(نشریه علوم دانشگاه خوارزمی)

فضاپذیری در فضاهای باناخ مرتبط با گروه‌های موضعاً فشرده

سیدمحمد طباطبایی [۱] محمد فزونی*[۲]
۱. دانشگاه قم، گروه ریاضی
۲. دانشگاه گنبدکاووس، دانشکدهٔ علوم پایه، گروه ریاضی

دریافت: ۹۷/۱۱/۳۰ پذیرش: ۹۹/۰۱/۳۰

چکیده

در این مقاله برای یک گروه موضعاً فشردهٔ G و عدد ثابت $p>0$، شرایطی کافی برای این‌که $L^p(G)-\bigcup_{q\in\Omega}L^q(G)$ در $L^p(G)$ فضاپذیر باشد را بیان می‌کنیم. هم‌چنین با استفاده از برخی جبرهای سگال که اخیراً معرفی شده‌اند، زیرمجموعه‌هایی فضاپذیر از جبر فوریهٔ $A(G)$ را به‌دست می‌آوریم. در پایان شرایط لازم و کافی برای این‌که گروه موضعاً فشرده G، فشرده یا گسسته باشد را بیان می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: فضاپذیری، فضای لبگ، جبر فوریه، جبر لبگ-فوریه، گروه موضعاً فشرده.

رده‌بندی موضوعی ۲.۱.: $43A15$، $43A22$، $46E30$.

۱. مقدمه

مفهوم فضاپذیری نشان می‌دهد که زیرمجموعه‌های فضاهای باناخ تا چه اندازه حاوی ساختار خطی هستند. این مفهوم اولین بار در مقاله [۶] معرفی شد و سپس در[۱] مورد پیگیری قرار گرفت. در سال‌های اخیر فضاپذیری مجموعه‌ها از جنبه‌های مختلف مورد پژوهش قرار گرفته است. در این میان بسیاری از مقالات به فضاپذیری زیرمجموعه‌های فضاهای لبگ[۱] پرداخته‌اند. مقالهٔ [۸] مرجع خوبی در این‌باره است. در این مقاله مرور بسیار خوبی بر نتایج گذشته نیز شده است. از جمله در مقالهٔ [۳] ثابت شده است که برای هر $p>0$، مجموعه $L^p([0,1])-\bigcup_{p<q}L^q([0,1])$ در $L^p([0,1])$ فضاپذیر است. هم‌چنین در[۲] ثابت می‌شود که به‌ازای هر $p>0$، $\ell^p-\bigcup_{q<p}\ell^q$ در ℓ^p فضاپذیر است. در [۱۷] نتایج مشابهی برای حالتی که فضای زمینه، یک ابرگروه موسوم به ابرگروه دانکل و رامیرز[۲] است اثبات شده‌اند. در مقالهٔ [۱۱] قضیه‌ای برای فضاهای فرشه[۳] بیان شده است که به عنوان ابزاری

* نویسندهٔ مسئول fozouni@hotmail.com

[1] *Lebesgue*
[2] *Dunkl and Ramirez*
[3] *Fréchet*

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.607]

کلیدی در اثبات برخی از نتایج این مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرد (قضیهٔ ۰). اخیراً فضاپذیری تفاضل فضاهای موری[۴]، که حالتی بسیار کلی‌تر از فضاهای لبگ هستند در[۱۵] مطالعه شده است.

در مقالهٔ حاضر، ابتدا با ایده‌ای مشابه مقالهٔ [۳]، شرایطی کافی برای فضاپذیری $L^p(G) - \bigcup_{q\in\Omega} L^q(G)$ در $L^p(G)$ ارائه شده است که در آن Ω زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی مثبت و G یک گروه موضعا فشرده است و $L^p(G) \coloneqq L^p(G,m)$ (m اندازه هار چپ بر G است). هم‌چنین در ادامه جبر فوریه[۵] $A(G)$ را به‌عنوان فضای زمینه در نظر می‌گیریم. اخیراً در مقاله [۱۰] زیرجبرهای باناخ مفیدی با نماد $A(G)_{\tau(n)}$ برای $A(G)$ معرفی شده‌اند (تعریف ۰ را ببینید). نشان می‌دهیم به ازای τهای ویژه‌ای در $A(G)_{loc}$، $A(G) - A(G)_{\tau(n)}$ در$A(G)$ فضاپذیر است. در پایان با استفاده از نتایج مقاله‌های [۷] و [۱۱] به‌عنوان یک ابزار اساسی، شرایط لازم و کافی برای فشرده یا گسسته بودن گروه‌های موضعاً فشرده ارائه می‌دهیم.

۲. نتایج اصلی

ابتدا تعریف اساسی زیر را یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۱٫۱. فرض کنیم X یک فضای باناخ است. زیرمجموعه $S \subseteq X$ را فضاپذیر[۶] نامیم هرگاه $S\cup\{0\}$ شامل یک زیرفضای بسته و با بعد نامتناهی از X باشد.

هر گروه توپولوژیک که توپولوژی آن هاسدورف و موضعاً فشرده باشد را گروه موضعاً فشرده می‌نامیم. اگر G یک گروه موضعاً فشرده باشد، اندازهٔ رادون ناصفر و نامنفی m بر G چنان موجود است که به‌ازای‌هر $E \subseteq G$ بورل و هر $x \in G$ داریم $m(xE) = m(E)$. تابع m را اندازهٔ هار چپ بر G می‌نامیم. در این مقاله همواره G یک گروه موضعاً فشرده و m اندازهٔ هار چپ بر آن است.

اگر $p > 0$، به‌ازای‌هر تابع m-اندازه‌پذیر $f\colon \to \mathbb{C}$، قرار می‌دهیم $\|f\|_p \coloneqq \left(\int_G |f(x)|^p dm(x)\right)^{\frac{1}{p}}$ و

$$L^p(G,m) = L^p(G) \coloneqq \left\{f : \|f\|_p < \infty \text{ و اندازه‌پذیر است } f\colon G \to \mathbb{C}\right\}.$$

مطابق معمول، دو عضو $L^p(G)$ که m-تقریباً همه جا برابر هستند را یکی می‌گیریم. در این‌صورت اگر $p \geq 1$، $\left(L^p(G), \|\cdot\|_p\right)$ یک فضای باناخ است و اگر $0 < p < 1$، $\left(L^p(G), d_p\right)$ یک فضای متریک کامل است که در آن به‌ازای‌هر $f, g \in L^p(G)$،

$$d_p(f,g) \coloneqq \|f-g\|_p^p.$$

می‌دانیم که در حالت کلی، اگر $p, q > 0$، لزوماً یکی از $L^p(G)$ و $L^q(G)$ زیرمجموعهٔ دیگری نیست. برای دیدن این‌که چه وقت شمول مذکور روی می‌دهد، مقالهٔ [۱۶] را ملاحظه کنید.

قضیه ۱٫۲. فرض کنیم $p > 0$ و G یک گروه موضعاً فشرده با اندازه هار چپ m است. هم‌چنین فرض کنیم H یک زیرگروه باز از G باشد به‌قسمی‌که فضای خارج قسمتی $\frac{G}{H}$ نامتناهی است و تابع دوسوئی $\varphi\colon H \to G$ موجود است

[4] *Morrey*
[5] *Fourier*
[6] *Spaceable*

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.607]

به‌طوری‌که φ و φ^{-1} بورل اندازه‌پذیرند و $dm\big(\varphi^{-1}(y)\big) = \lambda dm(y)$ $(0 < \lambda \leq 1)$. در این صورت برای زیرمجموعهٔ Ω از اعداد حقیقی مثبت، اگر $A \coloneqq L^p(G) - \bigcup_{q\in\Omega} L^q(G)$ ناتهی باشد، آن‌گاه A در $L^p(G)$ فضاپذیر است.

اثبات: تابع $f \in A$ را در نظر می‌گیریم. طبق فرض قضیه، $x_1, x_2, x_3, \ldots \in G$ وجود دارند به طوری که برای هر $i \neq j$، $x_iH \cap x_jH = \emptyset$. به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ قرار می‌دهیم $U_n \coloneqq x_nH$ و $\varphi_n : U_n \to G$ را به صورت $\varphi_n(x) \coloneqq \varphi(x_n^{-1}x)$ تعریف می‌کنیم. هم‌چنین برای هر $n \in \mathbb{N}$، تابع $f_n : G \to \mathbb{C}$ را به صورت

$$f_n(x) \coloneqq \begin{cases} f\big(\varphi_n(x)\big), & x \in U_n \\ 0, & x \notin U_n \end{cases}$$

تعریف می‌نماییم. چون $f \in A$، پس $f \neq 0$ و در نتیجه $g \in G$ موجود است به‌قسمی‌که $f(g) \neq 0$. از سوی دیگر، چون φ دوسویی است، $h \in H$ موجود است که $\varphi(h) = g$. حال اگر برای اسکالرهای $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ داشته باشیم $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$، از آن‌جا که $x_1h \in U_1$ و U_nها طبق تعریف مجزا هستند، داریم:

$$\begin{aligned} \lambda_1 f(g) = \lambda_1 f\big(\varphi(h)\big) &= \lambda_1 f\big(\varphi_1(x_1h)\big) = \lambda_1 f_1(x_1h) \\ &= -\big(\lambda_2 f_2(x_1h) + \cdots + \lambda_n f_n(x_1h)\big) = 0. \end{aligned}$$

در نتیجه $\lambda_1 = 0$. به‌همین ترتیب ثابت می‌شود که $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$، بنابراین دنباله $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک زیرمجموعهٔ مستقل خطی از $L^p(G)$ است.

چون m هار چپ است، برای هر $t > 0$ و $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$\begin{aligned} \|f_n\|_t^t &= \int_{U_n} \big|f\big(\varphi_n(x)\big)\big|^t \, dm(x) \\ &= \int_{U_n} \big|f\big(\varphi(x_n^{-1}x)\big)\big|^t \, dm(x) \\ &= \int_H \big|f\big(\varphi(x)\big)\big|^t \, dm(x) \\ &= \int_G |f(y)|^t \, dm\big(\varphi^{-1}(y)\big) \\ &= \lambda \int_G |f(y)|^t \, dm(y) \\ &= \lambda \|f\|_t^t \leq \|f\|_t^t \end{aligned}$$

چون $f \in A$، از تعریف مجموعهٔ A و اینکه $\|f_n\|_t^t = \lambda \|f\|_t^t$ نتیجه می‌شود که $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک زیرمجموعه از A است. اگر $p \geq 1$، قرار می‌دهیم $s \coloneqq 1$ و اگر $0 < p < 1$، قرار می‌دهیم $s \coloneqq p$. در این صورت تابع

$$T : \ell^s \to L^p(G), \quad T\big((\alpha_n)_{n=1}^{\infty}\big) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n,$$

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.607]

خوش‌تعریف است، به‌عبارت دیگر $T((\alpha_n)_{n=1}^{\infty}) \in L^p(G)$، چون

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|\alpha_n f_n\|_p^s = \sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^s\|f_n\|_p^s \leq \|f\|_p^s \sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^s < \infty.$$

حال فرض کنیم $g \in \overline{T(\ell^s)} - \{0\}$. نشان می‌دهیم که برای هر $q \in \Omega$، g متعلق به $L^q(G)$ نیست. دنبالهٔ $(a_k)_{k=1}^{\infty} \subseteq \ell^s$ وجود دارد که $a_k := \left(\alpha_n^{(k)}\right)_{n=1}^{\infty}$ و $\|T(a_k) - g\|_p \to 0$ اگر $k \to \infty$. بنابراین

$$\lim_{k\to\infty}\int_G \left|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^{(k)} f_n(x) - g(x)\right|^p dm(x) = 0. \tag{۱}$$

چون $0 \neq g \in L^p(G)$، برای $r \in \mathbb{N}$ ای داریم:

$$m(\{x \in U_r : g(x) \neq 0\}) > 0. \tag{۲}$$

از آن‌جا که محمل هر f_k، U_k است و زیرمجموعه‌های U_k مجزا هستند و نیز با توجه به رابطهٔ ۱) داریم:

$$\lim_{k\to\infty}\int_{U_r}\left|\alpha_r^{(k)} f_r(x) - g(x)\right|^p dm(x) = \lim_{k\to\infty}\int_{U_r}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^{(k)} f_n(x) - g(x)\right|^p dm(x) = 0.$$

بنابراین $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_r^{(k)} f_r = g$ تقریباً همه جا روی U_r. پس با توجه به رابطهٔ ۲)، $x_0 \in G$ ای وجود دارد به قسمی‌که

$$\left(\lim_{k\to\infty}\alpha_r^{(k)}\right) f_r(x_0) = \lim_{k\to\infty}\alpha_r^{(k)} f_r(x_0) = g(x_0) \neq 0.$$

این رابطه نتیجه می‌دهد که $\xi := \lim\limits_{k\to\infty}\alpha_r^{(k)} \neq 0$ و از این رو $g = \xi f_r$ تقریباً همه جا روی U_r. بنابراین برای هر $q \in \Omega$، $g \notin L^q(G)$ و این برهان را کامل می‌کند. ■

قبل از ادامهٔ بحث ابتدا یک مثال ملموس در خصوص به‌کارگیری قضیهٔ فوق ارائه می‌دهیم.

مثال ۱,۳. فرض کنیم $G := \{(x_1, x_2, x_3, \ldots) : \forall i \in \mathbb{N}, x_i \in \mathbb{C}\}$. در این‌صورت G با عمل جمع مؤلفه‌ای یک گروه است. این گروه را به توپولوژی گسسته مجهز می‌کنیم. فرض کنیم

$$H := \{(0, x_1, x_2, x_3, \ldots) : \forall i \in \mathbb{N}, x_i \in \mathbb{C}\}.$$

در این‌صورت H یک زیرگروه G و $\frac{G}{H}$ نامتناهی است. تابع $\varphi: H \to G$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\varphi\big((0, x_1, x_2, x_3, \ldots)\big) := (x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.607]

آشکارا φ تابعی دوسویی است و اگر m اندازهٔ شمارشی بر G باشد، آن‌گاه $dm(x) = dm\left(\varphi^{-1}(x)\right)$ که $x \in G$.
از طرفی می‌دانیم که اگر $0 < q < p$ آن‌گاه $L^q(G) \subsetneq L^p(G)$. بنابراین طبق قضیهٔ ۰ $A := L^p(G) - L^q(G)$ در $L^p(G)$ فضاپذیر است.

قضیهٔ ۰، دستهٔ وسیعی از گروه‌ها را پوشش می‌دهد. برای مشاهدهٔ این موضوع ابتدا نمادگذاری ذیل را یادآوری می‌کنیم.

فرض کنیم $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ گردایه‌ای از گروه‌ها است و قرار می‌دهیم

$$\Pi_{n=1}^{\infty} G_n := \{(x_1, x_2, x_3, \dots) : \forall i \in \mathbb{N}, x_i \in G_i\}.$$

در این صورت $\Pi_{n=1}^{\infty} G_n$ با ضرب مؤلفه‌ای یک گروه است.

نتیجهٔ ۱٫۴. فرض کنیم G یک گروه گسسته و نامتناهی است. قرار می‌دهیم $\mathcal{G} := \Pi_{n=1}^{\infty} G_n$ که در آن برای هر n، $G_n := G$. در این صورت اگر $p > 0$، Ω زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی مثبت باشد و $A := L^p(\mathcal{G}) - \cup_{q\in\Omega} L^q(\mathcal{G})$ ناتهی باشد، آن‌گاه A در $L^p(\mathcal{G})$ فضاپذیر است. ($\mathcal{G}$ را به‌عنوان یک گروه گسسته در نظر گرفته‌ایم.)

اثبات: قرار می‌دهیم

$$H := \left\{\left((e, x_1, x_2, x_3, \dots) : \forall i \in \mathbb{N}, x_i \in G\right)\right\} \qquad \text{و}$$

که در آن e عضو همانی گروه G است. اگر $\varphi: H \to \mathcal{G}$ را به‌صورت

$$\varphi\left((e, x_1, x_2, x_3, \dots)\right) := (x_1, x_2, x_3, \dots) \qquad \text{و}$$

تعریف کنیم، بنابر قضیهٔ ۰ و با استفاده از اندازهٔ شمارشی، حکم ثابت می‌شود. ■

در اثبات برخی از سایر نتایج این مقاله، از قضیهٔ زیر به عنوان ابزار اصلی استفاده می‌شود.

قضیه ۱٫۵. فرض کنیم X یک فضای فرشه است. هم‌چنین فرض کنیم برای هر $n \in \mathbb{N}$، Z_n یک فضای باناخ و $T_n: Z_n \to X$ یک نگاشت خطی کران‌دار است. اگر $Y := span(\cup_{n=1}^{\infty} T_n(Z_n))$ در X بسته نباشد، آنگاه $X - Y$ در X فضاپذیر است.

اثبات: قضیهٔ ۳٫۳ از [۱۱] را ملاحظه کنید. ■

برای ارائه تعدادی از نتایج پیرامون فضاپذیری در جبرهای فوریه، به برخی از مفاهیم و قضایا نیاز داریم که ابتدا آنها را بیان می‌کنیم.

فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده است. در این‌صورت $A(G)$ را به‌صورت

$$A(G) := \left\{g * \tilde{h} : g, h \in L^2(G)\right\},$$

تعریف می‌کنیم و به‌ازای هر $f \in A(G)$ قرار می‌دهیم

$$\|f\|_{A(G)} := \inf\left\{\|g\|_2 \|h\|_2 : f = g * \tilde{h} \text{ و } g, h \in L^2(G)\right\},$$

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.607]

که در آن $*$ پیچش معمول بین توابع m-اندازه‌پذیر مختلط- مقدار بر G است و برای هر $x \in G$، $\tilde{h}(x) := h(x^{-1})$.
در این‌صورت $\left(A(G), \|\cdot\|_{A(G)}\right)$ با ضرب نقطه‌وار یک جبر باناخ است که آن‌را جبر فوریه می‌نامیم.
در حالت خاص، اگر G آبلی باشد، آن‌گاه

$$A(G) = \{\hat{f} : f \in L^1(\hat{G})\} \cong L^1(\hat{G}), \tag{۳}$$

که در آن $\hat{G}$ دوگان گروه G و $\hat{f}$ تبدیل فوریهٔ f است. جبرهای فوریه برای نخستین بار در مقالات [۵]، [۱۲] و [۱۴] مطرح و مورد بررسی قرار گرفتند. این جبرها در واقع مثال‌هایی بسیار مفید در نظریه جبرهای باناخ هستند.
اگر G آبلی باشد، جبر فوریهٔ $A(G)$ در ویژگی‌های زیر صدق می‌کند:

۱. $A(G)$ دارای یک همانی تقریبی کران‌دار در $A(G)_c := \left\{f \in A(G) : \text{فشرده است } \operatorname{supp}(f)\right\}$ است که در آن $\operatorname{supp}(f)$ نشان‌دهنده محمل f است.
۲. اگر $\mathcal{M}(A(G))$ مجموعهٔ همهٔ ضرب‌گرها از $A(G)$ به خودش باشد، آن‌گاه

$$\mathcal{M}(A(G)) \cong M_G := \{\tau \in C_b(G) : f\tau \in A(G), \forall f \in A(G)\}.$$

برای جزئیات بیشتر، [۱۰] را ملاحظه کنید. هم‌چنین برای دیدن مفاهیم تعریف نشده مرتبط با جبرهای باناخ و سگال خواننده را به [۴] ارجاع می‌دهیم.

تعریف ۱،۶. تابع $\tau \in C(G)$ را $A(G)$- تابع موضعی می‌نامیم هرگاه به ازای هر $f \in A(G)_c$ داشته باشیم $f\tau \in A(G)$. گردایه همهٔ $A(G)$- توابع موضعی را با $A(G)_{loc}$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱،۷. اگر $f \in A(G)$ و $0 < \inf_{x \in G} f(x)$، آن‌گاه $\frac{1}{f} \in A(G)_{loc}$. هم‌چنین اگر G اجتماعی مجزاّ از زیرمجموعه‌های باز و فشرده‌اش مانند $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ باشد و $\tau \in C(G)$ بر هر X_λ ثابت باشد، آن‌گاه $\tau \in A(G)_{loc}$.

اثبات: مثال‌های ۵،۲ از [۱۰] را ببینید. ■

جبرهای باناخ معرفی شده در تعریف زیر به‌صورت کلی‌تر در[۱۰] ارائه شده‌اند. چون هدف ما صرفاً بررسی جبرهای فوریه است، این تعریف را تنها برای این جبرها بیان می‌کنیم.

تعریف ۱،۸. فرض کنیم $\tau \in A(G)_{loc}$. به‌ازای‌هر $n = 0,1,2,3, \dots$ قرار می‌دهیم

$$A(G)_{\tau(n)} := \{f \in A(G) : f\tau, \dots, f\tau^n \in A(G)\},$$

$$A(G)_{\tau(\infty)} := \left\{g \in A(G) : g\tau, g\tau^2, \dots \in A(G), \sum_{k=0}^{\infty} \|g\tau^k\|_{A(G)} < \infty\right\}.$$

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.607]

به ازای هر $f \in A(G)_{\tau(n)}$ و $g \in A(G)_{\tau(\infty)}$ قرار می‌دهیم:

$$\|f\|_{\tau(n)} \coloneqq \sum_{k=0}^{n} \left\|f\tau^k\right\|_{A(G)},$$

$$\|g\|_{\tau(\infty)} \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} \left\|g\tau^k\right\|_{A(G)}.$$

در واقع فضاهای $\left(A(G)_{\tau(n)}, \|\cdot\|_{\tau(n)}\right)$ و $\left(A(G)_{\tau(\infty)}, \|\cdot\|_{\tau(\infty)}\right)$ جبرهای سگال در $A(G)$ هستند، بخش‌های ۵ و ۶ از [۱۰] را ببینید.

قضیه ۱٫۹. فرض کنیم $\tau \in A(G)_{loc}$. در این صورت:

۱) $\tau \in M_G$ *اگر و تنها اگر* $A(G)_{\tau(1)} = A(G)$.

۲) *اگر* $A(G)_{\tau(\infty)} = A(G)$ *آن‌گاه* $\tau \in M_G$.

اثبات: قضایای ۵٫۴ و ۶٫۲ از [۱۰] را ببینید. ■

همان‌طور که در رابطهٔ ۳) اشاره شد، اگر G آبلی باشد، آن‌گاه می‌دانیم $A(G) \cong L^1\left(\hat{G}\right)$. اما در قضیهٔ بعدی با توجه به این‌که قصد استفاده از نتایج مقالهٔ [۱۰] را داریم، از $A(G)$ استفاده خواهیم کرد.

قضیه ۱٫۱۰. فرض کنیم $A(G)$ جبر فوریه بر گروه آبلی گسستهٔ نامتناهی G است. در این‌صورت:

۱) $M_G \subseteq C_b(G) \subsetneq C(G) = A(G)_{loc}$

۲) اگر $\tau: G \to \mathbb{C}$ و $\sup_{x\in G}|\tau(x)| = \infty$، آن‌گاه به‌ازای‌هر $n = 1,2, \dots$، $A(G) - A(G)_{\tau(n)}$ در $A(G)$ فضاپذیر است.

اثبات: (۱): بنابر تعریف ۰، $A(G)_{loc} \subseteq C(G)$. از طرف دیگر می‌توان G را به صورت $G = \bigcup_{x\in G}\{x\}$ نوشت؛ یعنی G اجتماعی مجزا از مجموعه‌های باز و فشرده است. لذا بنابر قضیهٔ ۰، هر تابع (پیوسته) مختلط- مقدار بر G، متعلق به $A(G)_{loc}$ است؛ یعنی $C(G) \subseteq A(G)_{loc}$. از این‌رو $C(G) = A(G)_{loc}$. سایر موارد در حکم با توجه به تعریف M_G و این‌که G گسستهٔ نامتناهی است، آشکارا برقرارند.

(۲): اگر τ تابعی مختلط- مقدار و بی‌کران باشد، آن‌گاه $\tau \in C(G) - C_b(G)$. از این‌رو بنابر (۱) داریم $\tau \notin M_G$ و $\tau \in A(G)_{loc}$. حال بنابر قضیهٔ ۰، به‌ازای‌هر $n = 1,2,3, \dots$ داریم، $A(G)_{\tau(n)} - A(G) \neq \emptyset$. بنابر تعریف ۰، به ازای هر $f \in A(G)_{\tau(n)}$، $\|f\|_{A(G)} \leq \|f\|_{\tau(n)}$. این نشان می‌دهد که نگاشت شمول $i: A(G)_{\tau(n)} \to A(G)$ پیوسته است. هم‌چنین از این واقعیت که $A(G)_c \subseteq A(G)_{\tau(n)}$، می‌توان نتیجه گرفت که $A(G)_{\tau(n)}$ در $A(G)$ چگال است. بنابراین با توجه به این‌که در بالا ثابت شد $A(G)_{\tau(n)} \neq A(G)$، می‌توان گفت $span\left(i\left(A(G)_{\tau(n)}\right)\right) = A(G)_{\tau(n)}$ در $A(G)$ بسته نیست. از این‌رو بنا بر قضیهٔ ۰، $A(G) - A(G)_{\tau(n)}$ در $A(G)$ فضاپذیر است. ■

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.607]

قضیه ۱.۱۱. فرض کنیم G یک گروه آبلی نافشرده است. در این صورت $\sigma \in A(G)_{loc}$ موجود است به طوری که $A(G) - A(G)_{\sigma(\infty)}$ در $A(G)$ فضاپذیر است.

اثبات: بنا بر قضیهٔ ۵,۴,۳ از[۱۳]، یک تابع حقیقی- مقدار $\tau \in M_G$ موجود است که $\tau \geq 1$ و $\frac{1}{\tau} \notin M_G$. از این‌رو اگر قرار دهیم $\sigma := \tau^{-1}$، آن‌گاه $\sigma \notin M_G$ و بنا بر قضیهٔ ۰، $\sigma \in A(G)_{loc}$. در نتیجه بنا بر قضیهٔ ۰، $A(G)_{\sigma(\infty)}$ یک زیرمجموعهٔ سرهٔ $A(G)$ است. امّا $A(G)_c \subseteq A(G)_{\tau(\infty)}$ و لذا $A(G)_{\sigma(\infty)}$ در $A(G)$ چگال است. این نشان می‌دهد که $A(G)_{\sigma(\infty)}$ در $A(G)$ بسته نیست. لذا با توجه به نرم-کاهنده بودن نگاشت خطی

$$T: A(G)_{\sigma(\infty)} \to A(G), \quad f \mapsto f,$$

مشابه اثبات قضیهٔ قبل، از قضیهٔ ۰، نتیجه می‌شود که $A(G) - A(G)_{\sigma(\infty)}$ در $A(G)$ فضاپذیر است. ■

برای ادامه، ابتدا به یادآوری مفهوم یک جبر سگال خاص می‌پردازیم. در سال ۲۰۰۲، جبر لبگ-فوریه[7] توسط قهرمانی[8] و لائو[9] در [۷] معرفی شد. به طور دقیق‌تر فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده است. قرار می‌دهیم:

$$\mathcal{L}A(G) := L^1(G) \cap A(G),$$

$$|||f||| := \|f\|_1 + \|f\|_{A(G)}, \quad \big(f \in \mathcal{L}A(G)\big).$$

فضای $(\mathcal{L}A(G), |||\cdot|||)$ جبر لبگ-فوریه نام دارد. در مقاله مذکور ثابت می‌شود که جبر $\mathcal{L}A(G)$ با ضرب نقطه‌وار یک جبر سگال در $A(G)$، و با ضرب پیچش، یک جبر سگال در $L^1(G)$ است.

در قضایای زیر با استفاده از مفهوم فضاپذیری، شرایطی هم‌ارز برای فشرده یا گسسته بودن گروه موضعاً فشرده G بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۱۲. فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده است. در این صورت G فشرده است اگر و تنها اگر $A(G) - \mathcal{L}A(G)$ در $A(G)$ فضاپذیر نباشد.

اثبات: اگر G نافشرده باشد، طبق گزارهٔ ۲,۶ از [۷]، $A(G) \neq \mathcal{L}A(G)$. اما $\overline{\mathcal{L}A(G)}^{\|\cdot\|_{A(G)}} = A(G)$ از این‌رو $\mathcal{L}A(G)$ در $A(G)$ بسته نیست. از سوی دیگر، آشکارا نگاشت شمول $i: \mathcal{L}A(G) \to A(G)$ نرم-کاهنده و در نتیجه کراندار است و این اثبات حکم در قسمت رفت را با توجه به قضیهٔ ۰ کامل می‌کند.

برعکس، فرض کنیم $A(G) - \mathcal{L}A(G)$ در $A(G)$ فضاپذیر است. پس بنا به تعریف $\big(A(G) - \mathcal{L}A(G)\big) \cup \{0\}$ دارای یک زیرفضای با بعد نامتناهی است. اما این آشکارا نتیجه می‌دهد که $A(G) \neq \mathcal{L}A(G)$. مجدداً با توجه به گزارهٔ ۲,۶ از [۷] نتیجه می‌گیریم که G نافشرده است.■

[7] $Lebesgue - Fourier$
[8] $F. Ghahramani$
[9] $A.T.-M. Lau$

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.607]

قضیه۱،۱۳. فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده است. در این صورت G گسسته است اگر و تنها اگر– $L^1(G)$ $\mathcal{L}A(G)$ در $L^1(G)$ فضاپذیر نباشد.

اثبات: اگر G ناگسسته باشد، طبق گزارهٔ ۲،۳ از [۷]، $L^1(G) \neq \mathcal{L}A(G)$ با توجه به چگال بودن $\mathcal{L}A(G)$ در $L^1(G)$ و نیز نرم-کاهنده بودن نگاشت شمول $i: \mathcal{L}A(G) \to L^1(G)$، مشابه با اثبات قضیهٔ قبل نتیجه می‌شود که $L^1(G) - \mathcal{L}A(G)$ در $L^1(G)$ فضاپذیر است.

برعکس، اگر $L^1(G) - \mathcal{L}A(G)$ در $L^1(G)$ فضاپذیر باشد، آن‌گاه $L^1(G) \neq \mathcal{L}A(G)$ و طبق گزارهٔ ۲،۳ از [۷] نتیجه می‌شود که G ناگسسته است. ■

References

1. R. M. Aron, V.I. Gurariy and J.B. Seoane-Sepulveda, "Lineability and spaceability of sets of functions on R", Proc. Amer. Math. Soc. 133 (3) (2005), 795–803.

2. G. Botelho, D. Diniz, V.V. Fávaro, D. Pellegrino, "Spaceability in Banach and quasi-Banach sequence spaces", Linear Algebra Appl., 434 (5) (2011) 1255–1260.

3. G. Botelho, V.V. Fávaro, D. Pellegrino, J.B. Seoane-Sepúlveda , "$L_p[0,1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0,1]$ is spaceable for every $p > 0$", Linear Algebra Appl., 436 (2012) 2963–2965.

4. H. G. Dales, "Banach Algebras and Automatic Continuity", Clarendon Press, Oxford, 2000.

5. P. Eymard, "L’algèbre de Fourier d’un groupe localement compact", Bull. Soc. Math. France **92** (1964), 181–236.

6. V. P. Fonf, V. I. Gurariy and M. I. Kadets, "An infinite dimensional subspace of $C[0,1]$ consisting of nowhere differentiable functions", C. R. Acad. Bulgare Sci. 52 (1999), 13–16.

7. F. Ghahramani and A.T.-M. Lau, "Weak amenability of certain classes of Banach algebras without bounded approximate identities", Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (2002), 133, 357.

8. L. B. Gonzalez and M. O. Cabrera, "Spaceability of strict order integrability", J. Math. Anal. Appl. 385 (2012) 303–309.

9. V.I. Gurariy, L. Quarta, "On lineability of sets of continuous functions", J. Math. Anal. Appl., 294 (2004) 62–72.

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.607]

10. J. Inoue and S.-E. Takahasi, "Segal algebras in commutative Banach algebras", Rocky Mountain J. Math. 44 (2014), no. 2, 539–589.

11. D. Kitson and R. M. Timoney, "Operator ranges and spaceability", J. Math. Anal. Appl. 378 (2011), 680–686.

12. M.G. Krein, "A principle of duality for bicompact groups and quadratic block algebras", Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) 69, (1949), 725-728.

13. W. Rudin, "Fourier Analysis on Groups", interscience publisher, Inc., New York, 1962.

14. W. Forrest Stinespring, "Integration theorems for gages and duality for unimodular groups", Trans. Amer. Math. Soc. **90** (1959), 15–56.

15. Y. Sawano and S. M. Tabatabaie, "Spaceability on Morrey spaces", Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics, to appear.

16. B. Subramanian, "On the inclusion $L^p(\mu) \subseteq L^q(\mu)$", Amer. Math. Monthly. 85 (1978), 479-481.

17. S. M. Tabatabaie and B. H. Sadathoseyni, "A spaceability result in the context of hypergroups", Note Mat. 38 (1) (2018), 17–22.

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.607]