

روش افراز واحد توابع پایه شعاعی مبتنی بر تفاضلات متناهی برای حل معادله دیفرانسیل جزئی تصادفی سهموی

مریم شفا، محسن اسماعیل بیگی*، امید چترآبگون
دانشگاه ملایر، دانشکده ریاضی،

دریافت: ۹۷/۱۱/۲۴

پذیرش: ۹۹/۰۱/۱۷

چکیده

روش توابع پایه‌ای شعاعی یک روش بدون شبکه برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی تصادفی بوده و به دلیل خاصیت شعاعی، به کارگیری آن در ابعاد بالا با دشواری‌های کمتری همراه است و دقت طیفی برای انواع معینی از آنها دست‌یافتنی است. به علاوه بر روی دامنه‌های نامنظم به خوبی قابل استفاده است. اما بسیاری از توابع پایه‌ای شعاعی پرکاربرد دارای محمل سراسری هستند و لذا ماتریس ضرایب در روش‌های بدون شبکه مبتنی بر این دسته از توابع پایه‌ای شعاعی چگال خواهد بود، که این امر هزینه محاسباتی و ناپایداری‌های عددی را افزایش می‌دهد. این چالش در زمینه حل عددی معادلات دیفرانسیل تصادفی که با شبیه‌سازی‌های متعددی سر و کار خواهیم داشت به صورت جدی‌تر مطرح است. در این مقاله، روش افراز واحد توابع پایه شعاعی مبتنی بر تفاضلات متناهی را برای رفع این چالش ارائه خواهیم کرد و آن را بر روی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تصادفی سهموی پیاده‌سازی خواهیم نمود. با به کارگیری چنین طرحی، یک مسئله بزرگ به تعداد زیادی مسئله کوچک تجزیه می‌شود. همچنین، خاصیت همگرایی طیفی توابع پایه شعاعی در تقریب‌های موضعی به سرتاسر روش افراز واحد مبتنی بر توابع پایه شعاعی منتقل می‌شود. به منظور ارزیابی عملکرد روش با استفاده از ۱۰۰۰ شبیه‌سازی انجام شده، معیارهای آماری نظیر میانگین، انحراف معیار و کران‌های بالا و پایین جواب‌ها ارائه شده است. نتایج شبیه‌سازی‌های عددی نشان می‌دهد، این روش به طور قابل ملاحظه‌ای بدوضعی روش سراسری مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی را کاهش می‌دهد. به علاوه، این روش با تولید دستگاه معادلات تنک به طور قابل توجهی باعث کاهش حجم محاسباتی می‌شود. همچنین، روش پیشنهادی را بر روی دامنه‌های نامنظم به کار خواهیم برد تا مزیت استفاده آسان از توابع پایه شعاعی برای چنین نواحی را نشان دهیم.

واژه‌های کلیدی: معادلات دیفرانسیل تصادفی، توابع پایه شعاعی، روش افراز واحد، روش تفاضلات متناهی

۱. مقدمه

بسیاری از پدیده‌های علمی در علوم و مهندسی توسط معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی قطعی مدل‌سازی می‌شوند. اما با توجه به عوامل متعددی که بر یک پدیده علمی تأثیرگذار هستند و امکان ملاحظه همه آنها در ساختار مدل قطعی وجود ندارد، عمده‌تاً مدل‌های به دست آمده از تطابق کافی با پدیده موردنظر برخوردار نیستند. معادلات دیفرانسیل تصادفی^۱ این امکان را فراهم می‌سازند تا با در نظر گرفتن رویکردهای تصادفی، امکان مدل‌سازی دقیق‌تر پدیده‌ها فراهم آید. به عنوان نمونه، مدل‌های تصادفی لاگرانژی برای شبیه‌سازی انتقال ذرات در جریان‌های آشسته در منبع [۱] مورد اشاره قرار گرفته است. از سوی دیگر معادلات دیفرانسیل تصادفی سهموی در مدل‌سازی ارتعاشات تصادفی، بررسی‌های لرزه‌نگاری و مدیریت مخازن نفت به طور گسترده مورد استفاده قرار می‌گیرد [۲، ۳، ۴].

روش‌های تحلیلی برای دسترسی به پاسخ معادلات دیفرانسیل تصادفی در برخی منابع مورد بررسی قرار گرفته است [۵، ۶، ۷]. اما با توجه به چالش‌های دسترسی به پاسخ تحلیلی برای این دسته از معادلات، استفاده از روش‌های عددی در سال‌های اخیر به سرعت توسعه یافته است. روش‌های اجزاء متناهی و تفاضلات متناهی^۲ [۸، ۹]، روش هم‌محلی طیفی تصادفی [۱۰] از جمله روش‌های عددی هستند که برای حل معادلات دیفرانسیل تصادفی به کار رفته‌اند.

این روش‌های عددی عمده‌تاً وابسته به شبکه‌بندی ناحیه حل مسأله هستند و همان‌طور که در [۱۱] اشاره شده است، شبکه‌بندی به خصوص در ابعاد بالا یکی از جدی‌ترین چالش‌های پیش روی روش‌های مبتنی بر شبکه است. برای غلبه بر این چالش روش‌های عددی که به یک شبکه‌بندی منظم از ناحیه حل مسأله وابسته نباشند مورد توجه قرار گرفته است. در [۱۲]، فشر^۳ و همکارانش نشان دادند که روش‌های بدون شبکه^۴ مبتنی بر توابع پایه شعاعی^۵ می‌تواند ابزار کارآمدی برای حل معادلات دیفرانسیل تصادفی باشد. از مزیت‌های اصلی این روش می‌توان به سادگی و قابلیت‌های فراوان آن در مواجهه با مسائل در ابعاد بالا و در مواجهه با مسائل با ناحیه حل پیچیده اشاره کرد. اما روش‌های مبتنی بر توابع پایه شعاعی با رویکرد سراسری^۶ همواره با چالش ناپایداری مواجه خواهند بود که این امر می‌تواند دقت و اعتبار این روش‌ها را با تردید مواجه سازد. به عبارت دیگر استفاده از توابع پایه شعاعی برخوردار از رویکرد سراسری به تولید دستگاه معادلات خطی بدوضعی منجر می‌شود که از عدد شرطی^۷ بالایی برخوردارند.

در این مقاله به منظور اجتناب از بدوضعی موجود در رویکرد سراسری، روش‌های مبتنی بر توابع پایه شعاعی با رویکرد موضعی برای حل معادلات دیفرانسیل تصادفی سهموی مدنظر قرار می‌گیرد. برای معادلات غیرتصادفی، این رویکرد به طور جدی مورد توجه قرار گرفته است [۱۳، ۱۴، ۱۵]. به عنوان نمونه می‌توان به روش ارائه شده در منبع [۱۶] برای حل معادلات دیفرانسیل قطعی وابسته به زمان اشاره کرد.

^۱ Stochastic differential equations

^۲ Finite Differences

^۳ Fashauer

^۴ Mesh Free

^۵ Radial Basis Functions

^۶ Global

^۷ Condition number

در این مقاله به منظور برخورداری از یک ساختار محاسباتی پایدار^۱ به همراه بهره‌مندی از جواب‌های عددی با دقت مطلوب، از یک ساختار ترکیبی شامل تقریب افراز واحد^۲ مبتنی بر توابع پایه شعاعی و تفاضلات متناهی برای حل معادلات دیفرانسیل تصادفی استفاده خواهیم کرد. در این رویکرد با استفاده از ساختار تفاضلات متناهی، معادله دیفرانسیل جزئی تصادفی در راستای زمان گسسته‌سازی می‌شود و در هر گام زمانی با استفاده از تقریب افراز واحد مبتنی بر توابع پایه شعاعی به تقریب جواب عددی در گام مذکور خواهیم پرداخت. در حقیقت در هر گام زمانی، میدان تصادفی گاوسی^۳ متناظر با ساختار کوواریانس مکانی مدنظر در یک مجموعه از نقاط هم‌محلی از پیش تعیین شده شبیه‌سازی می‌شود. در این رویکرد ساختار افراز واحد به منظور دستیابی به یک گسسته‌سازی مکانی مدنظر قرار می‌گیرد. ماتریس‌های حاصل در هر گام زمانی با توجه به رویکرد موضعی به کار رفته، تنک^۴ خواهد بود و از پیچیدگی‌های محاسباتی و ناپایداری‌های عددی در امان خواهد بود. این در حالی است که با توجه به ماهیت روش افراز واحد، دقت تقریب‌ها کاهش نخواهد یافت. به‌علاوه با توجه به حضور توابع وزنی با محمل فشرده^۵ در ساختار افراز واحد، تقریب نهایی به دست آمده به صورت سراسری قابل محاسبه خواهد بود.

۱.۱. مسأله تحت بررسی:

فرض کنید $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ یک دامنه کراندار باز منظم باشد و $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر از توابع روی Ω باشد. هدف اصلی این مقاله دسترسی به پاسخ عددی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی تصادفی سهموی در چهارچوب کلی زیر است:

(۱)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \Delta u(x,t) + f(x,t) + \sigma \frac{\partial W(x,t)}{\partial t}, \quad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^d, \quad t > 0.$$

معادله (۱) توسط یک شرط اولیه به صورت زیر

(۲)

$$u(x,0) = u_0(x),$$

و شرایط مرزی زیر کامل می‌شود

(۳)

$$\mathcal{B}u(x,t) = g(x,t), \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0,$$

^۱ Stable

^۲ Partition of unity

^۳ Gaussian

^۴ Sparse

^۵ Compact Support

که $W(x, t)$ یک فرایند وینر^۱ تعریف شده روی فضای احتمال فیلتر شده $(\Omega_W, \mathcal{F}_W, \{\mathcal{F}_t\}_{t=0}^\infty, \mathbb{P}_W)$ با میانگین صفر و تابع کوواریانس $q(x, y)$ به صورت زیر است:

$$E(W(x, t), W(y, t)) = \min\{t, s\}q(x, y), \quad x, y \in \Omega, \quad t, s > 0.$$

به علاوه Δ عملگر لاپلاس^۲ بوده، $\sigma > 0$ است و توابع g, f به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که مسئله (۱) دارای یک جواب یکتا در هر شبیه‌سازی باشد [۵]. لازم به ذکر است وجود، یکتایی و ویژگی‌های جواب چنین معادلاتی در برخی منابع مورد مطالعه قرار گرفته است [۷، ۶]. به علاوه در برخی منابع پاسخ عددی برای این معادله ارائه شده است [۸، ۱۷، ۱۸]. مطالب ارائه شده در این مقاله از چهارچوب کلی زیر تبعیت خواهد کرد. اولین بخش از مقاله به مرور مختصری بر درونیاب تابع پایه شعاعی اختصاص خواهد یافت. در ادامه، تقریب افراز واحد مبتنی بر توابع پایه شعاعی در فصل دوم بیان خواهد شد. در بخش سوم مقاله با استفاده از تقریب افراز واحد در ترکیب با تفاضلات متناهی، یک روش عددی با رویکرد موضعی و پوشش سراسری برای حل معادله دیفرانسیل جزئی تصادفی سهموی ارائه خواهیم کرد. در بخش نتایج عددی، ظرفیت و قابلیت‌های روش موضعی ارائه شده در این مقاله را با روش‌های عددی برخوردار از رویکرد سراسری مقایسه خواهیم نمود.

۲. روش افراز واحد توابع پایه شعاعی

در این بخش روش افراز واحد مبتنی بر توابع پایه شعاعی را به عنوان ابزاری کارآمد در نظریه تقریب مطرح خواهیم کرد. این روش به طور قابل ملاحظه‌ای بدوضعی روش سراسری مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی را کاهش می‌دهد. به علاوه، آنها یک دستگاه معادلات تنک را برای دسترسی به جواب عددی ایجاد می‌کنند. به منظور آشنایی بهتر با روش افراز واحد مبتنی بر توابع پایه شعاعی، در بخش ۱.۲ به مروری بر درونیابی و تقریب با استفاده از توابع پایه شعاعی خواهیم پرداخت. در بخش ۲.۲ با افزودن روش پارتیشن‌بندی واحد به ساختار آرایه شده، به تقریب‌های سراسری با رویکرد موضعی دست خواهیم یافت.

۱.۲. مروری بر درونیابی توابع پایه شعاعی

در ابتدا جنبه‌های نظری مربوط به درونیاب تابع پایه شعاعی را به طور خلاصه بیان خواهیم کرد. روش توابع پایه‌ای شعاعی یک روش بدون شبکه برای حل بسیاری از مسائل و معادلات ریاضی است. این روش به دلیل خاصیت شعاعی به کارگیری آن در ابعاد بالا با دشواری‌های کمتری همراه است و دقت طیفی برای انواع معینی از آنها دست‌یافتنی است. ضمناً روی دامنه‌های نامنظم به خوبی قابل پیاده‌سازی است [۱۹].

با فرض این که $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ باشد و $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ یک مجموعه از نقاط داده‌ای متمایز در Ω باشد، درونیابی داده‌های پراکنده با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی برای تابع u بر روی X به صورت یک ترکیب خطی از توابع پایه شعاعی به شکل زیر نوشته می‌شود:

^۱ Wiener Process

^۲ Laplacian

(۴)

$$s_{u,X}(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_\epsilon(\|x - x_j\|),$$

که $\|\cdot\|$ ، نرم اقلیدسی است و $\phi_\epsilon: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع شعاعی است که به پارامتر شکل ϵ^1 وابسته است به طوری که

$$\phi_\epsilon(\|x - z\|) = \phi(\epsilon\|x - z\|), \quad x, z \in \Omega.$$

در ادامه برای سادگی نمادگذاری، ϕ_ϵ را با ϕ نمایش خواهیم داد. در جدول ۱، برخی از توابع پایه شعاعی پرکاربرد به همراه مرتبه همواری آنها ذکر شده است [۲۰].

جدول ۱. برخی از توابع پایه شعاعی معروف

نام تابع پایه شعاعی	مرتبه همواری	$\phi_\epsilon(r)$
گاوسین	C^∞	$e^{-\epsilon^2 r^2}$
چنددرجی معکوس	C^∞	$(1 + \epsilon^2 r^2)^{-\frac{1}{2}}$
مترن (M4)	C^4	$e^{-\epsilon r}(\epsilon^2 r^2 + 3\epsilon r + 3)$
وندلند (W2)	C^2	$(1 - \epsilon r)_+^4(4\epsilon r + 1)$

لازم به ذکر است که ضرایب حقیقی مجهول $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ در رابطه (۴) با استفاده از شرایط درونیایی زیر تعیین می‌شوند:

$$s_{u,X}(x_i) = u(x_i), \quad i = 1, \dots, N.$$

با در نظر گرفتن این شرایط، دستگاه معادلات خطی مقارنی به صورت زیر حاصل خواهد شد:

(۵)

$$A\alpha = u,$$

$$u = (u(x_1), \dots, u(x_N))^T \text{ و } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)^T \text{ که } A_{ij} = \phi(\|x_i - x_j\|)$$

اگر ϕ یک تابع معین مثبت باشد، آنگاه ماتریس ضرایب A وارون پذیر است و مسأله درونیایی توابع پایه شعاعی خوش‌وضع خواهد بود و در نتیجه، جواب مسأله موجود و یکتا است [۲۰]. بنابراین، هنگامی که بردار α محاسبه شود، درونیاب تابع پایه شعاعی را می‌توان در هر نقطه‌ای مانند x به صورت زیر ارزیابی کرد:

(۶)

$$s_{u,X}(x) = \phi^T(x)\alpha,$$

^۱ Shape parameter

که $\phi^T(x) = (\phi(\|x - x_1\|), \dots, \phi(\|x - x_N\|))$ است.

در ادامه، درونیاب (۶) را با استفاده از توابع پایه کاردینال^۱ به فرم لاگرانژ بیان خواهیم کرد، که در مباحث مرتبط با تقریب‌های موضعی به آن احتیاج خواهیم داشت.

توابع پایه کاردینال $\psi_j(x)$ ، $j = 1, \dots, N$ دارای ویژگی زیر هستند:

$$\psi_j(x_i) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

که منجر به فرمول پیشنهادی زیر برای درونیابی می‌شود:

(۷)

$$s_{u,X}(x) = \psi^T(x)u,$$

که در آن، $\psi^T(x) = (\psi_1(x), \dots, \psi_N(x))$ است. با ترکیب روابط (۵)، (۶) و (۷)، رابطه زیر حاصل می‌شود.

(۸)

$$s_{u,X}(x) = \psi^T(x)u = \phi^T(x)\alpha = \phi^T(x)A^{-1}u,$$

به طوری که می‌توان رابطه بین پایه کاردینال و پایه شعاعی اصلی را به صورت زیر به دست آورد:

$$\psi^T(x) = \phi^T(x)A^{-1}.$$

این انتقال زمانی معتبر است که ماتریس A نامنفرد باشد، یعنی، نقاط داده‌ای $x_1, \dots, x_N \in X$ متمایز و توابع پایه شعاعی معین مثبت باشند.

به علاوه، زمانی که بخواهیم از روش توابع پایه شعاعی برای حل معادلات دیفرانسیل کمک بگیریم، برای عملگر خطی $\mathcal{L}$ خواهیم داشت

$$\mathcal{L}s_{u,X}(x) = \sum_{j=1}^N \mathcal{L}\psi_j(x)u(x_j).$$

برای ارزیابی $\mathcal{L}s_{u,X}(x)$ در نقاط گره‌ای، یعنی، ارزیابی $\left(\mathcal{L}s_{u,X}(x_1), \dots, \mathcal{L}s_{u,X}(x_N)\right)^T$ ، به ماتریس دیفرانسیلی $s_{\mathcal{L}} = \left(\mathcal{L}\psi_j(x_i)\right)$ ، $i, j = 1, \dots, N$ نیاز داریم. که بر اساس رابطه (۸)، داریم

$$s_{\mathcal{L}} = \Psi_{\mathcal{L}}^T u = \Phi_{\mathcal{L}}^T A^{-1}u,$$

که $\Phi_{\mathcal{L}}^T = \left(\mathcal{L}\phi(\|x_i - x_j\|)\right)$ ، $i, j = 1, \dots, N$ است [۲۱، ۲۲].

بنابراین به منظور حل یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی وابسته به زمان، می‌توان از تقریب توابع پایه شعاعی بیان شده به فرم لاگرانژ استفاده کرد که برای تقریب جواب $u(x, t)$ از رابطه زیر استفاده می‌کند.

^۱ Cardinal basis functions

$$s_{u,X}(x,t) = \sum_{j=1}^N \psi_j(x) u_j(t),$$

که $u_j(t) = u(x_j, t)$ مقادیر مجهولی هستند که باید تعیین شوند.

۲.۲. درونیابی و تقریب روش افراز واحد مبتنی بر توابع پایه شعاعی

در این بخش، روش افراز واحد مبتنی بر توابع پایه شعاعی را بیان می‌کنیم. ابزار این روش بدون شبکه موضعی، توابع وزن‌دار و درونیاب‌های موضعی توابع پایه شعاعی هستند. در ادامه، برای سادگی، روش افراز واحد مبتنی بر توابع پایه شعاعی در حالت توابع پایه شعاعی معین مثبت بیان می‌شود. با این وجود، در حالت کلی این روش را می‌توان برای توابع پایه شعاعی معین مثبت مشروط نیز به کار برد.

فرض کنید $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ یک دامنه کراندار باز باشد و $\{\Omega_j\}_{j=1}^M$ یک پوشش باز و کراندار از Ω باشد که در شرط هم‌پوشانی زیردامنه‌های Ω_j صدق می‌کند، یعنی، زیردامنه‌های هم‌پوشانی باید به گونه‌ای باشند که هر نقطه داخلی $x \in \Omega$ در داخل حداقل یک زیردامنه Ω_j واقع شود. به علاوه، فرض می‌شود مجموعه

$$I(x) = \{j : x \in \Omega_j\},$$

به وسیله ثابت K (مستقل از M) بر روی Ω به طور یکنواخت کراندار باشد، یعنی، به ازای هر $x \in \Omega$ داشته باشیم $card(I(x)) \leq K$ به طوری که $\Omega \subseteq \bigcup_{j=1}^M \Omega_j$ باشد. متناظر با این زیردامنه‌ها یک افراز واحد $\{\omega_j\}_{j=1}^M$ وابسته به پوشش $\{\Omega_j\}_{j=1}^M$ تعریف می‌شود به گونه‌ای که

$$\sum_{j=1}^M \omega_j(x) = 1, \quad x \in \Omega,$$

که تابع وزن $\omega_j: \Omega_j \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته، نامنفی و با محمل فشرده واقع در Ω_j است. برای هر زیردامنه، می‌توان یک درونیاب تابع پایه شعاعی موضعی $s_{u_j, X_j}: \Omega_j \rightarrow \mathbb{R}$ به صورت زیر در نظر گرفت:

$$s_{u_j, X_j} = \sum_{i=1}^{N_j} \alpha_i^j \phi(\|x - x_i^j\|),$$

که N_j تعداد نقاط داده‌ای در Ω_j است، یعنی، نقاط داده‌ای $x_i^j \in X_j = X \cap \Omega_j$ هستند. بنابراین درونیاب افراز واحد مبتنی بر توابع پایه شعاعی به صورت زیر تعریف می‌شود:

(۹)

$$\mathcal{P}_{u,X}(x) = \sum_{j=1}^M \omega_j(x) s_{u_j, X_j}(x), \quad x \in \Omega.$$

اگر توابع s_{u_j, X_j} برای $j = 1, \dots, M$ در شرایط درونیابی صدق کنند، یعنی

(۱۰)

$$s_{u_j, X_j}(x_i^j) = u(x_i^j), \quad x_i^j \in \Omega_j, \quad i = 1, \dots, N_j,$$

آن‌گاه درونیاب سراسری (۹) خاصیت درونیابی موجود در درونیاب‌های موضعی را به ارث می‌برد، یعنی:

$$P_{u, X}(x_i^j) = \sum_{j=1}^M \omega_j(x_i^j) s_{u_j, X_j}(x_i^j) = \sum_{j=1}^M \omega_j(x_i^j) u(x_i^j) = u(x_i^j),$$

حل کردن j -امین مسأله درونیاب (۱۰) منجر به دستگاه معادلات خطی تابع پایه شعاعی موضعی زیر می‌شود:

$$A_j \alpha_j = u_j,$$

که A_j یک ماتریس $N_j \times N_j$ با درایه‌های زیر است:

$$A_{ik}^j = \phi(\|x_i^j - x_k^j\|), \quad i, k = 1, \dots, N_j,$$

و همچنین $u_j = (u_1^j, \dots, u_{N_j}^j)^T$ و $\alpha_j = (\alpha_1^j, \dots, \alpha_{N_j}^j)^T$ هستند.

به علاوه، همان‌طور که می‌دانیم، وجود و یکتایی جواب و وارون‌پذیری ماتریس موضعی A_j با استفاده از توابع پایه شعاعی معین مثبت، تضمین می‌شود.

تابع وزنی $\mathbb{R} \rightarrow \Omega_j: \omega_j$ در روش افراز واحد با استفاده از روش شپارد به صورت زیر، ساخته می‌شود

(۱۱)

$$\omega_j(x) = \frac{\varphi_j(x)}{\sum_{k \in I(x)} \varphi_k(x)}, \quad j = 1, \dots, M,$$

که φ_j یک تابع دارای محمل فشرده روی Ω_j است. برای تضمین نامنفی بودن تابع وزن ω_j و داشتن محمل فشرده روی Ω_j تابع φ_j در رابطه (۱۱) به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\varphi_j(x) = \phi\left(\frac{\|x - \xi_j\|}{R_j}\right), \quad j = 1, \dots, M,$$

که $\{\xi_j\}_{j=1}^M$ و $\{R_j\}_{j=1}^M$ مرکز و شعاع برای زیردامنه‌های دایره‌ای، کروی یا ابرکروی شکل هستند و ϕ یک تابع با محمل فشرده بر روی Ω_j است که معمولاً از تابع وندلند C^2 برای این منظور استفاده می‌شود. با توجه به مطالب بالا،

^۱ Wendland

به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که $\omega_j(x) = 0, \forall j \notin I(x)$ بنابراین توابع وزن ω_j در خاصیت افراز واحد صدق می‌کنند، یعنی،

$$\sum_{j=1}^M \omega_j(x) = \sum_{j \in I(x)} \omega_j(x) = 1, \quad x \in \Omega.$$

در نهایت، تقریب سراسری افراز واحد $\mathcal{P}_{u,X}(x)$ در Ω به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{P}_{u,X}(x) = \sum_{j=1}^M \omega_j(x) s_{u_j, X_j}(x) = \sum_{j \in I(x)} \omega_j(x) s_{u_j, X_j}(x),$$

که s_{u_j, X_j} یک درونیاب موضعی است که برای هر نقطه داده $x_i \in \Omega_j$ خواهیم داشت:

$$s_{u_j, X_j}(x_i) = u_i,$$

آن‌گاه تقریب سراسری خاصیت درونیاب موجود در درونیاب‌های موضعی را به ارث می‌برد، یعنی، $\mathcal{P}_{u,X}(x_i) = u_i$. به منظور بیان فرمول کران خطا برای روش افراز واحد، ابتدا برخی شرایط ارائه می‌شود و سپس فرضیات اندکی روی منظم‌سازی Ω_j تعریف می‌شود [۲۳]. بنابراین، لازم است که توابع افراز واحد ω_j ، k -پایدار باشند. این بدان معنا است که به ازای هر $\omega_j \in C^k(\mathbb{R}^d)$ و برای هر $\mu \in \mathbb{N}_0^d$ که $|\mu| \leq k$ ، نامساوی زیر برقرار باشد:

$$\|D^\mu \omega_j\|_{L^\infty(\Omega_j)} \leq C_\mu / \delta_j^{|\mu|},$$

که C_μ یک ثابت مثبت است و δ_j قطر زیردامنه دایره‌ای شکل یا کروی شکل Ω_j است.

تعریف ۱.۲. فرض کنید $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ کراندار باشد و همچنین $x_1, \dots, x_N \in X \subseteq \Omega$ باشند. پوشش باز و کراندار $\{\Omega_j\}_{j=1}^M$ را منظم برای (Ω, X) می‌نامند، هر گاه شرایط زیر برقرار باشند [۲۴، صفحه ۲۷۷، تعریف ۱۸.۱۵]:

- به ازای هر $x \in \Omega$ ، تعداد زیردامنه‌های Ω_j که $x \in \Omega_j$ ، به وسیله ثابت جامع K کراندار شود.
- تمام زیردامنه‌های Ω_j در شرط مخروط داخلی^۱ صدق کنند [۲۴، صفحه ۲۸، تعریف ۶.۳].
- فاصله‌های پری موضعی h_{X_j, Ω_j} به‌طور یکنواخت توسط فاصله پری جامع زیر کراندار شوند [۲۴، صفحه ۱۴، تعریف ۴.۱].

$$h_{X, \Omega} = \sup_{x \in \Omega} \min_{x_i \in X} \|x - x_i\|.$$

تعریف ۲.۲. فضای $(C^k_v(\mathbb{R}^d))$ توابعی که $u \in C^k$ و مشتقات مرتبه $|\mu| = k$ زمانی که $\|x\|_2 \rightarrow 0$ در رابطه زیر صدق کند [۲۴، صفحه ۱۸۰، تعریف ۱۰.۱۱]:

$$D^\mu u(x) = \mathcal{O}(\|x\|^v).$$

^۱ Interior cone condition

^۲ Fill distance

هم اکنون، می‌توان قضیه همگرایی زیر را برای درونیاب روش افراز واحد ارائه کرد [۲۴، صفحه ۲۷۷، قضیه ۱۹.۱۵].

قضیه ۱.۲. فرض کنید $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ باز و کراندار باشد و $x_1, \dots, x_N \in X \subseteq \Omega$ باشند. همچنین، $\phi \in C^k_V(\mathbb{R}^d)$ یک تابع معین مثبت مشروط از مرتبه m باشد. اگر $\{\Omega_j\}_{j=1}^M$ یک پوشش منظم برای (Ω, X) و $\{\omega_j\}_{j=1}^M$ k -پایدار برای $\{\Omega_j\}_{j=1}^M$ باشد، آن‌گاه خطای بین $u \in \mathcal{N}_\phi(\Omega)$ و درونیاب افراز واحد آن $\mathcal{P}_{u,X}$ به ازای تمام $x \in \Omega$ و تمام $|\mu| \leq k/2$ توسط رابطه زیر کراندار می‌شود:

$$|D^\mu u(x) - D^\mu \mathcal{P}_{u,X}(x)| \leq Ch_{X,\Omega}^{(k+\mu)/2-|\mu|} |u|_{\mathcal{N}_\phi(\Omega)}.$$

اگر نتیجه همگرایی گزارش شده در قضیه فوق را با تخمین‌های خطای سراسری در روش درونیاب معمولی مقایسه کنیم، می‌توان نتیجه گرفت که درونیاب روش افراز واحد، مرتبه تقریب موضعی را برای درونیاب سراسری حفظ می‌کند. بنابراین، می‌توان مسأله درونیاب‌های توابع پایه شعاعی بزرگ را به طور کارآمد توسط حل تعداد زیادی از مسائل درونیاب توابع پایه شعاعی کوچک محاسبه کرد و سپس آنها را با روش جامع افراز واحد به یکدیگر متصل کرد. روش مبتنی بر افراز واحد یک وسیله محاسباتی کارآمد و ساده‌ای است که یک مسأله درونیابی بزرگ را به تعداد زیادی مسأله کوچک تبدیل می‌کند، در حالی که می‌توان اطمینان پیدا کرد که دقت به دست آمده برای تقریب‌های موضعی به تقریب جامع منتقل می‌شود.

لازم به ذکر است، هنگامی که از طرح تقریب سراسری روش افراز واحد مبتنی بر توابع پایه شعاعی در یک مسأله معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی استفاده می‌کنیم، مسلتزم این است که تأثیر به کارگیری عملگر دیفرانسیل مکانی $\mathcal{L}$ در نقاط داده‌ای داخلی، محاسبه شود. برای این منظور، از قاعده لایب نیتس^۱ استفاده می‌شود. به عنوان نمونه، مشتق مرتبه μ از تقریب سراسری ارائه شده به صورت زیر به دست می‌آید:

(۱۲)

$$\begin{aligned} \frac{\partial |\mu|}{\partial x^\mu} \mathcal{P}_{u,X}(x) &= \sum_{j \in I(x)} \sum_{k \in J(\Omega_j)} \frac{\partial |\mu|}{\partial x^\mu} (\omega_j(x) \psi_k(x)) u_k \\ &= \sum_{j \in I(x)} \sum_{k \in J(\Omega_j)} \sum_{v \leq \mu} \binom{\mu}{v} \frac{\partial^{|\mu-v|} \omega_j}{\partial x^{\mu-v}}(x) \frac{\partial^{|v|} \psi_k}{\partial x^v}(x) u_k. \end{aligned}$$

اگر $x = x_i$ و k در معادله (۱۲) ثابت در نظر گرفته شود، آنگاه ik -امین مولفه از ماتریس دیفرانسیلی سراسری متناظر با مشتق مرتبه μ به دست می‌آید.

^۱ Leibniz's rule

۳. روش هم‌محلی افراز واحد توابع پایه شعاعی مبتنی بر تفاضلات متناهی

در این بخش، روش هم‌محلی افراز واحد توابع پایه شعاعی مبتنی بر طرح تفاضلات متناهی را برای حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تصادفی سهموی^۱ وابسته به زمان (۱) به کار می‌بریم. در حالت شرایط مرزی دیریکله^۲، می‌توانیم مشتق نسبت به زمان در معادله (۱) را توسط فرمول تفاضلات متناهی معمول با استفاده از طرح θ -وزندار زیر گسسته‌سازی کنیم:

(۱۳)

$$\frac{u^{n+1}(x) - u^n(x)}{\delta t} - \frac{\sigma \delta W^{n+1}(x)}{\delta t} = \theta (\Delta u^{n+1}(x) + f^{n+1}(x)) + (1 - \theta) (\Delta u^n(x) + f^n(x)),$$

که $0 \leq \theta \leq 1$ ، $u^{n+1}(x) = u(x, t^{n+1})$ ، $\delta W^{n+1}(x) = W^{n+1}(x) - W^n(x)$ و $t^{n+1} = t^n + \delta t$ اندازه طول گام زمان است. با بازنویسی معادله (۱۳) به دست می‌آوریم

(۱۴)

$$u^{n+1}(x) + \eta \Delta u^{n+1}(x) = u^n(x) + \zeta \Delta u^n(x) + z^{n+1}(x) + \xi(x),$$

که

$$z^{n+1}(x) = -\eta f^{n+1}(x) + \zeta f^n(x) \text{ و } \zeta = (1 - \theta)\delta t, \eta = -\theta\delta t$$

ضمناً $\xi(x) = \sigma \delta W^{n+1}(x)$ یک میدان گاوسی با میانگین $\mathbb{E}(\xi(x)) = 0$ و هسته^۳ کوواریانس $\mathbb{E}(\xi(x), \xi(y)) = \sigma^2 \delta t q(x, y)$ است. از معادله (۱۴) و تعریف حرکت براونی^۴ نتیجه می‌شود که نمو نويز $\xi(x)$ در هر گام زمانی t^{n+1} مستقل از جواب $u^n(x)$ در گام پیشین است. فرایند گاوسی با کوواریانس $\sigma^2 \delta t q(x, y)$ در مجموعه متناهی از نقاط از پیش معین شده شبیه‌سازی می‌شود [۲۵].

هم‌اکنون، با توجه به معادله (۹)، $u^n(x)$ را می‌توانیم توسط رابطه زیر تقریب بزنیم

(۱۵)

$$u^n(x) \simeq p^n(x) = \sum_{j \in I(x)} \sum_{k \in J(\Omega_j)} (\omega_j(x) \psi_k(x)) u_k^n.$$

^۱ Parabolic

^۲ Dirichlet

^۳ Kernel

^۴ Brownian motion

اگر فرض کنیم که $\mathfrak{S}$ و $\mathfrak{B}$ به ترتیب نشان دهنده اندیس‌های نقاط داخلی و مرزی باشند و همچنین N تعداد تمام مراکز باشد، یعنی، $N = N_{\mathfrak{S}} + N_{\mathfrak{B}}$ ، آن‌گاه ماتریس $A, N \times N$ را می‌توان به صورت حاصل جمع دو ماتریس $A_{\mathfrak{S}}$ و $A_{\mathfrak{B}}$ نوشت

$$A = A_{\mathfrak{S}} + A_{\mathfrak{B}},$$

که

$$A = \left[\omega_j(x_i) \psi_k(x_i) \text{ به ازای } (j \in I(x_i), k \in J(\Omega_j), i = 1, \dots, N) \text{ و } 0 \text{ جای دیگر} \right]_{N \times N},$$

$$A_{\mathfrak{S}} = \left[a_{ij} \text{ به ازای } (i \in \mathfrak{S}, 1 \leq j \leq N) \text{ و } 0 \text{ در جاهای دیگر} \right]_{N \times N},$$

$$A_{\mathfrak{B}} = \left[a_{ij} \text{ به ازای } (i \in \mathfrak{B}, 1 \leq j \leq N) \text{ و } 0 \text{ در جاهای دیگر} \right]_{N \times N}.$$

هم‌اکنون با جایگذاری (۱۵) در معادله (۱۴) همراه با شرایط مرزی (۳) و همچنین اعمال نقاط هم‌محلی، دستگاه معادلات تنکی حاصل می‌شود، که فرم ماتریسی آن به صورت زیر است

(۱۶)

$$C\mathbf{u}^{n+1} = D\mathbf{u}^n + \mathbf{v}^{n+1} + \boldsymbol{\xi},$$

که

$$C = A + \eta \Delta A_{\mathfrak{S}},$$

$$D = A_{\mathfrak{S}} + \zeta \Delta A_{\mathfrak{S}},$$

$$\mathbf{v}^{n+1} = \left[z_i^{n+1} \text{ به ازای } (i \in \mathfrak{S}) \text{ و } g_j^{n+1} \text{ به ازای } (j \in \mathfrak{B}) \right]^T,$$

$$\boldsymbol{\xi} = \left[\xi(x_i) \text{ به ازای } (i \in \mathfrak{S}) \text{ و } 0 \text{ در جاهای دیگر} \right]^T,$$

$$\mathbf{u}^n = (u_1^n, \dots, u_N^n)^T.$$

در رابطه (۱۶) بردار تصادفی $\boldsymbol{\xi}$ در هر شبیه‌سازی مقادیر متفاوتی را اختیار می‌کند. در حقیقت، $\boldsymbol{\xi}$ یک بردار تصادفی است که یافته‌های آن بر اساس یک توزیع نرمال چندمتغیره گاوسی تولید می‌شوند، یعنی:

$$\left[\xi(x_i) \text{ به ازای } (i \in \mathfrak{S}) \right]^T \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}),$$

که برای $i, j \in \mathfrak{S}$ خواهیم داشت:

$$Q_{ij} = \sigma^2 \delta t q(x_i, x_j).$$

لازم به ذکر است که هسته به کار رفته در ماتریس کوواریانس فوق به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$q(x,y) = \frac{1}{(\|x - y\|^2 + 1)^2}.$$

دستگاه (۱۶) به وسیله ترکیب معادله (۱۴) (با اعمال نقاط داخلی) و معادله (۳) (با اعمال نقاط مرزی)، حاصل می‌شود. لذا، می‌توانیم u^{n+1} را به وسیله حل کردن دستگاه معادلات (۱۶) با استفاد از شرط اولیه ارائه شده در معادله (۲) به دست آوریم. سپس، با جایگذاری مقدار u^n در رابطه زیر

(۱۷)

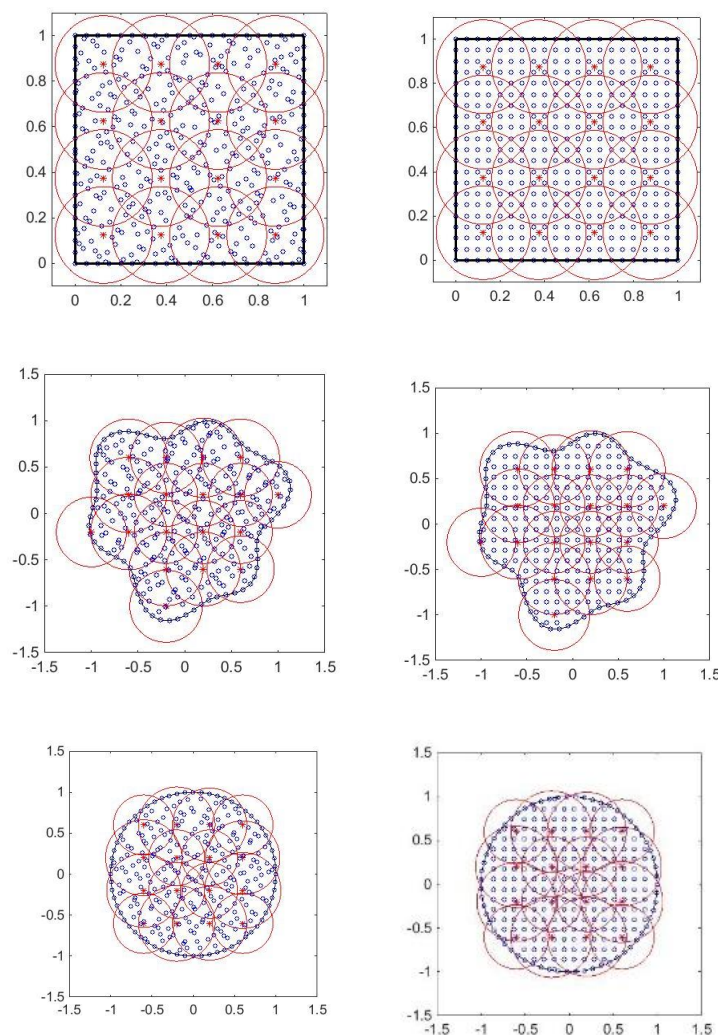
$$p^n = Au^n,$$

می‌توانیم جواب تقریبی از معادله دیفرانسیلی با مشتقات جزئی در گام زمانی n ام را به دست آوریم. تا کنون هیچ اثبات نظری در مورد وارون‌پذیری ماتریس C زمانی که $\theta > 0$ باشد، ارائه نشده است. اما، برای حالت $\theta = 0$ ، تنها به وارون‌پذیری ماتریس A نیاز داریم، که این امر توسط مجموعه نقاط هم‌محلی متمایز، تضمین می‌شود.

۴. نتایج عددی

در این بخش عملکرد روش ارائه شده، یعنی روش افراز واحد توابع پایه شعاعی مبتنی بر تفاضلات متناهی، را با به‌کارگیری شبیه‌سازی‌های عددی متنوع مورد بررسی قرار خواهیم داد. در ادامه، بر روی یک مجموعه گسترده از آزمایش‌ها تمرکز خواهیم کرد که مرتبط با مسأله گرمای تصادفی دو بعدی و سه بعدی است که در بخش‌های قبل مطالعه شدند. برای انجام این کار، دامنه حل معادله، Ω ، به وسیله دو نوع متفاوت از توزیع نقاط داده‌ای گسسته‌سازی می‌شود که شامل N نقطه گره‌ای یکنواخت یا N نقطه شبه‌تصادفی هالتون است. هم‌چنین به منظور بررسی عملکرد روش بر دامنه‌های با اشکال هندسی متنوع، سه نوع دامنه محاسباتی منظم و نامنظم برای آزمایش‌های عددی در نظر می‌گیریم، که شامل دو دامنه منظم مربع واحد و مکعب واحد و دو ناحیه نامنظم یعنی ناحیه محدب دایره واحد و ناحیه نامحدب برگی شکل است (تصاویر بعضی از این نواحی در شکل ۱ ارائه شده است).

پوشش افراز واحد به وسیله M قطعه دایره‌ای شکل در دامنه دو بعدی و کروی شکل در دامنه سه بعدی که مراکز آنها در یک شبکه یکنواخت نقاط قرار دارد، تشکیل می‌شود، که هم‌پوشانی بین قطعه‌ها، ۲۰ درصد فاصله بین مراکز قطعه‌ها است [۲۶]. البته باید توجه شود که، زیردامنه‌ها در طرح افراز واحد ممکن است شکل‌های هندسی متفاوتی از قبیل دایره، مربع، مستطیل، پنج ضلعی در دامنه دو بعدی و کره و مکعب در دامنه سه بعدی داشته باشند. در حقیقت، تنها شرط لازم برای طرح افراز به کار رفته آن است که دامنه Ω را پوشش دهد. با توجه به سهولت کار با قطعه‌های دایره‌ای شکل در دامنه دو بعدی و کروی شکل در دامنه سه بعدی، در این فصل از زیردامنه‌های دایره‌ای و کروی بهره برده‌ایم. نمونه‌ای از افراز واحد بر روی دامنه‌های مربعی، نامحدب برگی شکل و محدب دایره‌ای در دامنه دو بعدی در شکل ۱ به ترتیب از بالا به پایین، نشان داده شده است.



شکل ۱. افراز واحد از دامنه‌های منظم و نامنظم با قطعه‌های دایره‌ای شکل برای نقاط هالتون (چپ) و یکنواخت (راست).

لازم به ذکر است، در پیاده‌سازی روش هم‌محلی افراز واحد توابع پایه شعاعی مبتنی بر تفاضلات متناهی از توابع پایه شعاعی چنددرجی معکوس (IMQ) و مترن درجه دو (M4) در رابطه (۹) استفاده کرده‌ایم. هم‌چنین، از تابع با محمل فشرده و ندلند C^2 ، یعنی $W2$ ، به عنوان تابع موضعی کننده وزن‌های شپارد در رابطه (۱۱)، بهره برده‌ایم. در آزمایش‌های عددی انجام شده، خطاهای تقریب بر اساس مقدار بهینه پارامتر شکل گزارش شده است. این مقادیر بهینه از ϵ را در بازه $[0.05, 12.00]$ با طول گام 0.05 جستجو می‌کنیم. توجه داشته باشید که دقت روش‌های مبتنی بر توابع پایه شعاعی به انتخاب پارامتر شکل توابع پایه‌ای بستگی دارد، که تغییر پارامتر شکل بر روی همواری تابع پایه شعاعی تأثیر می‌گذارد. به ویژه، بهترین دقت برای مسائل هموار معمولاً زمانی به دست می‌آید که پارامتر شکل به کار رفته کوچک باشد. اما این موضوع سبب می‌شود که عدد شرطی دستگاه خطی بسیار بزرگ شود. در عمل، حتی اگر عدد شرطی روش افراز واحد

خیلی بهتر از روش توابع پایه شعاعی سراسری باشد، انتخاب پارامترهای شکل مناسب تأثیر به سزایی بر دقت روش افراز واحد دارد.

بعد از ذکر مقدمات لازم در پیاده‌سازی روش ارائه شده در این مقاله، الگوریتم عددی به کار رفته در سه مرحله مشخص بیان می‌شود:

- مرحله ۱: برای $i = 1, \dots, S$ ، نويز گاوسی $\xi(x) = \sigma^2 \delta t q(x, y)$ در نقاط هم‌محلی تقریب زده می‌شود که S تعداد تکرارها و $\sigma^2 \delta t q(x, y)$ تابع کوواریانس نويز گاوسی است.

- مرحله ۲: برای $i = 1, \dots, S$ ، u^n را به وسیله حل کردن دستگاه معادلات (۱۶) با جایگذاری $\left[\xi(x_j) \right]^T \sim \mathcal{N}(0, Q)$ به ازای $(j \in \mathfrak{S})$ به جای $\xi(x)$ به دست آوریم که

$$Q_{ij} = \sigma^2 \delta t q(x_i, x_j)$$

به ازای $(i, j \in \mathfrak{S})$ است. سپس، با جای‌گذاری مقدار u^n در رابطه (۱۷)، می‌توانیم جواب تقریبی p از معادله دیفرانسیلی تصادفی با مشتقات جزئی در گام زمانی n ام را به دست آوریم.

- مرحله ۳: فرض کنید که $\mathbb{E}$ ، Dev ، Upp و Low به ترتیب معیارهای آماری^۱ مانند میانگین، انحراف معیار^۲، کران بالا و کران پایین را برای پیش‌گویی نشان می‌دهند. ارزیابی $\mathbb{E}(p^{n_T}(x_j))$ ، $Dev(p^{n_T}(x_j))$ ، $Upp(p^{n_T}(x_j))$ و $Low(p^{n_T}(x_j))$ را با استفاده از روش مونت-کارلو^۳ به صورت زیر انجام می‌دهیم

(۱۸)

$$\mathbb{E}(p^{n_T}(x_j)) = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^S p_i^{n_T}(x_j),$$

$$Dev(p^{n_T}(x_j)) = \sqrt{\frac{1}{S-1} \sum_{i=1}^S \left(p_i^{n_T}(x_j) - \mathbb{E}(p^{n_T}(x_j)) \right)^2},$$

$$Upp(p^{n_T}(x_j)) = \mathbb{E}(p^{n_T}(x_j)) + 1.96 Dev(p^{n_T}(x_j)),$$

$$Low(p^{n_T}(x_j)) = \mathbb{E}(p^{n_T}(x_j)) - 1.96 Dev(p^{n_T}(x_j)),$$

^۱ Statistical

^۲ Standard deviation

^۳ Monte-Carlo

که T حداکثر گام زمانی را نمایش می‌دهد، یعنی $T = t_{max} = 1$ و p_i^{nT} ، جواب تقریبی p^{nT} از معادله دیفرانسیلی تصادفی با مشتقات جزئی در زمان T و شبیه‌سازی i ام است.

در ادامه، کارایی روش پیشنهادی را برای حل معادله گرمای تصادفی دو بعدی و سه بعدی بررسی می‌کنیم. برای مسائل مطرح شده، از ۱۰۰۰ شبیه‌سازی ($S = 1000$) استفاده می‌کنیم و معیارهای آماری مانند میانگین، واریانس^۱ و انحراف معیار محاسبه و گزارش می‌شود. به منظور بررسی دقت روش، از معیارهای زیر برای اندازه‌گیری خطا استفاده می‌کنیم:

(۱۹)

$$ABS(x_i) = |\mathbb{E}(p^{nT}(x_i)) - u(x_i, T)|,$$

$$MAE = \max_{1 \leq i \leq N} ABS(x_i),$$

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (ABS(x_i))^2},$$

که ABS ، MAE و RMS به ترتیب خطای مطلق، خطای مطلق ماکسیمم^۲ و میانگین مربعات خطا را نمایش می‌دهند و u جواب دقیق مورد انتظار بدون حضور نویز گاوسی است. همچنین، پایداری روش به وسیله ارزیابی عدد شرطی مورد مطالعه قرار می‌گیرد، که با استفاده از دستور *condtest* در نرم‌افزار متلب محاسبه می‌شود. معیار تنکی (*sparsity*) ماتریس ضرایب را به عنوان تعداد درایه‌های غیرصفر ماتریس ضرایب به تعداد کل درایه‌های آن محاسبه می‌کنیم. اگر چه طرح تقریبی توصیف شده در این مقاله به طور کلی برای هر مقدار $\theta \in [0, 1]$ معتبر است، در ادامه بر روی حالت $\theta = 1/2$ متمرکز می‌شویم که به طرح کرانک-نیکلسون^۳ معروف است.

هدف اساسی در این بخش، بررسی عددی روش ارائه شده از دو منظر متفاوت است: از یک طرف، تجزیه و تحلیل کارآمدی روش بر اساس زمان اجرای^۴ برنامه است و از طرف دیگر، تأیید دقت و پایداری روش با بهره‌گیری از ساختار تنک ماتریس ضرایب است. به علاوه، روش هم‌محلی افراز واحد توابع پایه شعاعی مبتنی بر تفاضلات متناهی را با روش هم‌محلی توابع پایه شعاعی مبتنی بر تفاضلات متناهی که در مرجع [۲۷] ارائه شده است و از رویکرد سراسری برخوردار است، مقایسه می‌کنیم.

در ادامه، سه مثال از مسأله گرمای تصادفی مورد مطالعه در بخش‌های قبل را، با جزئیات بیشتر مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مثال ۱.۴. حل معادله گرمای تصادفی بر روی دامنه مربع واحد و دامنه برگی شکل

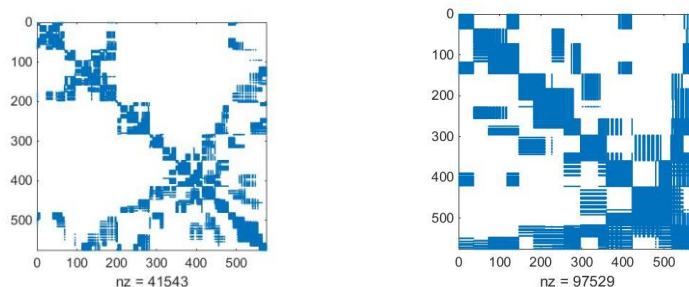
در این مثال نتایج عددی حاصل از آزمایش‌های انجام شده برای معادله گرمای تصادفی ارائه شده در بخش ۳ بر روی دامنه منظم مربعی و نامنظم نامحدب برگی شکل، ارائه شده است. فرض کنید که تابع f و شرایط اولیه و شرایط مرزی

^۱ Variance^۲ Maximum absolute error^۳ Crank and Nicolson^۴ CPU Time

دیریکله در معادله به گونه‌ای در نظر گرفته شده است که جواب تحلیلی مورد انتظار این معادله بدون حضور نویز گاوسی به صورت زیر است:

$$u(x,y,t) = t^2(\exp(x+y) + \exp(y)\sin(x)).$$

یکی از مزیت‌های اصلی روش افراز، واحد توابع پایه شعاعی مبتنی بر تفاضلات متناهی انعطاف‌پذیری بالای آن است. در حقیقت، این طرح اجازه می‌دهد تا به طور دلخواه تعدادی از قطعه‌ها را برای پوشش دامنه انتخاب کنید. به طور کلی، یک پوشش با تعداد قطعه‌های بیشتر منجر به نتایج تقریبی با دقت کمتر می‌شود اما در عین حال از نظر محاسباتی کم هزینه‌تر است. این امر به دلیل تنگی بیشتر دستگاه معادلات خطی است. برای آن که ارتباط میان تعداد قطعه‌های به کار رفته و میزان تنگی ماتریس ضرایب را بهتر مشاهده کنیم، ساختار تنک تولید شده توسط طرح خود را برای معادله گرمای تصادفی بر روی دو افراز متفاوت در شکل ۲ ارائه کرده‌ایم. همان‌طور که از این تصاویر مشخص است، برای تعداد مراکز ثابت، اگر تعداد قطعه‌ها بیشتر باشد منجر به تنگی بیشتر می‌شود که این افزایش تنگی به بهبود کارآمدی طرح عددی کمک می‌کند اما در عین حال دقت آن را نیز کاهش می‌دهد.



شکل ۲. ساختار تنگی ماتریس ضرایب برای معادله گرمای تصادفی بر روی دامنه مربعی با 24×24 نقطه یکنواخت و 5×5 قطعه (چپ) و 3×3 قطعه (راست) با به کارگیری IMQ و $\epsilon = 1.80$.

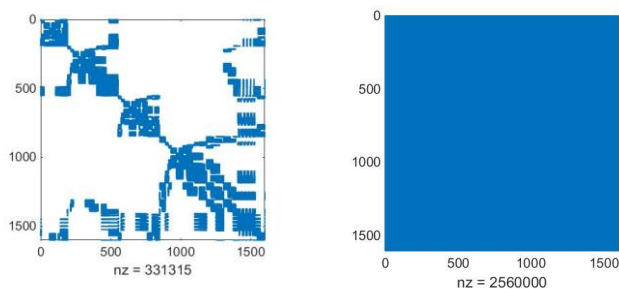
در جدول‌های ۲ و ۳، تجزیه و تحلیل مناسبی از عملکرد روش هم‌محلی افراز واحد تابع پایه شعاعی مبتنی بر تفاضلات متناهی ارائه شده است و آن را با روش سراسری تابع پایه شعاعی مبتنی بر تفاضلات متناهی که در مرجع [۲۷] ارائه شده است، مقایسه کرده‌ایم. به طور دقیق‌تر، دو مجموعه از نقاط هالتون و یکنواخت را در نظر می‌گیریم و از تابع پایه‌ای IMQ در ساختار تقریب خود استفاده می‌کنیم. خطای ماکزیمم مطلق (MAE)، میانگین مربعات خطا (RMS)، زمان اجرای برنامه ($CPU\ time$) بر حسب ثانیه برای حل دستگاه خطی و تنک (۱۶)، عدد شرطی (CN) و معیار تنگی ماتریس ضرایب در این جداول گزارش شده است. علاوه بر این در شکل ۳، ساختار تنک به دست آمده با استفاده از رویکرد موضعی ارائه شده در این مقاله و ساختار شلوغ به دست آمده از رویکرد سراسری با یکدیگر مقایسه شده‌اند. همچنین در شکل ۴، رویه‌های از جواب دقیق مورد انتظار، میانگین، خطای مطلق، انحراف معیار، کران‌های بالا و پایین بر اساس شبیه‌سازی‌های صورت گرفته گزارش شده است. در تمام آزمایشات $\delta t = 0.001$ ، $T = 1$ و $\sigma = 1$ در نظر گرفته شده است. لازم به ذکر است در جدول‌های ۲ و ۳، M تعداد قطعه‌های به کار رفته بوده و N تعداد نقاط هم‌محلی هستند.

جدول ۲. مقایسه بین روش افراز واحد توابع پایه شعاعی مبتنی بر تفاضلات متناهی ($RBF - PU - FD$) و روش توابع پایه شعاعی مبتنی بر تفاضلات متناهی ($RBF - FD$) با استفاده از IMQ برای معادله گرماي تصادفی بر روی دامنه مربعی برای نقاط یکنواخت با $\delta t = 0.001$ و $T = 1$

$RBF - PU - FD$							
$\sqrt{N}$	$\sqrt{M}$	ϵ	MAE	RMS	$CPU\ time$	CN	$sparsity$
16	2	1.35	5.38×10^{-3}	2.60×10^{-3}	1.68	$3.54 \times 10^{+01}$	5.16×10^{-1}
24	3	1.80	5.26×10^{-3}	2.46×10^{-3}	5.54	$9.37 \times 10^{+01}$	2.93×10^{-1}
32	4	2.85	4.88×10^{-3}	1.63×10^{-3}	15.84	$1.94 \times 10^{+02}$	1.88×10^{-1}
40	5	3.60	3.03×10^{-3}	1.10×10^{-3}	50.38	$8.09 \times 10^{+02}$	1.29×10^{-1}
$RBF - FD$							
$\sqrt{N}$	ϵ	MAE	RMS	$CPU\ time$	CN	$sparsity$	
16	1.45	1.55×10^{-2}	5.39×10^{-3}	8.10	$3.20 \times 10^{+18}$	1	
24	2.40	1.36×10^{-2}	4.95×10^{-3}	31.49	$7.49 \times 10^{+17}$	1	
32	3.25	1.06×10^{-2}	4.32×10^{-3}	87.10	$4.60 \times 10^{+17}$	1	
40	4.25	8.70×10^{-3}	3.68×10^{-3}	331.88	$3.03 \times 10^{+17}$	1	

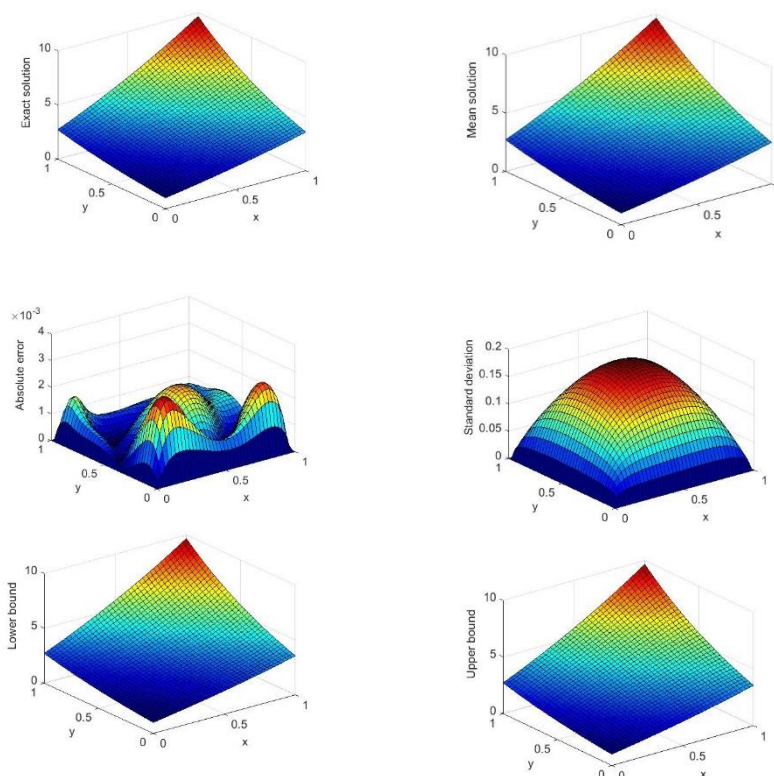
جدول ۳. مقایسه بین روش پارتیشن‌بندی واحد توابع پایه شعاعی مبتنی بر تفاضلات متناهی ($RBF - PU - FD$) و روش توابع پایه شعاعی مبتنی بر تفاضلات متناهی ($RBF - FD$) با استفاده از IMQ برای معادله گرماي تصادفی بر روی دامنه مربعی برای نقاط هالتون با $\delta t = 0.001$ و $T = 1$

$RBF - PU - FD$							
$\sqrt{N}$	$\sqrt{M}$	ϵ	MAE	RMS	$CPU\ time$	CN	$sparsity$
16	2	1.10	9.87×10^{-3}	4.42×10^{-3}	2.46	$2.45 \times 10^{+02}$	4.95×10^{-1}
24	3	1.85	3.44×10^{-3}	1.57×10^{-3}	5.51	$1.23 \times 10^{+05}$	2.85×10^{-1}
32	4	2.60	2.32×10^{-3}	1.13×10^{-3}	19.52	$1.38 \times 10^{+04}$	1.80×10^{-1}
40	5	3.25	2.04×10^{-3}	1.06×10^{-3}	51.02	$2.95 \times 10^{+04}$	1.24×10^{-1}
$RBF - FD$							
$\sqrt{N}$	ϵ	MAE	RMS	$CPU\ time$	CN	$sparsity$	
16	1.30	1.06×10^{-2}	3.94×10^{-3}	8.73	$9.53 \times 10^{+17}$	1	
24	2.25	9.31×10^{-3}	3.79×10^{-3}	34.00	$6.99 \times 10^{+17}$	1	
32	3.05	9.13×10^{-3}	3.58×10^{-3}	106.50	$1.06 \times 10^{+18}$	1	
40	3.85	8.69×10^{-3}	3.44×10^{-3}	397.61	$6.75 \times 10^{+17}$	1	



شکل ۳. ساختار تنکی ماتریس ضرایب برای معادله گرمای تصادفی بر روی دامنه مربعی با 40×40 نقطه یکنواخت و 5×5 قطعه با استفاده از روش افراز واحد توابع پایه شعاعی مبتنی بر تفاضلات متناهی $(RBF - PU - FD)$ (چپ) و روش توابع پایه شعاعی مبتنی بر تفاضلات متناهی $(RBF - FD)$ (راست) و با به کارگیری IMQ ، $\delta t = 0.001$ و $T = 1$

از این نتایج می‌توان نتیجه گرفت: از یک سو، دقت دو روش (روش افراز واحد توابع پایه شعاعی مبتنی بر تفاضلات متناهی و روش توابع پایه شعاعی مبتنی بر تفاضلات متناهی) تقریباً یکسان است، اما از سوی دیگر، یک کاهش قابل توجه در زمان اجرای برنامه، عدد شرطی و معیار تنکی ماتریس ضرایب برای روش افراز واحد توابع پایه شعاعی مبتنی بر تفاضلات متناهی در مقایسه با روش توابع پایه شعاعی مبتنی بر تفاضلات متناهی حاصل شده است. بنابراین رویکرد موضعی ارائه شده در این مقاله با حفظ دقت روش، پایداری و کارایی آن را به‌طور قابل توجهی افزایش داده است. به‌علاوه چیدمان یکنواخت و هالتون به نتایج تقریباً مشابهی منجر شده‌اند، که این امر بیانگر عملکرد مطلوب روش فارغ از نوع چیدمان نقاط است.



شکل ۴. رویه‌های جواب دقیق مورد انتظار، میانگین، خطای مطلق، انحراف معیار، کران‌های پایین و بالا برای معادله گرمای تصادفی بر روی دامنه مربعی با 40×40 نقطه یکنواخت و 5×5 قطعه با به کارگیری IMQ ، $\delta t = 0.001$ و $T = 1$

در ادامه، به منظور بیان کارآمدی روش پیشنهادی بر روی دامنه نامنظم، معادله گرمای تصادفی را بر روی دامنه نامحدب برگی شکل که در شکل ۱ (نمودارهای میانی) نشان داده شده است، حل می‌کنیم. مرز این دامنه نامنظم، Ω ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

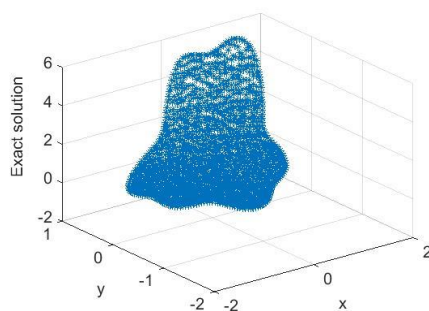
$$\partial\Omega = \left\{ (r, \theta) \mid r(\theta) = 1 + \frac{1}{10} (\sin(6\theta) + \sin(3\theta)) \right\}.$$

به منظور پوشش دامنه با قطعه‌های دایره‌ای شکل، از طرح هم‌پوشانی پیشنهاد شده در مرجع [۲۸] استفاده شده است. در جدول ۴، نتایج به دست آمده از روش $RBF - PU - FD$ بر روی دامنه نامنظم با روش سراسری $RBF - FD$ برای چیدمان نقاط یکنواخت با به کارگیری تابع پایه شعاعی IMQ مقایسه شده است. از آنجایی که نتایج برای چیدمان هالتون نیز مشابه چیدمان یکنواخت می‌باشد از ذکر نتایج آن صرف نظر کرده‌ایم.

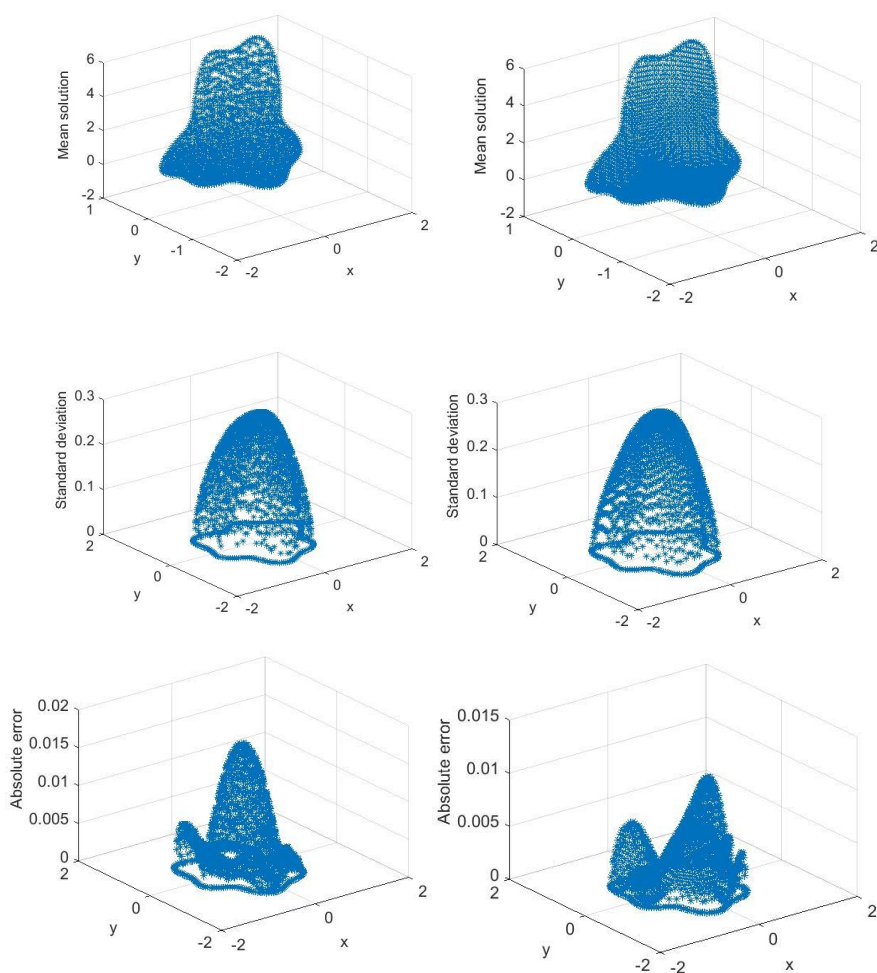
جدول ۴. مقایسه بین روش افراز واحد توابع پایه شعاعی مبتنی بر تفاضلات متناهی ($RBF - PU - FD$) و روش توابع پایه شعاعی مبتنی بر تفاضلات متناهی ($RBF - FD$) با استفاده از IMQ برای معادله گرمای تصادفی بر روی دامنه نامحدب برای نقاط یکنواخت با $\delta t = 0.001$ و $T = 1$.

$RBF - PU - FD$							
N	M	ϵ	MAE	RMS	$CPU \text{ time}$	CN	$sparsity$
289	6	0.80	1.28×10^{-2}	3.99×10^{-3}	2.89	$9.97 \times 10^{+01}$	4.32×10^{-1}
639	10	1.35	1.08×10^{-2}	3.88×10^{-3}	9.12	$3.20 \times 10^{+02}$	3.73×10^{-1}
1119	18	1.65	9.87×10^{-3}	3.15×10^{-3}	19.94	$7.04 \times 10^{+02}$	1.96×10^{-1}
1729	27	2.30	9.10×10^{-3}	2.39×10^{-3}	70.54	$6.39 \times 10^{+02}$	1.41×10^{-1}
$RBF - FD$							
N	ϵ	MAE	RMS	$CPU \text{ time}$	CN	$sparsity$	
289	0.90	1.55×10^{-2}	5.92×10^{-3}	9.93	$5.36 \times 10^{+17}$	1	
639	1.45	1.42×10^{-2}	4.69×10^{-3}	36.64	$3.20 \times 10^{+18}$	1	
1119	2.05	1.23×10^{-2}	3.51×10^{-3}	109.13	$2.24 \times 10^{+17}$	1	
1729	2.60	1.03×10^{-2}	2.10×10^{-3}	426.38	$1.31 \times 10^{+17}$	1	

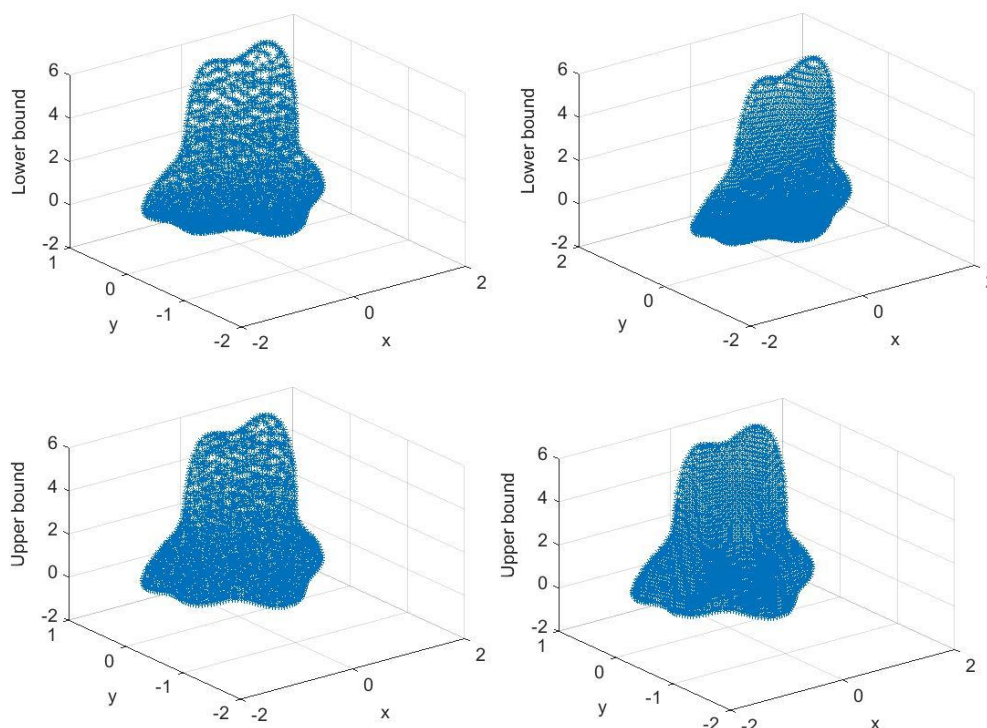
به علاوه، در شکل‌های ۵، ۶ و ۷ رویه‌هایی از جواب دقیق مورد انتظار، خطای مطلق و معیارهای آماری مانند میانگین، انحراف معیار، کران‌های بالا و پایین را برای جواب‌های به دست آمده بر اساس چیدمان نقاط یکنواخت (نمودارهای سمت راست) و هالتون (نمودارهای سمت چپ) گزارش کرده‌ایم.



شکل ۵. رویه جواب دقیق مورد انتظار برای معادله گرمای تصادفی بر روی دامنه نامحدب برای $T = 1$.



شکل ۶. رویه‌های میانگین، انحراف معیار و خطای مطلق برای جواب معادله گرمای تصادفی بر روی دامنه نامحدب با ۱۷۶۲ نقطه هالتون (چپ) و با ۱۷۲۹ نقطه یکنواخت (راست) با استفاده از ۲۷ قطعه و با به کارگیری IMQ ، $\delta t = 0.001$ و $T = 1$.



شکل ۷. رویه‌های کران پایین و بالا برای جواب معادله گرمای تصادفی بر روی دامنه نامحدوب با 1762 نقطه هالتون (چپ) و با 1729 نقطه یکنواخت (راست) با استفاده از 27 قطعه با به کارگیری IMQ ، $\delta t = 0.001$ و $T = 1$

مثال ۲.۴. معادله گرمای تصادفی بر روی دامنه دایره‌ای شکل

در این مثال نتایج عددی حاصل از آزمایش‌های انجام شده برای معادله گرمای تصادفی ارایه شده در بخش ۳ بر روی دامنه دایره واحد (شکل ۱، نمودارهای پایینی)، ارایه شده است. فرض کنید که تابع f و شرایط اولیه و شرایط مرزی دیریکله در معادله به گونه‌ای در نظر گرفته شده است که جواب تحلیلی مورد انتظار این معادله بدون حضور نویز گاوسی به صورت زیر است:

$$u(x, y, t) = \left(\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) \sin\left(\frac{7\pi x}{4}\right) \sin\left(\frac{3\pi y}{4}\right) \sin\left(\frac{5\pi y}{4}\right) \right) \exp(x + t).$$

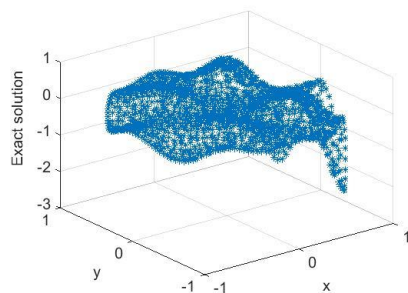
در جداول ۵ و ۶ نتایج به دست آمده از روش موضعی $RBF - PU - FD$ بر روی دامنه نامنظم دایره واحد با روش سراسری $RBF - FD$ برای هر دو چیدمان نقاط یکنواخت و هالتون با به کارگیری تابع پایه شعاعی $M4$ مقایسه شده است. به علاوه، در شکل‌های ۸، ۹ و ۱۰ رویه‌هایی از جواب دقیق، خطای مطلق و معیارهای آماری مانند میانگین، انحراف معیار، کران‌های بالا و پایین را برای نتایج به دست آمده بر روی چیدمان نقاط یکنواخت (نمودارهای سمت راست) و هالتون (نمودارهای سمت چپ) گزارش کرده‌ایم.

جدول ۵: مقایسه بین روش افراز واحد توابع پایه شعاعی مبتنی بر تفاضلات متناهی ($RBF - PU - FD$) و روش توابع پایه شعاعی مبتنی بر تفاضلات متناهی ($RBF - FD$) با استفاده از $M4$ برای معادله گرمای تصادفی بر روی دامنه نامنظم دایره واحد برای نقاط یکنواخت با $\delta t = 0.001$ و $T = 1$.

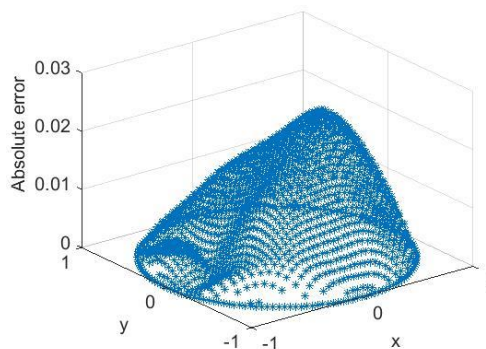
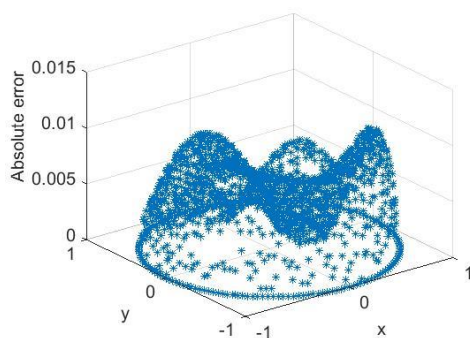
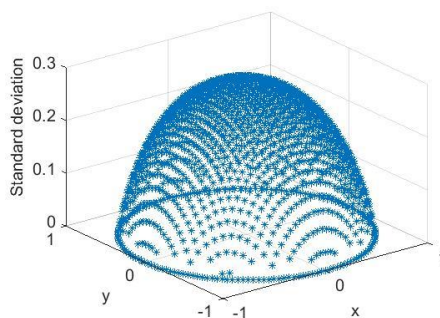
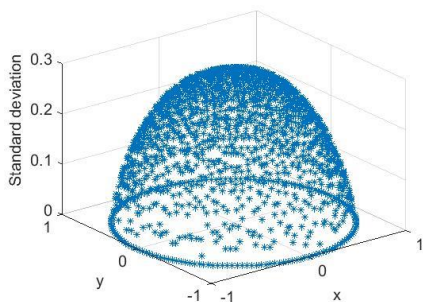
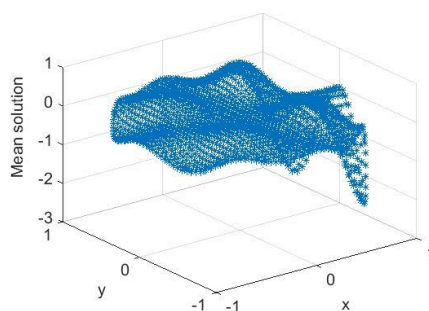
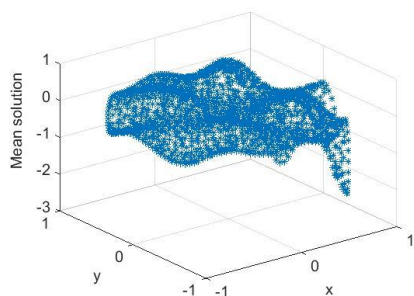
$RBF - PU - FD$							
N	M	ϵ	MAE	RMS	$CPU\ time$	CN	$sparsity$
283	5	0.05	2.28×10^{-2}	5.96×10^{-3}	2.27	$4.20 \times 10^{+00}$	4.36×10^{-1}
621	12	0.10	1.21×10^{-2}	3.83×10^{-3}	7.70	$4.61 \times 10^{+00}$	2.94×10^{-1}
1088	16	0.10	6.34×10^{-3}	2.86×10^{-3}	20.65	$8.43 \times 10^{+00}$	2.75×10^{-1}
1645	25	0.10	4.81×10^{-3}	2.40×10^{-3}	56.71	$3.88 \times 10^{+01}$	1.65×10^{-1}
$RBF - FD$							
N	ϵ	MAE	RMS	$CPU\ time$	CN	$sparsity$	
283	0.05	4.21×10^{-2}	1.44×10^{-2}	7.03	$1.96 \times 10^{+16}$	1	
621	0.10	4.02×10^{-2}	1.38×10^{-2}	33.59	$6.60 \times 10^{+15}$	1	
1088	0.10	3.71×10^{-2}	1.20×10^{-2}	94.11	$6.35 \times 10^{+16}$	1	
1645	0.10	2.38×10^{-2}	1.18×10^{-2}	262.89	$1.91 \times 10^{+18}$	1	

جدول ۶: مقایسه بین روش افراز واحد توابع پایه شعاعی مبتنی بر تفاضلات متناهی ($RBF - PU - FD$) و روش توابع پایه شعاعی مبتنی بر تفاضلات متناهی ($RBF - FD$) با استفاده از $M4$ برای معادله گرمای تصادفی بر روی دامنه نامنظم دایره واحد برای نقاط هالتون با $\delta t = 0.001$ و $T = 1$.

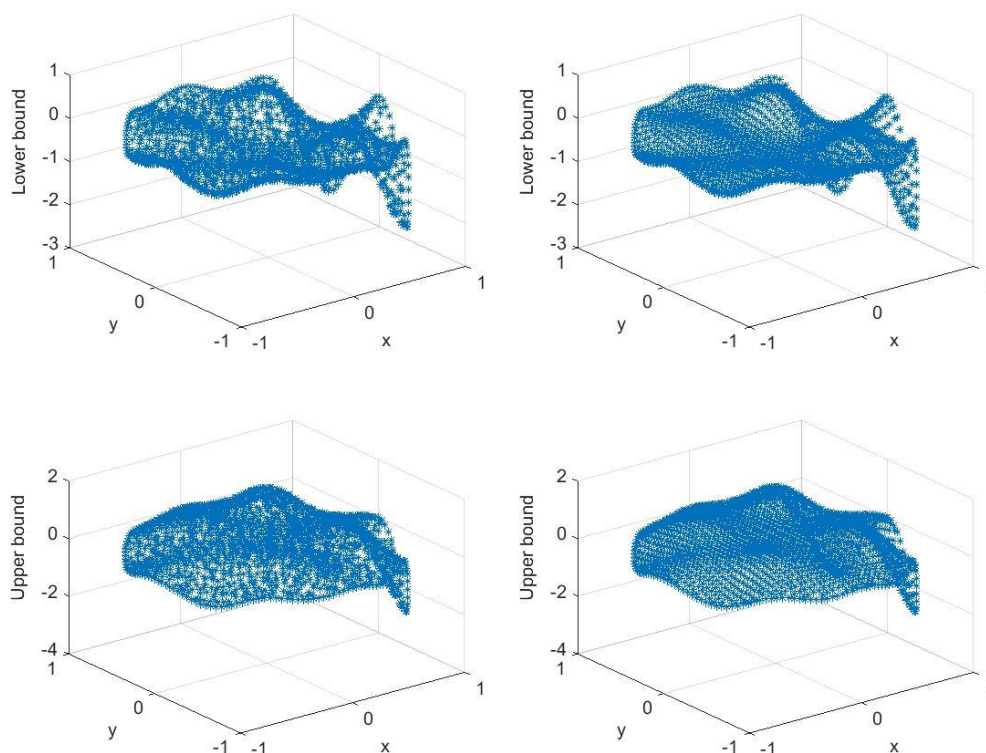
$RBF - PU - FD$							
N	M	ϵ	MAE	RMS	$CPU\ time$	CN	$sparsity$
298	5	0.05	3.28×10^{-2}	9.47×10^{-3}	1.59	$2.14 \times 10^{+01}$	4.40×10^{-1}
636	12	0.10	8.89×10^{-3}	3.71×10^{-3}	5.73	$1.33 \times 10^{+01}$	2.95×10^{-1}
1109	16	0.10	7.25×10^{-3}	3.49×10^{-3}	24.24	$2.87 \times 10^{+01}$	2.73×10^{-1}
1709	25	0.10	6.11×10^{-3}	3.05×10^{-3}	60.07	$1.47 \times 10^{+02}$	1.64×10^{-1}
$RBF - FD$							
N	ϵ	MAE	RMS	$CPU\ time$	CN	$sparsity$	
298	0.05	3.58×10^{-2}	1.50×10^{-2}	8.20	$9.54 \times 10^{+16}$	1	
636	0.10	2.84×10^{-2}	1.20×10^{-2}	37.34	$2.04 \times 10^{+16}$	1	
1109	0.10	1.31×10^{-2}	5.70×10^{-3}	123.44	$1.27 \times 10^{+17}$	1	
1709	0.15	1.03×10^{-2}	5.18×10^{-3}	404.17	$4.96 \times 10^{+16}$	1	



شکل ۸: رویه جواب دقیق مورد انتظار برای معادله گرمای تصادفی بر روی دامنه نامنظم دایره واحد برای $T = 1$



شکل ۹: رویه‌های میانگین، انحراف معیار و خطای مطلق برای جواب معادله گرمای تصادفی بر روی دامنه نامنظم دایره واحد با 1709 نقطه هالتون (چپ) و با 1645 نقطه یکنواخت (راست) با استفاده از 25 قطعه و با به کارگیری $M4$ ، $\delta t = 0.001$ و $T = 1$



شکل ۱۰. کران پایین و بالا برای جواب معادله گرمای تصادفی بر روی دامنه نامنظم دایره واحد با ۱۷۰۹ نقطه هالتون (چپ) و با ۱۶۴۵ نقطه یکنواخت (راست) با استفاده از ۲۵ قطعه و با به کارگیری $M4$ ، $\delta t = 0.001$ و $T = 1$

از این نتایج می‌توان نتیجه گرفت، اگرچه دقت دو روش (روش افراز واحد توابع پایه شعاعی مبتنی بر تفاضلات متناهی و روش توابع پایه شعاعی مبتنی بر تفاضلات متناهی) تقریباً یکسان است، اما از سوی دیگر، یک کاهش قابل توجه در زمان اجرای برنامه، عدد شرطی و معیار تنکی ماتریس ضرایب برای روش افراز واحد توابع پایه شعاعی مبتنی بر تفاضلات متناهی در مقایسه با روش توابع پایه شعاعی مبتنی بر تفاضلات متناهی حاصل شده است. بنابراین با حفظ دقت نتایج در رویکرد سراسری، پایداری و کارایی روش در رویکرد موضعی به طور قابل توجهی افزایش یافته است. این امر به ویژه در حل معادلات دیفرانسیل تصادفی که با حجم گسترده‌ای از شبیه‌سازی‌ها همراه هستند، می‌تواند بسیار مؤثر باشد. به علاوه چیدمان یکنواخت و هالتون به نتایج تقریباً مشابهی منجر شده‌اند، که این امر بیانگر عملکرد مطلوب روش فارغ از نوع چیدمان نقاط است. همچنین مطابق آنچه در این فصل بر روی دامنه دایره‌ای شکل و در بخش گذشته بر روی دامنه برگی شکل مشاهده شد، عملکرد مطلوب روش فارغ از شکل ناحیه حل مسأله به خوبی آشکار است.

مثال ۳.۴. معادله گرمای تصادفی بر روی دامنه مکعب واحد

به منظور بیان کارآمدی روش پیشنهادی بر روی ابعاد بالا، معادله گرمای تصادفی سه بعدی را بر روی دامنه مکعب واحد، حل می‌کنیم. در این مثال نتایج عددی حاصل از آزمایش‌های انجام شده برای معادله گرمای تصادفی ارائه شده در بخش ۳ بر روی دامنه منظم مکعب واحد، ارایه شده است. فرض کنید که تابع f و شرایط اولیه و شرایط مرزی دیریکله در معادله به گونه‌ای در نظر گرفته شده است که جواب تحلیلی مورد انتظار این معادله بدون حضور نویز گاوسی به صورت زیر است:

$$u(x,y,z,t) = \exp\left(-\frac{\pi^2 t}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3}(x+y+z)\right) + xyz.$$

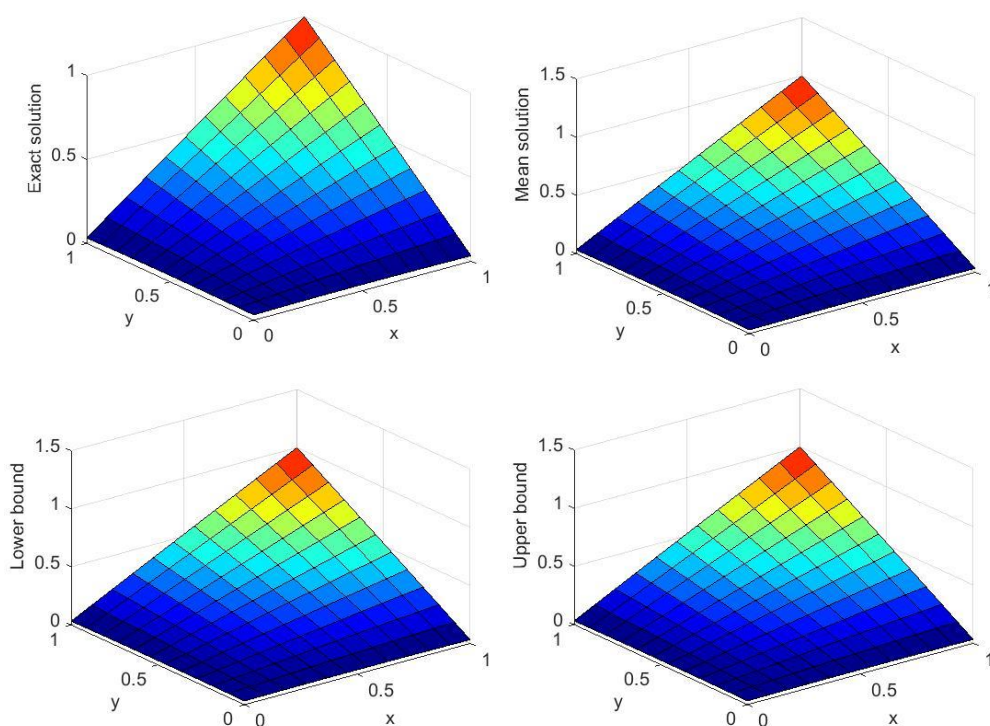
در جداول ۷ و ۸ نتایج به دست آمده از روش $RBF - PU - FD$ بر روی دامنه منظم مکعب واحد با روش سراسری $RBF - FD$ برای چیدمان نقاط یکنواخت و هالتون با به کارگیری تابع پایه شعاعی IMQ مقایسه شده است. با توجه به چالش‌هایی که رسم تابع جواب در ابعاد بالا با آن مواجه است، تنها به رسم برخی رویه‌های تراز به ازای برخی از مقادیر خاص از متغیرها اکتفا شده است که در اینجا $\mathbf{z} = \mathbf{1}$ در نظر گرفته شده است. به علاوه ماتریس عملیاتی و نحوه تنک شدن درایه‌ها در آن به خوبی گزارش شده است. به علاوه، در شکل‌های ۱۱ و ۱۲، رویه‌هایی از جواب دقیق مورد انتظار و معیارهای آماری مانند میانگین، کران‌های بالا و پایین برای جواب‌های به دست آمده و ساختار تنکی ماتریس ضرایب را بر اساس چیدمان نقاط یکنواخت گزارش کرده‌ایم.

جدول ۷. مقایسه بین روش افراز واحد توابع پایه شعاعی مبتنی بر تفاضلات متناهی ($RBF - PU - FD$) و روش توابع پایه شعاعی مبتنی بر تفاضلات متناهی ($RBF - FD$) با استفاده از IMQ برای معادله گرمای تصادفی بر روی دامنه مکعب واحد برای نقاط یکنواخت با $\delta t = 0.001$ و $T = 1$

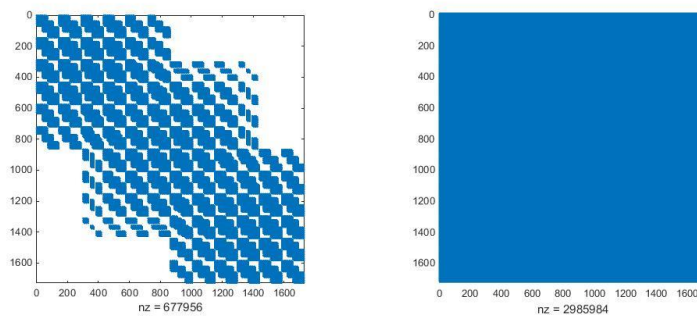
$RBF - PU - FD$							
$\sqrt[3]{N}$	$\sqrt[3]{M}$	ϵ	MAE	RMS	$CPU\ time$	CN	$sparsity$
8	2	0.55	8.17×10^{-2}	2.41×10^{-2}	5.18	$9.25 \times 10^{+01}$	3.04×10^{-1}
12	3	1.00	7.61×10^{-2}	2.41×10^{-2}	52.90	$8.81 \times 10^{+02}$	1.22×10^{-1}
$RBF - FD$							
$\sqrt[3]{N}$	ϵ	MAE	RMS	$CPU\ time$	CN	$sparsity$	
8	1.20	1.28×10^{-1}	3.26×10^{-2}	31.79	$1.79 \times 10^{+17}$	1	
12	1.90	1.07×10^{-1}	2.87×10^{-2}	382.21	$8.84 \times 10^{+17}$	1	

جدول ۸: مقایسه بین روش افراز واحد توابع پایه شعاعی مبتنی بر تفاضلات متناهی ($RBF - PU - FD$) و روش توابع پایه شعاعی مبتنی بر تفاضلات متناهی ($RBF - FD$) با استفاده از IMQ برای معادله گرمای تصادفی بر روی دامنه مکعب واحد برای نقاط هالتون با $\delta t = 0.001$ و $T = 1$

$RBF - PU - FD$							
$\sqrt[3]{N}$	$\sqrt[3]{M}$	ϵ	MAE	RMS	$CPU\ time$	CN	$sparsity$
8	2	1.30	1.15×10^{-1}	3.24×10^{-2}	5.60	$1.80 \times 10^{+05}$	3.11×10^{-1}
12	3	2.45	1.02×10^{-1}	2.71×10^{-2}	60.50	$3.56 \times 10^{+04}$	1.20×10^{-1}
$RBF - FD$							
$\sqrt[3]{N}$	ϵ	MAE	RMS	$CPU\ time$	CN	$sparsity$	
8	1.55	1.46×10^{-2}	3.50×10^{-2}	35.20	$3.07 \times 10^{+17}$	1	
12	2.65	1.05×10^{-1}	2.33×10^{-2}	380.03	$2.17 \times 10^{+17}$	1	



شکل ۱۱. رویه‌های جواب دقیق مورد انتظار، میانگین، خطای مطلق، انحراف معیار، کران‌های پایین و بالا برای معادله گرمای تصادفی بر روی دامنه مکعب واحد با $12 \times 12 \times 12$ نقطه یکنواخت و $3 \times 3 \times 3$ قطعه با به کارگیری IMQ ، $\delta t = 0.001$ و $T = 1$ و $z = 1$



شکل ۱۲. ساختار تنکی ماتریس ضرایب برای معادله گرمای تصادفی بر روی دامنه مکعب واحد با $12 \times 12 \times 12$ نقطه یکنواخت و $3 \times 3 \times 3$ قطعه با استفاده از روش افراز واحد توابع پایه شعاعی مبتنی بر تفاضلات متناهی $(RBF - PU - FD)$ (چپ) و روش توابع پایه شعاعی مبتنی بر تفاضلات متناهی $(RBF - FD)$ (راست) و با به کارگیری IMQ ، $\delta t = 0.001$ و $z = 1$ و $T = 1$

با تجزیه و تحلیل این آزمایشات، مشاهده می‌شود که نتایج به دست آمده رفتاری مشابه با حل معادله گرمای تصادفی بر روی دامنه دو بعدی که قبلاً بیان شد، دارند. همچنین مطابق آنچه در این فصل بر روی دامنه سه بعدی (مکعب واحد) و در بخش گذشته بر روی دامنه دو بعدی مشاهده شد، عملکرد مطلوب روش برای مسائل در ابعاد بالا به خوبی آشکار است.

نتیجه‌گیری

در این مقاله، روش هم‌محلی افراز واحد تابع پایه شعاعی مبتنی بر تفاضلات متناهی برای حل معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی تصادفی سهموی که در علوم مختلف و کاربردهای مهندسی ظاهر می‌شوند، مورد بررسی قرار گرفت. در این ساختار برای تقریب در راستای زمان از تقریب تفاضلات متناهی و در راستای مکان از تقریب موضعی افراز واحد مبتنی بر توابع پایه شعاعی استفاده شد. بعد از به کارگیری گسسته‌سازی نسبت به زمان، فرایند وینر موجود در معادله تحت بررسی به یک میدان گاوسی تبدیل می‌شود. میدان گاوسی حاصل نیز در نقاط هم‌محلی و در هر گام زمانی تقریب زده می‌شود. نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌های محاسباتی نشان می‌دهد این روش موضعی از لحاظ هزینه محاسباتی یک برتری قابل ملاحظه‌ای بر روش سراسری دارد و از پایداری بالاتری برخوردار است، این در حالی است که از دقت بالای روش سراسری توابع پایه شعاعی همچنان برخوردار است.

References

1. K.K. Sabelfeld, I. Shalimova, Forward and backward stochastic Lagrangian models for turbulent transport and the well-mixed condition, Monte Carlo Methods Appl. 7 (2001) 369-382.
2. I. Babuska, B. Andersson, P.J. Smith, K. Levin, Damage analysis of fiber composites. I. Statistical analysis on fiber scale, Comput Methods Appl Mech Eng. 172 (1999) 1-4.
3. I. Elishakoff, Whys and hows in uncertainty modelling, Springer-Verlag, Vienna, 1999.

4. I. Elishakoff, Y. Ren, The bird's eye view on finite element method for structures with large stochastic variations, *Comput Methods Appl Mech Eng.* 168 (1999) 51-61.
5. P-L. Chow, *Stochastic partial differential equations*, Chapman and Hall/CRC applied mathematics and nonlinear science series, Boca Raton, FL: Chapman and Hall/CRC, 2007.
6. G. Da Prato, J. Zabczyk, *Stochastic equations in infinite dimensions*, Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1992.
7. JB. Walsh, *An introduction to stochastic partial differential equations*, Lecture notes in mathematics, vol. 1180, Springer-Verlag, 1986, pp. 265-439.
8. EJ. Allen, S.J. Novosel, Z. Zhang, Finite element and difference approximation of some linear stochastic partial differential equations, *Stoch Stoch Rep.* 64 (1998) 117-142.
9. Y. Cao, H. Yang, L. Yin, Finite element methods for semilinear elliptic stochastic partial differential equations, *Numer Math.* 106 (2007) 181-198.
10. M. Kamrani, S.M. Hosseini, Spectral collocation method for stochastic Burgers equation driven by additive noise, *Math Comput Simulat.* 82 (2012) 1630-1644.
11. M. Dehghan, M. Shirzadi, Numerical solution of stochastic elliptic partial differential equations using the meshless method of radial basis functions, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 50 (2015) 291-303.
12. GE. Fasshauer, Q. Ye, Kernel-based collocation methods versus Galerkin finite element methods for approximating elliptic stochastic partial differential equations, *Meshfree methods for partial differential equations VI*, lecture notes in computational science and engineering. 89 (2013) 155-170.
13. H. Rafieayan Zadeh, M. Mohammadi, E. Babolian, Solving a class of PDEs by a local reproducing kernel method with an adaptive residual subsampling technique, *CMES.* 108 (2015) 375-396.
14. M. Mohammadi, F. Saberi Zafarghandi, E. Babolian, and S. Javadi. A local reproducing kernel method accompanied by some different edge improvement techniques: application to the Burgers' equation, *Iran. J. Sci. Technol. Trans. A Sci.* 42 (2018) 857-871.
15. F. Saberi Zafarghandi, M. Mohammadi, E. Babolian, S. Javadi, A localized Newton basis functions meshless method for the numerical solution of the 2D non-linear coupled Burgers' equations, *Internat. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow.* 27 (2016) 2582-2602.

16. G. Garmanjani, R. Cavoretto, M. Esmailbeigi, A RBF partition of unity collocation method based on finite difference for initial-boundary value problems, *Comput. Math. Appl.* 75 (2018) 4066-4090.
17. A.M. Davie, J.G. Gaines, Convergence of numerical schemes for the solution of parabolic stochastic partial differential equations, *Math Comput.* 70 (2001) 121-34.
18. Q. Du, T. Zhang, Numerical approximation of some linear stochastic partial differential equations driven by special additive noises, *SIAM J Numer Anal.* 40 (2002) 1421-1445.
19. M.D. Buhmann, *Radial Basis Functions: Theory and Implementation*, Cambridge Monogr. Appl. Comput. Math., vol. 12, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
20. G.E. Fasshauer, *Meshfree Approximation Methods with Matlab*, World Scientific, Singapore, 2007.
21. C.K. Lee, X. Liu, S.C. Fan, Local multiquadric approximation for solving boundary value problems, *Computational Mechanics.* 30 (2003) 396-409.
22. O. Davydov, D.T. Oanh, Adaptive meshless centres and RBF stencils for Poisson equation, *Journal of Computational Physics.* 230 (2011) 287-304.
23. H. Wendland, Fast evaluation of radial basis functions: Methods based on partition of unity, in: *Approximation Theory X: Wavelets, Splines, and Applications*, C.K. Chui, L.L. Schumaker, J. Stockler, eds., Vanderbilt Univ. Press, Nashville, TN, 2002, pp. 473-483.
24. H. Wendland, *Scattered Data Approximation*, Cambridge Monogr. Appl. Comput. Math., vol. 17, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.
25. I. Cialenco, G.E. Fasshauer, Q. Ye, Approximation of stochastic partial differential equations by a kernel-based collocation method, *Int. J. Comput. Math.* 89 (2012) 2543-2561.
26. A. Safdari-Vaighani, A. Heryudono, E. Larsson, A radial basis function partition of unity collocation method for convection-diffusion equations, *J. Sci. Comput.* 64 (2015) 341-367.
27. M. Dehghan, M. Shirzadi, Meshless simulation of stochastic advection-diffusion equations based on radial basis functions, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 53 (2015) 18-26.
28. A. Heryudono, E. Larsson, A. Ramage, L.V. Sydow, Preconditioning for radial basis function partition of unity methods, *J. Sci. Comput.* 67 (2016) 1089-1109.