

مسأله‌ی جالب دیگر در رابطه با عدد رمزی قطری گراف‌ها، تعیین عدد رمزی گراف‌های m یالی است. مسأله‌ی مورد نظر در این زمینه توسط اردوش و گراهام مطرح شد [۵]. هدف آن‌ها یافتن گرافی با بیشترین عدد رمزی در بین تمام گراف‌های m یالی بود. آن‌ها حدس زدند این گراف، گراف کامل با $m=\binom{n}{۲}$ یال است ولی نتوانستند ادعای خود را ثابت کنند. طبق قضیه‌ی ۲، عدد رمزی گراف کامل m یالی از مرتبه‌ی n، نمایی و طبق قضیه‌ی ۱، حداکثر برابر $۲^{۲n}$ است. از طرفی برای nهای به اندازه‌ی کافی بزرگ، n به طور تقریبی مضربی از $\sqrt{m}$ است. در نتیجه اردوش حدس زیر را مطرح کرد.

حدس ۴ [۴] ثابت $c>۰$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر گراف G با m یال و بدون رأس تنها داریم، $R(G)\leq ۲^{c\sqrt{m}}$.

الون و همکارانش در سال ۲۰۰۳ با اثبات قضیه‌ی زیر، درستی حدس را برای گراف‌های دوبخشی ثابت کردند.

قضیه ۵ [۱] فرض کنید G گراف دوبخشی با m یال و بدون رأس تنها است. در این صورت خواهیم داشت، $R(G)\leq ۲^{۱۶\sqrt{m}+۱}$.

هم‌چنین آن‌ها در مقاله‌ی خود حکم زیر را برای هر گراف دلخواه اثبات کردند. در این مقاله تابع $\log x$ در مبنای ۲ است.

قضیه ۶ [۱] اگر G گراف m یالی و بدون رأس تنها باشد، آن‌گاه $R(G)\leq ۲^{c\sqrt{m}\log m}$، که در آن c ثابتی مثبت است.

آن‌ها در اثبات‌هایشان از روش انتخاب تصادفی وابسته استفاده کرده‌اند که یک تکنیک قدرتمند مبتنی بر روش‌های احتمالاتی است. برای مطالعه‌ی بیشتر در مورد این تکنیک می‌توان به [۷] رجوع کرد.

در نهایت سوداکو موفق شد در سال ۲۰۱۱ درستی حدس ۴ را اثبات کند [۱۱].

قضیه ۷ [۱۱] فرض کنید G گرافی m یالی و بدون رأس تنها باشد. در این صورت داریم، $R(G)\leq ۲^{۲۵۰\sqrt{m}}$.

هدف در این مقاله اثبات دو قضیه‌ی زیر است. قضیه‌ی ۸ تعمیمی از قضیه‌ی ۷ است. قضیه‌ی ۹ را از قضیه‌ی ۸ و نتیجه‌ای در [۱] که در مورد اعداد رمزی گراف‌های با درجه ماکزیمم محدود و گراف کامل است، به دست می‌آوریم. اثبات قضیه‌های ۸ و ۹ در بخش آخر آورده شده‌اند.

قضیه ۸ *فرض کنید $G_۱$ و $G_۲$ گراف‌هایی به ترتیب از مرتبه‌ی $n_۱$ و $n_۲$ و بدون رأس تنها هستند. هم‌چنین فرض کنید $n = \max\{n_۱, n_۲\}$ و m عدد صحیح و مثبتی است که در شرط $n - ۲۷\sqrt{m} \leq ۲^{\frac{۱۰۶\sqrt{m}}{\log m}}$ صدق می‌کند. اگر برای هر $۲۷ \leq \alpha \leq \frac{\log^۳ m}{۸}$ دو شرط زیر برقرار باشند:*

۱. *برای هر $۱ \leq i \leq ۲$، زیرمجموعه‌ی $T_i \subseteq V(G_i)$ وجود دارد به‌طوری‌که، $|T_i| \leq \alpha\sqrt{m}$ و $\Delta(G_i - T_i) \leq \frac{۲\sqrt{m}}{\alpha}$.*

۲. *رای هر $۱ \leq i \leq ۲$، زیرمجموعه‌ی $R_i \subseteq V(G_i)$ وجود دارد به‌طوری‌که، $|R_i| \leq m^{\frac{۳}{۴}}$ و با فرض $G''_i = G_i - R_i$، داشته باشیم، $\max\{R(G''_۱, G_۲), R(G_۱, G''_۲)\} \leq ۲^{۳۶\sqrt{m}}$.*

آن‌گاه، $R(G_۱, G_۲) \leq ۲^{۲۵۰\sqrt{m}}$.

برای دو گراف دلخواه G و H، $G + H$ گرافی با مجموعه رأس‌های $V(G \cup H)$ و مجموعه یال‌های

$$E(G \cup H) \cup \{uv | u \in V(G), v \in V(H)\}$$

است.

قضیه ۹ *فرض کنید $G_۱ = K_{n_۱}$، $m > ۲۷$، $n_۱ \leq ۲۷\sqrt{m} + \frac{۱۶\sqrt{m}}{\log^۳ m}$ و $G_۲ = K_\ell + H$ به‌طوری‌که $\ell \leq ۲۷\sqrt{m}$ و H گرافی با $n(H) \leq ۲^{\frac{۱۰۶\sqrt{m}}{\log m}}$ و $\Delta(H) \leq \frac{۱۶\sqrt{m}}{\log^۳ m}$ است. هم‌چنین فرض کنید مجموعه‌ی $S \subseteq V(H)$ وجود دارد به‌طوری‌که $|S| \leq m^{\frac{۳}{۴}} - ۲۷\sqrt{m}$ و $\Delta(H - S) < \frac{\log m}{۴}$. دراین‌صورت داریم، $R(G_۱, G_۲) \leq ۲^{۲۵۰\sqrt{m}}$.*

در ادامه‌ی این بخش، نتایج مهمی را که از قضیه‌های ۸ و ۹ استخراج می‌شوند، ارایه می‌کنیم.

نتیجه ۱۰ *فرض کنید G_i، $۱ \leq i \leq ۲$، گرافی m_i یالی و بدون رأس تنها است. اگر $m = \max\{m_۱, m_۲\}$، آن‌گاه $R(G_۱, G_۲) \leq ۲^{۲۵۰\sqrt{m}}$.*

اثبات. چون G_i، $۱ \leq i \leq ۲$، گرافی m_i یالی است پس حداکثر $۲m$ رأس دارد. طبق قضیه‌ی ۱، داریم $R(G_۱, G_۲) \leq R(K_{۲m}) \leq ۲^{۴m}$. اگر فرض کنیم $m \leq ۶۰^۲$، آن‌گاه $۲۵۰\sqrt{m} \geq ۴m$ و به راحتی نتیجه می‌شود که $R(G_۱, G_۲) \leq ۲^{۲۵۰\sqrt{m}}$. پس می‌توان فرض کرد که $m > ۶۰^۲$. با قرار دادن $n = \max\{n_۱, n_۲\}$ که n_i تعداد رأس‌های G_i، $۱ \leq i \leq ۲$ است، آن‌گاه چون $G_۱$ و $G_۲$ رأس تنها ندارند، واضح است که $m^{\frac{۳}{۲}} \geq ۲m \geq n$ و

$$۲^{\frac{۱۰۶\sqrt{m}}{\log m}} \geq ۲m - ۲۷\sqrt{m} \geq n - ۲۷\sqrt{m}.$$

از طرف دیگر، اگر به‌ازای هر $۲۷ \leq \alpha \leq \frac{\log^۳ m}{۸}$، به تعداد $\alpha\sqrt{m}$ رأس با درجه‌ی ماکزیمم از رأس‌های G_i را حذف کنیم و زیرگراف القایی روی رأس‌های باقی‌مانده را G'_i بنامیم، آن‌گاه خواهیم داشت $\Delta(G'_i) \leq \frac{۲m}{\alpha\sqrt{m}} \leq \frac{۲\sqrt{m}}{\alpha}$. بنابراین شرط ۱ در قضیه‌ی ۸ برقرار است. از طرفی چون $m^{\frac{۳}{۲}} \geq n$، با قرار دادن $R_i = G_i$، برای $۱ \leq i \leq ۲$، شرط ۲ در قضیه‌ی ۸ نیز برقرار است. بنابراین با استفاده از قضیه‌ی ۸ نتیجه‌ی مطلوب حاصل می‌گردد. ■

نتیجه ۱۱ *فرض کنید G_i، $۱ \leq i \leq ۲$، گرافی از مرتبه‌ی n_i و بدون رأس تنها است. اگر $n = \max\{n_۱, n_۲\}$ و زیرمجموعه‌ی $T_i \subseteq V(G_i)$، $۱ \leq i \leq ۲$، موجود باشد چنان‌که داشته باشیم $|T_i| \leq ۲۷\sqrt[۳]{n}$ و $\Delta(G_i - T_i) \leq ۵۴\frac{\sqrt[۳]{n}}{\log^۳ n}$، آن‌گاه $R(G_۱, G_۲) \leq ۲^{۲۵۰\sqrt[۳]{n}}$.*

اثبات. با قرار دادن $m = n^{\frac{۲}{۳}}$ در قضیه‌ی ۸ خواهیم داشت

$$\Delta(G_i - T_i) \leq ۵۴\frac{\sqrt[۳]{n}}{\log^۳ n} = ۵۴\frac{\sqrt[۳]{m^{\frac{۳}{۲}}}}{\log^۳ m^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{۲\sqrt{m}}{\frac{\log^۳ m}{۸}} \leq \frac{۲\sqrt{m}}{\alpha}.$$

بنابراین شرط ۱ در قضیه‌ی ۸ برقرار است. هم‌چنین با قرار دادن $R_۱ = G_۱$ و $R_۲ = G_۲$

شرط ۲ نیز در قضیه‌ی ۸ برقرار می‌شود و نتیجه‌ی مطلوب به دست می‌آید. ■

نتیجه ۱۲ *فرض کنید* $G_1 = K_{n_1}$، $m > 27$، $n_1 \leq 27\sqrt{m}+\frac{16\sqrt{m}}{\log^3 m}$ و $G_2 = K_{\ell_1}+K^c_{\ell_2}$، *به‌طوری‌که شرایط* $\ell_1 \leq 27\sqrt{m}$ و $\ell_2 \leq 2^{106\frac{\sqrt{m}}{\log m}}$ *برقرار باشند. در این صورت داریم،* $R(G_1, G_2) \leq 2^{250\sqrt{m}}$.

اثبات. به وضوح، $n = \max\{n_1, \ell_1 + \ell_2\} \leq 27\sqrt{m} + 2^{106\frac{\sqrt{m}}{\log m}}$. هم‌چنین به راحتی دیده می‌شود که شرط ۱ در قضیه‌ی ۸ برقرار است. از طرف دیگر چون $m > 27$، رابطه‌های $n_1 \leq m^{\frac{3}{4}}$ و $\ell_1 \leq m^{\frac{3}{4}}$ به دست می‌آیند. با قرار دادن $R_1 = G_1$ و $R_2 = K_{\ell_1}$، شرط ۲ در قضیه‌ی ۸ برقرار می‌شود و نتیجه حاصل می‌گردد.

نتیجه ۱۳ *به‌ازای اعداد صحیح و مثبت* p و q، $q \leq 2^{\frac{53p}{27\log\frac{p}{27}}}$ *داریم،*

$$R(K_p, K_{p,q}) \leq R(K_p, K_p + K^c_q) \leq 2^{\frac{250}{27}p}.$$

اثبات. قرار می‌دهیم $n_1 = \ell_1 = p = 27\sqrt{m}$، $\ell_2 = q$ و از نتیجه‌ی ۱۲ استفاده می‌کنیم.

۲- لم‌های کاربردی

در این بخش، تعاریف، نمادها و لم‌هایی که برای اثبات قضیه‌های ۸ و ۹ مورد نیاز هستند، ارایه شده‌اند.

فرض کنید $G = (V, E)$ گراف دلخواهی است. برای $U \subseteq V$ زیرگراف القایی G روی U را با $G[U]$ نشان می‌دهیم. چگالی یالی $G[U]$ را با $d(U)$ نمایش می‌دهیم و برابر با $d(U) = \frac{e(G[U])}{\binom{|U|}{2}}$ است که در آن $e(G[U])$ تعداد یال‌های $G[U]$ است. فرض کنید X و Y دو زیرمجموعه‌ی مجزای $V(K_n)$ هستند. در یک رنگ‌آمیزی یالی گراف K_n، زوج مرتب (X, Y) را زوج تک‌رنگ گوییم اگر به‌ازای هر $v \in X$، تمام یال‌های $X \cup Y$ واقع بر v تک‌رنگ باشند. منظور از یال‌های $X \cup Y$، یال‌های واقع در X، یال‌های واقع در Y و یال‌های با یک انتها در X و یک انتها در Y است.

در ادامه‌ی این بخش، نتایج مهمی را که از قضیه‌های ۸ و ۹ استخراج می‌شوند، ارایه می‌کنیم.

نتیجه ۱۰ *فرض کنید G_i، $۱ \leq i \leq ۲$، گرافی m_i یالی و بدون رأس تنها است. اگر $m = \max\{m_۱, m_۲\}$، آن‌گاه $R(G_۱, G_۲) \leq ۲^{۲۵۰\sqrt{m}}$.*

اثبات. چون G_i، $۱ \leq i \leq ۲$، گرافی m_i یالی است پس حداکثر $۲m$ رأس دارد. طبق قضیه‌ی ۱، داریم $R(G_۱, G_۲) \leq R(K_{۲m}) \leq ۲^{۴m}$. اگر فرض کنیم $m \leq ۶۰^۲$، آن‌گاه $۲۵۰\sqrt{m} \geq ۴m$ و به راحتی نتیجه می‌شود که $R(G_۱, G_۲) \leq ۲^{۲۵۰\sqrt{m}}$. پس می‌توان فرض کرد که $m > ۶۰^۲$. با قرار دادن $n = \max\{n_۱, n_۲\}$ که n_i تعداد رأس‌های G_i، $۱ \leq i \leq ۲$ است، آن‌گاه چون $G_۱$ و $G_۲$ رأس تنها ندارند، واضح است که $n \leq ۲m \leq m^{\frac{۳}{۲}}$ و

$$۲^{\frac{۱۰۶\sqrt{m}}{\log m}} \geq ۲m - ۲۷\sqrt{m} \geq n - ۲۷\sqrt{m}.$$

از طرف دیگر، اگر به‌ازای هر $\frac{\log^۳ m}{۸} \leq \alpha \leq ۲۷$، به تعداد $\alpha\sqrt{m}$ رأس با درجه‌ی ماکزیمم از رأس‌های G_i را حذف کنیم و زیرگراف القایی روی رأس‌های باقی‌مانده را G'_i بنامیم، آن‌گاه خواهیم داشت $\Delta(G'_i) \leq \frac{۲m}{\alpha\sqrt{m}} \leq \frac{۲\sqrt{m}}{\alpha}$. بنابراین شرط ۱ در قضیه‌ی ۸ برقرار است. از طرفی چون $n \leq m^{\frac{۳}{۲}}$، با قرار دادن $R_i = G_i$، برای $۱ \leq i \leq ۲$، شرط ۲ در قضیه‌ی ۸ نیز برقرار است. بنابراین با استفاده از قضیه‌ی ۸ نتیجه‌ی مطلوب حاصل می‌گردد. ■

نتیجه ۱۱ *فرض کنید G_i، $۱ \leq i \leq ۲$، گرافی از مرتبه‌ی n_i و بدون رأس تنها است. اگر $n = \max\{n_۱, n_۲\}$ و زیرمجموعه‌ی $T_i \subseteq V(G_i)$، $۱ \leq i \leq ۲$، موجود باشد چنان‌که داشته باشیم $|T_i| \leq ۲۷\sqrt[۳]{n}$ و $\Delta(G_i - T_i) \leq ۵۴\frac{\sqrt[۳]{n}}{\log^۳ n}$، آن‌گاه $R(G_۱, G_۲) \leq ۲^{۲۵۰\sqrt[۳]{n}}$.*

اثبات. با قرار دادن $m = n^{\frac{۲}{۳}}$ در قضیه‌ی ۸ خواهیم داشت

$$\Delta(G_i - T_i) \leq ۵۴\frac{\sqrt[۳]{n}}{\log^۳ n} = ۵۴\frac{\sqrt[۳]{m^{\frac{۳}{۲}}}}{\log^۳ m^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{۲\sqrt{m}}{\frac{\log^۳ m}{۸}} \leq \frac{۲\sqrt{m}}{\alpha}.$$

بنابراین شرط ۱ در قضیه‌ی ۸ برقرار است. هم‌چنین با قرار دادن $R_۱ = G_۱$ و $R_۲ = G_۲$

$\alpha \le \frac{1}{8}\log^{3} m$، با جایگذاری $\epsilon = 2^{-3\alpha^{\frac{1}{3}}}$ و $t = 2^{2\alpha^{\frac{1}{3}}}\sqrt{m}$ خواهیم داشت $2^{\alpha^{\frac{1}{3}}} \le \sqrt{m}$، $t \ge \epsilon^{-1}$، $42\alpha^{\frac{1}{3}}2^{-\alpha^{\frac{1}{3}}} \le 48\alpha^{-\frac{1}{3}}$ و

$$2^{5\alpha^{-\frac{1}{3}}\sqrt{m}} \ge 2^{10\frac{\sqrt{m}}{\log m}} \ge m^{\frac{3}{2}} \ge 2^{2\alpha^{\frac{1}{3}}}\sqrt{m} = t.$$

با قرار دادن $G = G'_1$ و $H = F_r[Y]$، زیرگراف القایی از $F[Y]$ روی یال‌های با رنگ قرمز، در لم ۱۶ مجموعه‌ی $S \subseteq Y$ وجود دارد چنان که

$$\begin{aligned} |S| &\ge \epsilon^{-4\Delta(G'_1)\log\epsilon}|Y| \ge (2^{-3\alpha^{\frac{1}{3}}})^{-4\times(2\alpha^{-1}\sqrt{m})\times(-3\alpha^{\frac{1}{3}})}|Y| \\ &= 2^{-72\alpha^{\frac{-1}{3}}\sqrt{m}}|Y| \ge 2^{53\alpha^{\frac{-1}{3}}\sqrt{m}} \ge 2^{\frac{106\sqrt{m}}{\log m}} \ge n - 27\sqrt{m} \end{aligned}$$

و چگالی زیرگراف القایی از رنگ قرمز در $F[S]$ حداکثر ϵ است. هم‌چنین با توجه به نامساوی‌های بالا می‌توان دید $|Y| \ge \epsilon^{4\Delta(G'_1)\log\epsilon}(n - 27\sqrt{m})$. با جایگذاری مقادیر t و ϵ داریم

$$\begin{aligned} |S| &\ge 2^{53\alpha^{\frac{-1}{3}}\sqrt{m}} \ge 2^{5\alpha^{\frac{-1}{3}}\sqrt{m}} \times 2^{48\alpha^{\frac{-1}{3}}\sqrt{m}} \ge t2^{42\alpha^{\frac{1}{3}}2^{-\alpha^{\frac{1}{3}}}\sqrt{m}} \\ &= t(2^{-3\alpha^{\frac{1}{3}}})^{-14\times(2^{-\alpha^{\frac{1}{3}}}\sqrt{m})} = t\epsilon^{-14\epsilon t}. \end{aligned}$$

اکنون با جایگذاری $H = F[S]$ در لم ۱۵ به راحتی می‌توان دید که گراف H شامل زوج تک‌رنگ (X', Y') با شرایط $|X'| \ge t$ و $|Y'| \ge \epsilon^{14\epsilon t}|S|$ است. یادآوری می‌کنیم که $|S| \ge 2^{-72\alpha^{\frac{-1}{3}}\sqrt{m}}|Y|$ است و در نتیجه،

$$|Y'| \ge \epsilon^{14\epsilon t}|S| \ge 2^{-48\alpha^{\frac{-1}{3}}\sqrt{m}}|S| \ge 2^{-120\alpha^{\frac{-1}{3}}\sqrt{m}}|Y|.$$

بنابراین (X', Y') همان زوج مطلوب‌اند. ■

۳- اثبات قضیه‌های اصلی

در این بخش به اثبات قضیه‌های ۸ و ۹ می‌پردازیم.

اثبات قضیه‌ی ۸. قرار دهید $N = ۲^{۲۵۰\sqrt{m}}$ و به تناقض فرض کنید یک ۲ـرنگ‌آمیزی از یال‌های گراف $H = K_N$ با دو رنگ قرمز و آبی وجود دارد به‌طوری‌که شامل زیرگراف قرمز یک‌ریخت با $G_۱$ و زیرگراف آبی یک‌ریخت با $G_۲$ نیست. از آن‌جا که گراف‌های $G_۱$ و $G_۲$ حداکثر n رأس دارند، طبق قضیه‌ی ۱ داریم

$$R(G_۱, G_۲) \leq R(K_n) \leq ۲^{۲n}.$$

بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که $n \geq ۱۲۵\sqrt{m}$.
با قرار دادن $k = \ell = ۲۷\sqrt{m}$، در لم ۱۴ می‌توان نتیجه گرفت که زوج تک‌رنگ $(X_۱, Y_۱)$ با شرایط $|X_۱| \geq ۲۷\sqrt{m}$ و

$$|Y_۱| \geq \binom{k+\ell}{k}^{-۱} N - k - \ell \geq ۴^{-۲۷\sqrt{m}} N = ۲^{۱۹۶\sqrt{m}}$$

وجود دارد. حال دنباله‌ی $\alpha_۱ = ۲۷$ و $\alpha_{i+۱} = ۲^{۲\alpha_i^{\frac{۱}{۳}}}$ را در نظر می‌گیریم. به سادگی می‌توان دید که رابطه‌ی $\alpha_{i+۱} \geq (\frac{۴}{۳})^۳\alpha_i$ به ازای هر i برقرار است و در نتیجه داریم

$$\sum_{j=۱}^{i} \alpha_j^{-\frac{۱}{۳}} \leq \frac{۱}{۳}\sum_{j=۰}^{i-۱}(\frac{۳}{۴})^j \leq \frac{۱}{۳}\sum_{j\geq ۰}(\frac{۳}{۴})^j = \frac{۴}{۳}.$$

از آن‌جا که فرض کردیم در این رنگ‌آمیزی زیرگراف قرمز یک‌ریخت با $G_۱$ و زیرگراف آبی یک‌ریخت با $G_۲$ نداریم، با تکرار لم ۱۷ به‌طور متوالی می‌توان دید که بعد از i مرحله، زوج تک‌رنگ $(X_{i+۱}, Y_{i+۱})$ با شرایط $|X_{i+۱}| \geq \alpha_{i+۱}\sqrt{m}$ و

$$|Y_{i+۱}| \quad \geq \quad ۲^{-۱۲۰\alpha_i^{\frac{-۱}{۳}}\sqrt{m}}|Y_i| \geq ۲^{-۱۲۰\sqrt{m}\sum_{j=۱}^{i}\alpha_j^{-\frac{۱}{۳}}}|Y_۱|$$

$$\geq \quad ۲^{-۱۲۰\sqrt{m}(\frac{۴}{۳})}.۲^{۱۹۶\sqrt{m}} = ۲^{۳۶\sqrt{m}}$$

یافت می‌شود. لم ۱۷ را تکرار می‌کنیم تا اولین اندیس i با شرط $\alpha_i \geq \frac{۱}{۸}\log^۳ m$ به دست آید. سپس قرار می‌دهیم $\alpha = \frac{۱}{۸}\log^۳ m$، $X = X_i$ و $Y = Y_i$. حال زوج تک‌رنگ (X,Y)ای داریم که در آن شرایط $|X| \geq \alpha_i\sqrt{m} \geq \alpha\sqrt{m}$ و

$$|Y| \geq ۲^{۳۶\sqrt{m}} \geq ۲^{۱۲۵\alpha^{-\frac{۱}{۳}}\sqrt{m}}$$

برقرار هستند. اکنون با استفاده دوباره از لم ۱۷ می‌توان زوج تک‌رنگ (X',Y') را پیدا کرد که در آن $|X'| \geq ۲^{۲\alpha^{\frac{۱}{۳}}}\sqrt{m} = m^{\frac{۳}{۲}}$ و $|Y'| \geq ۲^{۳۶\sqrt{m}}$. ابتدا فرض می‌کنیم زوج (X',Y') قرمز است. طبق فرض چون $R(G''_۱, G_۲) \leq ۲^{۳۶\sqrt{m}}$ و این که فرض کردیم زیرگراف آبی یک‌ریخت با $G_۲$ نداریم، بنابراین زیرگراف القایی از رنگ قرمز در $H[Y']$ شامل زیرگراف یک‌ریخت با $G''_۱$ است. در نتیجه $H[X'] + G''_۱$ شامل زیرگراف قرمز یک‌ریخت با $G_۱$ است و این یک تناقض است.

حال اگر فرض کنیم که زوج (X',Y') آبی است، چون $R(G_۱, G''_۲) \leq ۲^{۳۶\sqrt{m}}$ و این که فرض کردیم زیرگراف قرمز یک‌ریخت با $G_۱$ نداریم، زیرگراف القایی از رنگ آبی در $H[Y']$ شامل زیرگراف یک‌ریخت با $G''_۲$ می‌شود. بنابراین $H[X'] + G''_۲$ شامل زیرگراف آبی یک‌ریخت با $G_۲$ است که این یک تناقض است. بنابراین در هر ۲ـرنگ‌آمیزی یالی گراف K_N با دو رنگ قرمز و آبی، می‌توان زیرگراف قرمز یک‌ریخت با $G_۱$ و یا زیرگراف آبی یک‌ریخت با $G_۲$ یافت. ■

برای اثبات قضیه‌ی ۹ از قضیه‌ی زیر استفاده می‌کنیم.

قضیه ۱۸ [۱] فرض کنید H گرافی h رأسی با عدد رنگی $k \geq ۲$ و درجه‌ی ماکزیمم حداکثر r است. در این صورت به‌ازای هر عدد صحیح و مثبت m داریم،

$$R(H, K_m) \leq (\frac{۱۰۰m}{\ln m})^{\frac{(۲r-k+۲)(k-۱)}{۲}}(\ln m)h^r.$$

اثبات قضیه‌ی ۹. قرار می‌دهیم $G''_۲ = H - S$، $n''_۲ = n(G''_۲)$ و $r = \Delta(G''_۲)$. از آن‌جا که

$m > ۲۷$، به سادگی می‌توان دید که $n_۱ \leq ۴۰\sqrt{m}$. دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول: $r = ۰$.
در این‌صورت یک یال e به $G''_۲$ اضافه می‌کنیم. با قرار دادن $H = G''_۲ + e$ در قضیه‌ی ۱۸ داریم،

$$\begin{aligned} R(G''_۲, G_۱) &\leq R(G''_۲ + e, G_۱) \leq (\frac{۱۰۰n_۱}{lnn_۱}) \times lnn_۱ \times n(G''_۲ + e) = \\ &< ۱۰۰n_۱ \times n(G''_۲ + e) < ۱۰۰(۴۰\sqrt{m}) \times ۲^{۱۰۶\frac{\sqrt{m}}{\log m}} \\ &= ۴۰۰۰\sqrt{m} \times ۲^{\frac{۱۰۶\sqrt{m}}{\log m}} = ۲^{\log ۴۰۰۰\sqrt{m} + ۱۰۶\frac{\sqrt{m}}{\log m}} \\ &\leq ۲^{۱۳+\frac{۱}{۲}\log m + ۱۰۶\frac{\sqrt{m}}{\log m}} < ۲^{۳۶\sqrt{m}}. \end{aligned}$$

از آن‌جا که $n(G_۱) - ۲۷\sqrt{m} \leq \frac{۱۶\sqrt{m}}{\log^۳ m}$، با فرض $T_۱ \subseteq V(G_۱)$، به‌طوری‌که $|T_۱| = ۲۷\sqrt{m}$، واضح است که $\Delta(G_۱ - T_۱) \leq \frac{۱۶\sqrt{m}}{\log^۳ m}$ و با فرض $T_۲ = V(K_\ell)$، واضح است که $\Delta(G_۲ - T_۲) = \Delta(H) \leq \frac{۱۶\sqrt{m}}{\log^۳ m}$. بنابراین شرط ۱ قضیه‌ی ۸ برقرار است. از طرف دیگر از آن‌جا که $n(G_۱) \leq m^{\frac{۳}{۴}}$ و طبق روابط بالا، با قرار دادن $R_۱ = G_۱$ و $R_۲ = G''_۲$، شرط ۲ قضیه‌ی ۸ نیز برقرار است. پس می‌توان از قضیه‌ی ۸ نتیجه گرفت که $R(G_۱, G_۲) \leq ۲^{۲۵۰\sqrt{m}}$.

حالت دوم: $r \geq ۱$.
طبق قضیه‌ی ۱۸،

$$\begin{aligned} R(G''_۲, G_۱) = R(G''_۲, K_{n_۱}) &\leq (\frac{۱۰۰n_۱}{lnn_۱})^{\frac{(۲r-k+۲)(k-۱)}{۲}} (lnn_۱)(n''_۲)^r \\ &\leq (\frac{۱۰۰n_۱}{lnn_۱})^{\frac{r^۲+۲r}{۲}} (lnn_۱)(۲۷\sqrt{m} + ۲^{۱۰۶\frac{\sqrt{m}}{\log m}} - \sqrt{m^۳})^r \\ &\leq \frac{(۱۰۰n_۱)^{\frac{r^۲+۲r}{۲}} ۲^{۱۰۶\frac{\sqrt{m}}{\log m}r}}{(lnn_۱)^{\frac{r^۲+۲r-۲}{۲}}} \\ &= (۱۰۰n_۱)^{\frac{r^۲+۲r}{۲}} ۲^{۱۰۶\frac{\sqrt{m}}{\log m}r} \times y \\ &\leq (۴۰۰۰\sqrt{m})^{\frac{r^۲+۲r}{۲}} \times ۲^{۱۰۶\frac{\sqrt{m}}{\log m}r} \times y \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= ۲^{(\frac{r^۲+۲r}{۲}\log ۴۰۰۰\sqrt{m}+۱۰۶\frac{\sqrt{m}}{\log m}r)} \times y \\
&\leq ۲^{۳۶\sqrt{m}}.
\end{aligned}
$$

لازم به ذکر است نامساوی آخر برقرار است زیرا

$$y = \frac{۱}{(\ln n_۱)^{\frac{r^۲+r-۲}{۲}}} \leq ۱,$$

و داریم،

$$
\begin{aligned}
\frac{r^۲+۲r}{۲}\log ۴۰۰۰\sqrt{m} &+ ۱۰۶\frac{\sqrt{m}}{\log m}r = \\
\frac{r^۲+۲r}{۲}(\log ۴۰۰۰ + \log\sqrt{m}) &+ ۱۰۶\frac{\sqrt{m}}{\log m}r \\
&\leq ۶(r^۲+۲r) + \frac{r^۲+۲r}{۲}\log\sqrt{m} + ۱۰۶\frac{\sqrt{m}}{\log m}r \\
&\leq ۱۸(\log^۲\sqrt[۴]{m}) + ۲\log^۲\sqrt[۴]{m}\log\sqrt{m} + ۲۶/۵\sqrt{m} \\
&= \frac{۱۸}{۱۶}\log^۲ m + \frac{۲}{۳۲}\log^۳ m + ۲۶/۵\sqrt{m} \\
&\leq ۹/۵\sqrt{m} + ۲۶/۵\sqrt{m} = ۳۶\sqrt{m}.
\end{aligned}
$$

اکنون با استفاده‌ی دوباره از قضیه‌ی ۸ نتیجه‌ی مورد نظر حاصل می‌شود. ■

References

[1] N. Alon, M. Krivelevich and B. Sudakov, Turán numbers of bipartite graphs and related Ramsey-type questions, *Combin. Probab. Comput.* **12** (2003), 477-494.

[2] D. Conlon, A new upper bound for diagonal Ramsey numbers, *Ann. of Math.* **170** (2009), 941-960.

[3] P. Erdős, Some remarks on the theory of graphs, *Bull. Amer. Math. Soc.* **53** (1947), 292-294.

[4] P. Erdős, On some problems in graph theory, combinatorial analysis and combinatorial number theory, *Graph Theory and Combinatorics*, Cambridge, (1983), *Academic Press, London*, (1984), 1-17.

[5] P. Erdős and R. Graham, On partition theorems for finite graphs, *in: Infinite and Finite Sets*, vol. I, Colloq., Keszthely, (1973), *in: Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai*, vol. 10, North-Holland, Amsterdam, (1975), 515-527.

[6] P. Erdős and G. Szekeres, A Combinatorial problem in geometry, *Compos. Math.* **2** (1935), 463-470.

[7] J. Fox and B. Sudakov, Dependent Random Choice, *Random Struct. Algorithms* **38** (2011), 68-99.

[8] S. P. Radziszowski, Small Ramsey numbers, *Electron. J. Combin.* **1** (1994), Dynamic Surveys, DS1.**12** (August 4, 2009).

[9] F. P. Ramsey, On a problem of formal logic, *Proc. London Math. Soc.***2** 30 (1930), 264-286.

[10] V. Rosta, Ramsey Theory Applications, *Electron. J. Combin.* (2004), 1-43.

[11] B. Sudakov, A Conjecture of Erdős on graph Ramsey numbers, *Advances In Math.* **227** (2011), 601-609.