

توصیف جابه‌جاگر عملگرهای ضربی در فضاهاى برگمن وزن در چندقرصى

علی آبکار

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی محض

پذیرش ۹۸/۰۹/۰۲

دریافت ۹۷/۱۱/۲۲

چکیده

در این مقاله توصیفی از جابه‌جاگر یک عملگر ضربی خاص روی فضای برگمن وزن دار در چندقرصی مختلط ارایه می‌دهیم. بدین ترتیب به تعمیم حکم مشابهی از فضای برگمن وزن دار در قرص یک صفحه مختلط به حالت چندمتغیره مختلط دست می‌یابیم.

واژه‌های کلیدی: فضای برگمن وزن دار، عملگر ضربی، جابه‌جاگر عملگر، چندقرصی مختلط

رده‌بندی موضوعی: 47B38, 46E20, 30H20, 32A36

مقدمه

یکی از مباحث نظریه عملگرها تعیین و توصیف جابه‌جاگر^۱ عملگرهای خطی کراندار است. فرض کنیم T یک عملگر خطی کراندار بر فضای باناخ X باشد. منظور از جابه‌جاگر T عبارت است از مجموعه همه عملگرهای خطی کراندار چون S که با T جابه‌جا می‌شوند یعنی

$$\{T\}' = \{S \in B(X) : ST = TS\}$$

که در آن $B(X)$ فضای همه عملگرهای خطی کراندار بر X است. فرض کنیم D قرص یکه باز در صفحه مختلط و X یک فضای تابعی باناخ روی D باشد که در این شرایط صدق می‌کند:

۱. X یک زیرفضای برداری فضای تابع های تحلیلی بر قرص یکه باز است،

۲. تابع خطی مقدار یابی $f \mapsto f(a)$ ، به ازای هر $a \in D$ ، بر X کراندار است،

۳. اگر $f \in X$ ، آن‌گاه $zf \in X$.

۴. اگر $f \in X$ و $f(a) = 0$ ، آن‌گاه تابع $h \in X$ وجود دارد که $(z-a)h = f$.

با استفاده از سه شرط اول و قضیه نمودار بسته می‌توان نشان داد که عملگر ضربی $f \mapsto zf$ بر X کراندار است [۷]. فرض کنید X یک فضای تابعی باناخ باشد که در شرایط بالا صدق می‌کند. تابع مختلط-مقدار g را یک ضرب‌گر X نامند اگر $gX \subset X$. توجه کنید که چون به‌ازای هر $f \in X$ ، تابع‌های f و gf تحلیلی‌اند، پس g نیز تحلیلی است. اگر g یک ضرب‌گر باشد، با استفاده از قضیه نمودار بسته ثابت می‌شود که تبدیل خطی زیر کراندار است:

$$M_g: X \rightarrow X, \quad M_g(f) = gf.$$

هر چنین عملگری را یک عملگر ضربی می‌نامند. مجموعه همه ضرب‌گرهای X را با $M(X)$ نشان می‌دهند. مشهور است ([۷] ملاحظه شود)، که $M(X) \subset H^\infty(D)$ که در آن $H^\infty(D)$ فضای تابع‌های تحلیلی کراندار بر قرص یکه‌باز

است. توجه کنید که $M(X)$ شامل همه چندجمله‌ای‌ها است، و اگر $1 \in X$ ، آن‌گاه

$$M(X) \subset X \cap H^\infty(D).$$

در این مقاله با فضاهای مجرد مانند X سروکار نداریم و توجه خود را منحصرًا به فضای برگمن معطوف می‌کنیم، در واقع هدف از بیان مفاهیم بالا آن است که نتایج این مقاله را می‌توان به فضاهای کلی‌تری مانند فضاهای تابعی باناخ، و به‌ویژه به فضاهای تابعی هیلبرت تعمیم داد. مطالب بالا برگرفته از [۷] است. از این به بعد فرض می‌کنیم که X فضای برگمن روی قرص یکه باز است، یعنی فضای متشکل از همه تابع‌های تحلیلی f روی قرص یکه باز به‌طوری‌که

$$\int_D |f(z)|^2 dA(z) < \infty$$

که در آن $dA(z) = \frac{1}{\pi} dx dy$ اندازه مساحتی نرمال شده در قرص یکه است. نرم تابع f در فضای برگمن بدین صورت تعریف می‌شود:

$$\|f\|^2 = \int_D |f(z)|^2 dA(z)$$

فضای برگمن را با نماد $A^2(D)$ نشان می‌دهیم که با ضرب داخلی

$$\langle f, g \rangle = \int_D f(z) \overline{g(z)} dA(z)$$

(به‌عنوان زیرفضایی بسته از $L^2(D)$) یک فضای هیلبرت است.

یکی از ویژگی‌های مهم فضای برگمن آن است که عملگر خطی مقداریابی بر آن کراندار است. این حکم نتیجه‌ای از نابرابری مهم زیر است (برای اثبات [۲] صفحه ۶، یا [۶] صفحه ۲ ملاحظه شود): به‌ازای هر زیرمجموعه فشرده K از قرص یکه، عدد ثابت C_K وجود دارد که به‌ازای هر $z \in K$ داریم:

$$|f(z)| \leq C_K \|f\|. \quad (۱)$$

با استفاده از قضیه نمودار بسته^۱ می‌توان نشان داد که M_g بر فضای برگمن عملگری کراندار است: فرض کنید $f_n \rightarrow f$ در نرم f_n دنباله‌ای از عناصر $A^2(D)$ است و $gf_n \rightarrow h$ اکنون از (۱) نتیجه می‌شود که به‌ازای هر زیرمجموعه فشرده K از قرص یکه، عدد ثابت C_K وجود دارد که به‌ازای هر $z \in K$ داریم:

$$|f_n(z) - f(z)| \leq C_K \|f_n - f\|.$$

بنابراین $f_n(z) \rightarrow f(z)$ (به‌طور یکنواخت روی K)، به‌ویژه به‌ازای هر $z \in K$ داریم:

$$g(z)f_n(z) \rightarrow g(z)f(z).$$

از طرف دیگر، $gf_n \rightarrow h$ (در نرم) و در نتیجه $g(z)f_n(z) \rightarrow h(z)$ اکنون از یکتایی حد نقطه‌ای نتیجه می‌شود که $h = gf$ بنابراین M_g کراندار است. روشن است که

$$\|M_g\| \leq \|g\|_\infty = \sup\{|g(z)|: z \in D\},$$

به‌واقع، می‌توان نشان داد که برابری برقرار است ([۳] ص ۱۵۴).

اکنون پرسش این است که شکل کلی عضوی از جابه‌جاگر یک عملگر ضربی مفروض روی فضای برگمن چگونه است؟

پاسخ به این پرسش در حالت کلی با پیچیدگی‌هایی همراه است ولی در حالتی که تابع ضرب‌گر به شکل تک‌جمله‌ای باشد پیشرفت‌های ملموسی صورت گرفته است ([۱]، [۴]، [۸]، [۱۰] ملاحظه شود). ساده‌ترین حالت آن است که فرض کنیم $g(z) = z$ تابع همانی است. مشهور است که اگر X فضای برگمن روی قرص یکه باشد،

1. Closed Graph Theorem

جابه جاگر عملگر ضربی M_Z برابر رده عملگرهایی به صورت M_g است که در آن g یک تابع تحلیلی کراندار است ([۸] لم ۶ یا [۳] قضیه ۲۹-۱۴ (آ)، صفحه ۱۵۳). در واقع، نگاشت $g \mapsto M_g$ یک یکریختی طولپای از $H^\infty(D)$ روی $\{M_Z\}'$ است ([۳] ص ۱۵۳).

در گام بعدی حالتی را در نظر می گیریم که $g(z) = z^2$ است. این مسئله نخست به وسیله ک. ژو^۱ برای فضای برگمن استاندارد در [۱۰] و سپس برای فضای برگمن وزن دار در [۱] بررسی شد. در این مقاله قصد داریم مسئله را برای عملگر مشابه در فضای برگمن وزن دار روی چندقرصی^۲ بررسی کنیم.

فضای برگمن وزن دار

فرض کنید $1 < \alpha < \infty$. به تابع

$$w(z) = (\alpha + 1)(1 - |z|^2)^\alpha$$

وزن استاندارد فضای برگمن در قرص یکه باز می گویند. فضای برگمن وزن دار عبارت است از فضای متشکل از همه تابع های تحلیلی f روی قرص یکه باز به طوری که

$$\int_D |f(z)|^2 w(z) dA(z) < \infty$$

که در آن $dA(z) = \frac{1}{\pi} dx dy$ اندازه مساحتی نرمال شده در قرص یکه باز است. نرم تابع f در فضای برگمن وزن دار بدین صورت تعریف می شود:

$$\|f\|^2 = (\alpha + 1) \int_D |f(z)|^2 (1 - |z|^2)^\alpha dA(z)$$

به راحتی می توان نشان داد که فضای برگمن وزن دار که آن را با $A_\alpha^2(D)$ نشان می دهند یک فضای هیلبرت است که در آن ضرب داخلی بدین صورت تعریف می شود:

$$\langle f, g \rangle = (\alpha + 1) \int_D f(z) \overline{g(z)} (1 - |z|^2)^\alpha dA(z).$$

برای محاسبه نرم تابع ها در این فضا لازم است رابطه بین تابع های گاما و بتا را یادآوری کنیم:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0,$$

$$B(m, n) = \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt, \quad m, n > 0,$$

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}.$$

حال می توان برای محاسبه نرم در فضای برگمن وزن دار مبادرت کرد: با محاسبه ای معلوم می شود که

$$\begin{aligned} \|z^n\|^2 &= (\alpha + 1) \iint |z^n|^2 (1 - |z|^2)^\alpha dA(z) = 2(\alpha + 1) \int_0^1 r^{2n} (1 - r^2)^\alpha r dr = (\alpha \\ &= +1) \int_0^1 t^n (1 - t)^\alpha dt = (\alpha + 1) B(n + 1, \alpha + 1) \\ &= (\alpha + 1) \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+2)} \end{aligned}$$

1. Kehe Zhu
2. polydisk

$$= \frac{n! \Gamma(\alpha + 2)}{\Gamma(n + \alpha + 2)}.$$

در نتیجه اگر $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ آن‌گاه داریم:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! \Gamma(\alpha + 2)}{\Gamma(n + \alpha + 2)} |a_n|^2.$$

از بحث بالا نتیجه می‌شود که بردارهایی به صورت

$$e_n(z) = \left(\frac{\Gamma(n + \alpha + 2)}{n! \Gamma(\alpha + 2)} \right)^{1/2} z^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

یک پایه یکامتعامد برای فضای برگمن وزن دار تشکیل می‌دهند (زیرا اگر $\|z^n\|^2 = a_n$ آن‌گاه نرم $\frac{1}{\sqrt{a_n}} z^n$ برابر

1 است. ضمناً تعامد این بردارها هم از محاسبات بالا و رابطه

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta = 0, \quad m \neq n$$

بدیهی است ([۶] صفحه ۴ ملاحظه شود) با معلوم بودن پایه یکامتعامد، می‌توان هسته بازمولد هر فضای هیلبرت متشکل از تابع‌های تحلیلی را حساب کرد ([۵] صفحه ۱۰). در واقع، هسته بازمولد فضای برگمن وزن دار عبارت است از

$$\begin{aligned} K_z(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \overline{e_n(z)} e_n(w) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n + \alpha + 2)}{n! \Gamma(\alpha + 2)} (\bar{z}w)^n \\ &= \frac{1}{(1 - \bar{z}w)^{\alpha+2}}. \end{aligned}$$

برای بررسی بیشتر در مورد این فضاها برگمن و مطالب مفید دیگر، خواننده علاقه‌مند می‌تواند به [۵] و [۶] مراجعه کنند.

برای بیان نتیجه اصلی این مقاله در مورد جابه‌جاگر عملگر M_g که در آن $g(z) = z^2$ یادآوری می‌کنیم که هر تابع از فضای برگمن وزن دار را می‌توان به صورت

$$f(z) = f_0(z) + f_1(z)$$

نوشت که در آن

$$f_0(z) = \frac{f(z) + f(-z)}{2}$$

تابعی زوج و

$$f_1(z) = \frac{f(z) - f(-z)}{2}$$

تابعی فرد است.

قضیه ۱. [۱]، [۱۰]. عملگر خطی و کراندار $T: A_{\alpha}^2(D) \rightarrow A_{\alpha}^2(D)$ با عملگر ضربی M_{z^2} جابه‌جا می‌شود اگر و فقط اگر تابع‌های تحلیلی کراندار F, G موجود باشند به طوری که

$$T(f) = Ff_0 + \frac{Gf_1}{z}, \quad (f = f_0 + f_1).$$

فضای برگمن روی چندقرصی

حال به بررسی عملگر ضربی روی فضای برگمن وزن دار در چندقرصی می پردازیم. قصد داریم نتایج قبل را به فضاهای برگمن وزن دار روی چندقرصی تعمیم دهیم. برای این منظور از تعریف چندقرصی آغاز می کنیم. فرض کنید D نشان دهنده قرص یکه باز در صفحه مختلط باشد. قرار می دهیم:

$$D^n = D \times D \times \dots \times D \\ = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in C^n : |z_k| < 1\}.$$

مجموعه D^n را چندقرصی می نامند. فرض کنید $Hol(D^n)$ فضای همه تابع های تمامریخت بر چندقرصی باشد. فضای برگمن وزن دار روی چندقرصی عبارت است از

$$A_\alpha^2(D^n) = Hol(D^n) \cap L^2(D^n, dV_\alpha)$$

که در آن

$$dV_\alpha(z) = dA_\alpha(z_1) \dots dA_\alpha(z_n),$$

و به ازای هر k

$$dA_\alpha(z_k) = \frac{(\alpha + 1)}{\pi} (1 - |z_k|^2)^\alpha dx_k dy_k.$$

بنابراین تابع چند متغیره

$$f(z_1, \dots, z_n) \in Hol(D^n)$$

به فضای برگمن $A_\alpha^2(D^n)$ تعلق دارد اگر

$$\|f\|^2 = \int_D |f(z_1, \dots, z_n)|^2 dA_\alpha(z_1) \dots dA_\alpha(z_n) < \infty.$$

حال چنداندیسی B^1 را بدین صورت تعریف می کنیم

$$B = (b_1, \dots, b_n)$$

که در آن هر b_k یک عدد صحیح نامنفی است. برای

$$z = (z_1, \dots, z_n) \in D^n$$

تعریف می کنیم

$$z^B = z_1^{b_1} \dots z_n^{b_n}.$$

مشابه حالت یک متغیره قرار می دهیم (توجه کنید که هر b_j یک عدد صحیح نامنفی است)

$$e_B = \frac{z^B}{\gamma_{b_1} \dots \gamma_{b_n}}, \quad \gamma_n = \left(\frac{n! \Gamma(\alpha + 2)}{\Gamma(\alpha + n + 2)} \right)^{1/2}.$$

با این نمادگذاری (λ ملاحظه شود). معلوم می شود که مجموعه

$$\{e_B : B \text{ یک چنداندیسی است}\}$$

پایه ای یکامتعاد برای فضای برگمن وزن دار روی چندقرصی است: فرض کنید $A = (a_1, \dots, a_n)$ و $B = (b_1, \dots, b_n)$ دو چنداندیسی متمایز باشند. پس عدد صحیح نامنفی $1 \leq k \leq n$ وجود دارد که $a_k \neq b_k$. بنابراین عامل $\langle z^A, z^B \rangle$ در حاصل ضرب داخلی $\langle z^A, z^B \rangle$ برابر صفر است. یکه بودن این بردارها هم بدیهی است، به علاوه اگر تابعی بر همه این بردارها عمود باشد، تمام ضرایب سری تیلور آن صفر می شوند، یعنی مجموعه متشکل از تمام e_B ها که در آن B چنداندیسی دلخواه است، مجموعه ای یکامتعاد و ماکسیمال است.

تابع هسته برگمن متناظر با نقاط

$$z = (z_1, \dots, z_n), \quad w = (w_1, \dots, w_n)$$

از چندقرصی عبارت است از

$$K_Z(w) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{(1 - w_j \bar{z}_j)^{\alpha+2}}$$

$$= k_{z_1}(w_1) \cdots k_{z_n}(w_n).$$

از این رو برای هر تابع $f \in A_\alpha^2(D^n)$ و هر نقطه $(z_1, \dots, z_n) \in D^n$ داریم

$$f(z_1, \dots, z_n) = \int_{D^n} f(w_1, \dots, w_n) \overline{k_{z_1}(w_1)} \cdots \overline{k_{z_n}(w_n)} dA_\alpha(w_1) \dots dA_\alpha(w_n).$$

عملگر ضربی روی چندقرصی

اکنون می‌خواهیم عملگر ضربی

$$M_{z_1^2}: A_\alpha^2(D^n) \rightarrow A_\alpha^2(D^n)$$

با ضابطه زیر را بررسی کنیم

$$f(z_1, \dots, z_n) \mapsto z_1^2 f(z_1, \dots, z_n).$$

برای ساده‌تر شده موضوع فرض می‌کنیم که $n = 2$ پس با ثابت نگه داشتن متغیر دوم یعنی z_2 می‌خواهیم عملگر

$$M_{z_1^2}: A_\alpha^2(D^2) \rightarrow A_\alpha^2(D^2)$$

با ضابطه

$$f(z_1, z_2) \mapsto z_1^2 f(z_1, z_2)$$

را بررسی کنیم. روشن است که برای تابع یک متغیره

$$g(z_1) = f(z_1, z_2)$$

داریم

$$f(z_1, z_2) = f_0(z_1, z_2) + f_1(z_1, z_2)$$

که در آن

$$f_0(z_1, z_2) = \frac{f(z_1, z_2) + f(-z_1, z_2)}{2},$$

و

$$f_1(z_1, z_2) = \frac{f(z_1, z_2) - f(-z_1, z_2)}{2},$$

تجزیه f به تابع‌های زوج و فرد بر حسب متغیر اول است.

ثابت می‌کنیم که عملگر $T: A_\alpha^2(D^2) \rightarrow A_\alpha^2(D^2)$ با عملگر ضربی

$$M_{z_1^2}: A_\alpha^2(D^2) \rightarrow A_\alpha^2(D^2)$$

جابه‌جا می‌شود اگر و فقط اگر تابع‌هایی مانند

$$h_0(z_1, z_2), \quad h_1(z_1, z_2)$$

در فضای $H^\infty(D^2)$ موجود باشند به طوری که

$$Tf(z_1, z_2) = h_0(z_1, z_2)f_0(z_1, z_2) + \frac{h_1(z_1, z_2)f_1(z_1, z_2)}{z_1}.$$

تبصره. فرض $n = 2$ چیزی از کلیت حکم کم نمی‌کند. زیرا اگر قرار دهیم

$$z' = (z_2, \dots, z_n)$$

آن‌گاه داریم

$$f(z_1, \dots, z_n) = f(z_1, z')$$

که در آن z' در بحث ما ثابت است. ضمناً بررسی عملگر

$$f(z_1, \dots, z_n) \mapsto z_k^2 f(z_1, \dots, z_n)$$

برای k ثابت نیز چیزی از کلیت حکم کم نمی کند.

برای نیل به هدف اصلی این مقاله با قضیه ۲ آغاز می کنیم.

قضیه ۲. فرض کنید h_0, h_1 تابع‌هایی تحلیلی و کران دار در چندقرصی $D \times D$ باشند. در این صورت عملگر

$$T: A_\alpha^2(D^2) \rightarrow A_\alpha^2(D^2)$$

با ضابطه

$$Tf = h_0 f_0 + \frac{h_1 f_1}{z_1}, \quad (f = f_0 + f_1)$$

کراندار است.

برهان. چون h_0, h_1 تابع‌هایی کراندارند و

$$\|f_0\| \leq \|f\|$$

پس برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم عدد $C > 0$ وجود دارد به طوری که

$$\|f_1/z_1\| \leq C\|f\|.$$

برای این منظور فرض کنید $f \in A_\alpha^2(D \times D)$ دارای نمایش سری توانی

$$f(z_1, z_2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m,n} z_1^m z_2^n$$

باشد. بنابراین داریم

$$\|f\|^2 = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{m! n! \Gamma(\alpha + 2)^2}{\Gamma(\alpha + m + 2)\Gamma(\alpha + n + 2)} |a_{m,n}|^2$$

و مشابهاً برای نرم تابع $z_1 f(z_1, z_2)$ داریم

$$\|z_1 f\|^2 = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(m+1)! n! \Gamma(\alpha + 2)^2}{\Gamma(\alpha + m + 3)\Gamma(\alpha + n + 2)} |a_{m,n}|^2$$

چون $\alpha + 2 \geq 1$ داریم

$$1 + \frac{m}{\alpha + 2} \leq m + 1$$

و یا

$$\alpha + 2 + m \leq (\alpha + 2)(m + 1).$$

در نتیجه داریم

$$\frac{\Gamma(\alpha + m + 3)}{\Gamma(\alpha + m + 2)} \leq (\alpha + 2)(m + 1).$$

اما این هم‌ارز است با

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha + m + 2)(\alpha + 2)} \leq \frac{m + 1}{\Gamma(\alpha + m + 3)}.$$

از این نابرابری نتیجه می شود که

$$\frac{m! n! \Gamma(\alpha + 2)^2}{(\alpha + 2)\Gamma(\alpha + m + 2)\Gamma(\alpha + n + 2)} |a_{m,n}|^2 \leq \frac{(m+1)! n! \Gamma(\alpha + 2)^2}{\Gamma(\alpha + m + 3)\Gamma(\alpha + n + 2)} |a_{m,n}|^2$$

و از آن جا

$$\|f\|^2 \leq (\alpha + 2)\|z_1 f\|^2.$$

اکنون فرض کنید

$$f(0, z_2) = 0$$

و قرار دهید

$$g(z_1, z_2) = \frac{f(z_1, z_2)}{z_1}.$$

یادآوری می‌کنیم که فضای برگمن $A_\alpha^2(D)$ ویژگی تقسیم دارد یعنی اگر $f(a) = 0$ آن‌گاه تابع

$$g(z) = \frac{f(z)}{z - a}$$

به $A_\alpha^2(D)$ تعلق دارد [۳]، ص ۱۴۸. حال تابع یک متغیره $h(z_1) = f(z_1, z_2)$ را در نظر گرفته و با توجه به این که $h(0) = 0$ ، ویژگی تقسیم را برای تابع h به کار می‌بریم. از بحث بالا نتیجه می‌شود که $g(z_1, z_2)$ به فضای برگمن $A_\alpha^2(D^2)$ تعلق دارد و

$$\|g\| \leq (\alpha + 2)^{\frac{1}{2}} \|z_1 g\|,$$

به ویژه،

$$\|f_1/z_1\| \leq (\alpha + 2)^{\frac{1}{2}} \|f\|.$$

که همان حکم مورد نظر است. بدین ترتیب اثبات قضیه به اتمام می‌رسد.

اکنون مقدمات لازم برای اثبات قضیه ۳ فراهم است.

قضیه ۳. فرض کنید

$$T: A_\alpha^2(D \times D) \rightarrow A_\alpha^2(D \times D)$$

یک عملگر خطی و کراندار باشد. در این صورت T با عملگر ضربی

$$f(z_1, z_2) \mapsto M(f) = z_1^2 f(z_1, z_2)$$

جابه‌جا می‌شود اگر و فقط اگر تابع‌های تحلیلی و کراندار

$$h_0(z_1, z_2), h_1(z_1, z_2)$$

در چندقرصی $D \times D$ یافت شوند به طوری که

$$Tf = h_0 f_0 + \frac{h_1 f_1}{z_1}$$

که در آن $f = f_0 + f_1$ تجزیه f به تابع‌های زوج و فرد است.

برهان. اگر T دارای نمایشی به شکل بالا باشد آن‌گاه با M جابه‌جا می‌شود زیرا

$$\begin{aligned} (TM)f &= TM(f_0 + f_1) \\ &= T(z_1^2 f_0 + z_1^2 f_1) \\ &= h_0 z_1^2 f_0 + h_1 z_1 f_1 \\ &= z_1^2 (h_0 f_0 + \frac{h_1 f_1}{z_1}) \\ &= (MT)f. \end{aligned}$$

برای اثبات طرف دیگر حکم فرض کنیم

$$f(z_1, z_2) = (f_0 + f_1)(z_1, z_2).$$

با ثابت نگه داشتن متغیر دوم می‌دانیم که

$$\frac{f_1(z_1, z_2)}{z_1}$$

تابعی تحلیلی در چندقرصی است زیرا مقدار تابع فرد f_1 در $z_1 = 0$ برابر صفر است و از این رو، سری ماکلورن آن بدون جمله ثابت است. حال فرض کنید λ عددی مختلط و مخالف صفر باشد. به علاوه فرض کنید $1, -1$ ریشه‌های معادله $z^2 = 1$ باشند. با توجه به لم ۲-۲ از [۱] که برای توابع یک متغیره ثابت شد، هسته عملگر الحاقی $M_{\lambda^2-z_2}^*$ به وسیله بردارهای k_λ و $k_{-\lambda}$ پدید می‌آید. بنابراین اگر تابع $f(z_1, z_2)$ عضوی از هسته عملگر الحاقی $M_{\lambda^2-z_1}^*$ باشد آن گاه می‌توان نوشت

$$f(z_1, z_2) = A(\lambda, z_2)k_\lambda(z_1) + B(\lambda, z_2)k_{-\lambda}(z_1).$$

در نتیجه برای عدد ناصفر λ داریم

$$T^*k_\lambda(\cdot) = \overline{A(\lambda, z_2)}k_\lambda(\cdot) + \overline{B(\lambda, z_2)}k_{-\lambda}(\cdot).$$

با توجه به ویژگی بازتولیدکنندگی تابع هسته برگمن در فضای $A_\alpha^2(D)$ داریم

$$f(z) = \langle f, k_z \rangle = \int_D f(w) \overline{k_z(w)} dA(w).$$

پس اگر z_2 ثابت و z_1 ناصفر باشد آن گاه با استفاده از برابری بالا داریم (به جای f ، تابع یک متغیره $Tf(\cdot, z_2)$ را در نظر می‌گیریم)

$$\begin{aligned} Tf(z_1, z_2) &= \langle Tf(\cdot, z_2), k_{z_1} \rangle = \langle f(\cdot, z_2), T^*k_{z_1} \rangle \\ &= \langle f(\cdot, z_2), \overline{A(z_1, z_2)}k_{z_1} + \overline{B(z_1, z_2)}k_{-z_1} \rangle \\ &= A(z_1, z_2)f(z_1, z_2) + B(z_1, z_2)f(-z_1, z_2). \end{aligned}$$

اکنون فرض کنید $f(z_1, z_2)$ نسبت به متغیر اول زوج باشد پس داریم

$$Tf(z_1, z_2) = [A(z_1, z_2) + B(z_1, z_2)]f(z_1, z_2).$$

همین طور اگر $f(z_1, z_2)$ نسبت به متغیر اول فرد باشد آن گاه

$$Tf(z_1, z_2) = [A(z_1, z_2) - B(z_1, z_2)]f(z_1, z_2).$$

اکنون برای z_1 های ناصفر تعریف می‌کنیم

$$h_0(z_1, z_2) = A(z_1, z_2) + B(z_1, z_2),$$

و همین طور

$$h_1(z_1, z_2) = z_1[A(z_1, z_2) - B(z_1, z_2)].$$

بنابراین

$$\begin{aligned} Tf(z_1, z_2) &= T(f_0(z_1, z_2) + f_1(z_1, z_2)) \\ &= h_0(z_1, z_2)f_0(z_1, z_2) + h_1(z_1, z_2)f_1(z_1, z_2)/z_1. \end{aligned}$$

توجه کنید که $h_0(z_1, z_2) = T(1)$ و $h_1(z_1, z_2) = T(g)$ که در آن $g(z_1, z_2) = z_1$

بنابراین این تابع ها در حوزه

$$D \times D - \{(0, z_2): z_2 \in D\}$$

تحلیلی‌اند. حال قرار می‌دهیم

$$h_0(0, z_2) = T(1)(0, z_2),$$

$$h_1(0, z_2) = T(g)(0, z_2).$$

در نتیجه h_0, h_1 در سراسر ناحیه $D \times D$ تحلیلی هستند. آخرین نکته‌ای که باید ثابت کنیم این است که این دو

تابع کراندار هستند. برای اثبات کراندار بودن قرار دهید

$$\begin{aligned} E &= \{f \in A_\alpha^2(D \times D): f(-z_1, z_2) = f(z_1, z_2)\}, \\ O &= \{f \in A_\alpha^2(D \times D): f(-z_1, z_2) = -f(z_1, z_2)\}. \end{aligned}$$

توجه داریم که تابع‌های h_0, h_1 در واقع ضرب‌گرهایی از زیرفضاهای بالا به توی فضای برگمن هستند، چون مثلاً در مورد h_0 می‌دانیم که اگر $f(z_1, z_2)$ عضو E باشد، آن گاه $Tf = (A + B)f$ بنا به تعریف T به فضای

$A_\alpha^2(D \times D)$ تعلق دارد، از این رو $h_0 = A + B$ یک ضربگر از زیرفضای E به توی فضای $A_\alpha^2(D \times D)$ است. مشابه می‌توان استدلال کرد که $h_1 = A - B$ یک ضربگر از زیرفضای O به توی فضای برگمن وزن دار روی چندقرصی است.

اکنون برای تابع $f \in E$ داریم

$$\begin{aligned} |h_0(z_1, z_2)e_{(z_1, z_2)}f| &= |h_0(z_1, z_2)f(z_1, z_2)| \\ &= |e_{(z_1, z_2)}(h_0f)| \leq C \|e_{(z_1, z_2)}\| \|f\| \end{aligned}$$

که در آن C برابر نرم عملگر ضربی $M_{h_0}(f) = h_0f$ و

$$e_{(z_1, z_2)}(f) = f(z_1, z_2)$$

تابع خطی ارزیابی در نقطه (z_1, z_2) است. ضمناً می‌دانیم که هم عملگر ضربی و هم تابع خطی ارزیابی کراندار هستند. بنابراین با سوپریمم‌گیری روی

$$\{f \in A_\alpha^2(D \times D): \|f\| \leq 1\}$$

داریم

$$\|h_0(z_1, z_2)\| \|e_{(z_1, z_2)}\| \leq C \|e_{(z_1, z_2)}\|$$

و از آن جا با سوپریمم‌گیری روی تمام نقاط چندقرصی می‌رسیم به

$$\sup |h_0(z_1, z_2)| \leq C,$$

یعنی h_0 کراندار است. مشابهاً ثابت می‌شود که h_1 نیز کراندار است.

منابع

1. Abkar A., "On the commutant of certain operators in the Bergman space", Bull, Malays. Math. Sci. Soc (2) 35 (2A) (2012) 499-502.
2. Conway J. B., "A Course in Functional Analysis, 2nd edition", GTM, 96, Springer-Verlag, New York (1990).
3. Conway J. B., "A Course in Operator Theory, Graduate Studies in Mathematics", American Mathematical Society, Vol. 21, Providence, RI. (2000).
4. Dan H., Huang H., "Multiplication operators defined by a class of polynomials on $L_a^2(D^2)$ ", Integr. Equ. Oper. Theory, 80 (2014) 581-601.
5. Duren P., Schuster A., "Bergman Spaces, Mathematical Surveys and Monographs", American Mathematical Society, Providence, RI. (2004).
6. Hedenmalm H., Korenblum B., Zhu K., "Theory of Bergman Spaces", GTM, Springer-Verlag, New York (2000).
7. Richter S., "Invariant subspaces in Banach spaces of analytic functions", Trans. Amer. Math. Soc., 304, No.2 (1987) 585-616.
8. Shi Y., Lu Y., "Reducing subspaces for Toeplitz operators on the polydisk", Bull. Korean Math. Soc., 50 (2013) 687-696.
9. Shields A. L., Wallen L. J., "The commutant of certain Hilbert space operators", Indiana Univ. Math. J., Vol 20, no. 9, (1971) 777-788.
10. Zhu K., "Reducing subspaces for a class of multiplication operators", J. London Math. Soc., 62(2000) 553-568.