Mathematical Researches
Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554
Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Optimization of a posynomial geometric programming problem subject to max–product fuzzy relation equations

Elyas Shivanian[1]✉, Zahra Rezaye[2]

1. Department of Applied Mathematics, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran.

✉E-mail: shivanian@sci.ikiu.ac.ir

2. Department of Applied Mathematics, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran.

E-mail: zrezaye.72@gmail.com

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received:
22 February 2019
Received in revised form:
16 April 2021
Accepted:
21 April 2021
Published online:
31 December 2022

Keywords:
Posynomial geometric programming,
Fuzzy relation equation,
Max–product composition,
Branch and bound method.

ABSTRACT

Introduction

Fuzzy relational equations have played an important role in fuzzy set theory and fuzzy logic systems, and many researchers have discussed fuzzy relation equations based on different compositions of fuzzy relations, including max–product fuzzy relational equations. In this article, we study a class of posynomial geometric programming problem (PGPF), with the purpose of minimizing a posynomial subject to fuzzy relational equations with max–product composition. With the help of auxiliary variables, it is converted convert the PGPF into an equivalent programming problem whose objective function is a non-decreasing function with an auxiliary variable. Some preliminary definitions are introduced. Since the feasible solutions are not convex the basic programming techniques are not applicable. It is shown that an optimal solution consists of a maximum feasible solution and finite number of minimal feasible solutions by an equivalent programming problem. In fact, there are a lot minimal solutions and to obtain all them is tedious steps, boring and time consuming. Furthermore, we propose some rules for full simplifying the problem. Then by using a branch and bound approach and fuzzy relational equations (FRE) path, it is presented an algorithm to achieve an optimal solution to the PGPF. Finally, a numerical experiment is given to illustrate the steps of the algorithm.

Material and methods

In this paper, we develop an algorithm to deal with the PGPF based on a special structure of a solution set to the fuzzy relation equations. The material is arranged as summarizing some concepts and important properties related to max–product fuzzy relational equations and more,

to present some main conclusions for developing the algorithm in order to solve the PGPF.

Results and discussion

We introduce three rules to simplify the PGPF. We give a step-by-step algorithm to the PGPF and then we use some examples to illustrate how the algorithm works. Also, four important concluding remarks are given.

Conclusion

The following conclusions were drawn from this research.

- It is proved that the feasible solutions are not convex so the basic programming techniques are not applicable.
- It is shown that an optimal solution consists of a maximum feasible solution and the finite number of minimal feasible solutions by an equivalent programming problem.
- By using a branch and bound approach and fuzzy relational equations (FRE) path, it is presented an algorithm to achieve an optimal solution to the PGPF.

How to cite: Shivanian, E., Rezaye, Z. (2022). Optimization of a posynomial geometric programming problem subject to max–product fuzzy relation equations. *Mathematical Researches*, 8 (4), 120-136.

 Publisher: Kharazmi University

Mathematical Researches
Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554
Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

بهینه‌سازی یک مسأله برنامه‌ریزی هندسی چندجمله‌ای چندمتغیره با قیود معادلات رابط-فازی با ترکیب ماکسیمم-حاصلضرب

الیاس شیوانیان[1]✉، زهرا رضایی[2]

۱. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی کاربردی، دانشکدهٔ علوم پایه، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران. رایانامه: shivanian@sci.ikiu.ac.ir
۲. گروه ریاضی کاربردی، دانشکدهٔ علوم پایه، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران. رایانامه: zrezaye.72@gmail.com

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۱۲/۰۳
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۱/۲۷
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۲/۰۱
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۱۰/۱۰

واژه‌های کلیدی:
مسأله برنامه‌ریزی هندسی چندجمله‌ای چندمتغیره،
معادلات رابط-فازی،
ترکیب ماکسیمم-حاصلضرب،
روش شاخه و کران.

چکیده

این مقاله به بررسی دسته‌ای از مسائل برنامه‌ریزی هندسی چندجمله‌ای با تابع هدف کمینه‌سازی و مشروط بر این‌که دستگاه معادلات رابطه‌سازی آن ترکیب ماکسیمم-حاصلضرب باشد می‌پردازد ازآن‌جا که ناحیه شدنی غیرمحدب است روش‌های برنامه‌ریزی ابتدایی کاربردی نیست. پس از معرفی و تعاریف اولیه، ویژگی‌های ناحیه شدنی و جواب‌های بهینه بررسی می‌شود. جواب بهینه از یک جواب ماکسیمم شدنی و تعداد متناهی جواب‌های مینیمال شدنی تشکیل می‌شود. تعدادی قاعده برای آسان‌تر پیدا کردن جواب بهینه و کاهیده شدن مسأله اصلی ارائه می‌شود. یک الگوریتم برای به دست آوردن جواب و مقدار بهینه تابع هدف مسأله تغییر یافته با تابع هدف چندفازی (چندگانه) با استفاده از روش شاخه و کران و تکنیک معادلات رابطه سازی پیشنهاد می‌شود. سرانجام برای توضیح مفهوم، یک مثال ارائه می‌شود.

استناد: شیوانیان، الیاس؛ رضایی، زهرا؛ (۱۴۰۱). بهینه‌سازی یک مسأله برنامه‌ریزی هندسی چندجمله‌ای چندمتغیره با قیود معادلات رابط-فازی با ترکیب ماکسیمم-حاصلضرب. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۴)، ۱۳۶-۱۲۰.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱. مقدمه

نظریه‌ای از معادلات رابط-فازی اولین بار توسط سانچز بر پایهٔ ترکیب ماکسیمم-مینیمم صورت گرفته است [۱،۲]. شرایط روش‌های نظری با حل رابطه‌های فازی روی مجموعه‌های فازی در [۳،۴،۵،۶] مطالعه شده است. وقتی که یک دستگاه تعداد متناهی جواب مینیمال دارد ترکیب ماکسیمم-مینیمم به طور عادی استفاده می‌شود، از آن جایی که یک مقدار خوب نمی‌تواند بدی مقدار دیگر را جبران کند، در صورتی که پذیرش توانایی؛ میان مقادیری از یک بردار جواب وجود دارد در این مورد عملگر مینیمم همیشه انتخاب خوبی برای فصل مشترک از مجموعه‌های فازی نیست [۷]. در عوض ترکیب ماکسیمم-حاصلضرب از آن‌جایی که می‌تواند بازده و محصول بهتری داشته باشد یا حداقل نتایجی هم‌ارز یا مشابه با ماکسیمم-مینیمم را ارائه می‌دهد، ممتاز است[۸،۹،۱۰،۱۱،۱۲]. در این‌جا مسأله بهینه‌سازی با یک تابع هدف غیرخطی با شرط این‌که دستگاه معادلات رابط-فازی با ترکیب ماکسیمم-حاصلضرب داشته باشیم، را مطالعه می‌کنیم:

فرض کنید $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$، $0\le a_{ij}\le 1$، یک ماتریس از مرتبهٔ $(m\times n)$ باشد؛ $b=\left[b_i\right]_{m\times 1}$، $b=\left(b_1,b_2,\cdots,b_m\right)^T$، $0\le b_i\le 1$، یک بردار $m-$ بعدی باشد؛ $x=\left[x_j\right]_{n\times 1}$، $x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T$، $0\le x_j\le 1$، یک بردار رابط-فازی $n-$بعدی باشد. در کل $a_{ij},b_i,x_j\in[0,1]$ می‌باشند. فرض کنید $c=\left(c_1,c_2,\cdots,c_p\right)^T$ یک بردار $p-$بعدی از ضرایب هزینه باشد می‌دانیم شرط بهینگی برای مینیمم کردن تابع هدف این است که هزینه‌ها مثبت باشند، در اینجا به ازای $k\in K$، فرض می‌کنیم $c_k>0$ یعنی ضرایب هزینه نامنفی هستندو همچنین تعریف می کنیم:

$$i\in I=\{1,2,\cdots,m\},\quad j\in J=\{1,2,\cdots,n\},\ k\in K=\{1,2,\cdots,p\}.$$

برای $j\in J$ و $k\in K$ توان یا نما $\gamma_{k_j}\in R$ را داریم و هر یک از آنها اعداد حقیقی نامثبت یا نامنفی هستند.

اینک مسأله برنامه‌ریزی هندسی چندجمله‌ای چندمتغیره به صورت مسأله بهینه‌سازی زیر مطرح می‌شود:

$$\begin{aligned}&\min Z(x)=\sum_{k=1}^{p}c_k\prod_{j=1}^{n}x_j^{\gamma_{k_j}}\\ &S.t.\quad Aox=b,\\ &\qquad 0\le x_j\le 1.\end{aligned}\qquad (۱)$$

در این‌جا علامت "o" به معنی ترکیب ماکسیمم-حاصلضرب به کار رفته است [۲].

برای حل مسأله بهینه‌سازی ابتدا به حل قیود آن می‌پردازیم و ناحیه شدنی معادلات رابط-فازی به دست می‌آید. ناحیه شدنی معادلات رابط-فازی در صورت غیر تهی بودن دارای یک نقطه ماکسیمم و تعداد متناهی نقاط مینیمال است که به وسیلهٔ این

نقاط ناحیه شدنی کاملاً معین می‌شود [۳،۶،۱۳]؛ ناحیه شدنی که با آن رو به رو هستیم محدب نیست. مسأله بهینه‌سازی با شرط $c_k > 0$ یعنی تابع هدفی با ضرایب هزینهٔ نامنفی و قیود معادلات رابط فازی[1] که در این‌جا از نوع ماکسیمم-حاصلضرب هستند، با روش شاخه و کران[2] $(B \& B)$ حل می‌شوند.

هم چنین ناحیه شدنی معادلات رابط-فازی ماکسیمم-حاصلضرب مربوط به مسأله (۱) از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} a_{11}.x_1 \vee a_{12}.x_2 \vee \cdots \vee a_{1n}.x_n = b_1, \\ a_{21}.x_1 \vee a_{22}.x_2 \vee \cdots \vee a_{2n}.x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}.x_1 \vee a_{m2}.x_2 \vee \cdots \vee a_{mn}.x_n = b_m. \end{cases}$$

اگر $\gamma_{k_j} > 0$ برای هر $k \in K$ و $j \in J$ معتقدیم که جواب بهینه باید کمترین مقدار خود را بگیرد. اگر $\gamma_{k_j} < 0$ برای هر $k \in K$ و $j \in J$ معتقدیم که جواب بهینه باید بیشترین مقدار خود را بگیرد.

باقی ماندهٔ مقاله به ترتیب زیر است:

در بخش ۲ (پیش نیازها)، به طور مختصر تعدادی راه کار و خواص مهم مربوط به معادلات رابط-فازی با ترکیب ماکسیمم-حاصلضرب را بیان می‌کنیم (یعنی کشف ناحیه‌های شدنی یک دستگاه از معادلات رابط-فازی با ترکیب ماکسیمم-حاصلضرب). در بخش ۳ (نتایج اصلی)، بعضی نتایج اصلی را برای توسعه الگوریتم روی دستورالعمل‌ها نسبت به حل کردن مسأله برنامه‌ریزی هندسی چندجمله‌ای چند متغیره[3]و روش کار برای حل مسأله کاهیده شده و سه قاعده برای ساده‌تر شدن معرفی می‌کنیم. در بخش ۴ (الگوریتم)، الگوریتم را برای حلگام به گام شرح می‌دهیم. در بخش ۵ (مثال)، با یک مثال عددی چگونگی کار با الگوریتم را نشان می‌دهیم. در بخش ۶ (نتیجه گیری)، نتیجه‌ای از کار خود ارئه می‌دهیم.

۲. پیش‌نیازها

در این بخش بعضی مفهوم‌های اساسی و خواص مهم وابسته به معادلات رابط-فازی با ترکیب ماکسیمم-حاصلضرب را یادآوری می‌کنیم. همه اثبات‌های حذف شده به حفظ و امانت داری و مختصر کردن مقاله و خوانا بودنش است. خواننده می‌تواند به مراجع [۴،۱۳،۱۵،۱۶،۱۷،۱۸،۱۹] مراجعه کند.

یک دستگاه از معادلات رابط-فازی با ترکیب ماکسیمم-حاصلضرب به وسیلهٔ A و b به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} &A o x = b, \\ &x_j \in [0,1], j \in J \end{aligned} \qquad (۲)$$

[1] Fuzzy Relational Equations
[2] Branch and Bound
[3] Posynomial geometric programming problem

مجموعه جواب‌های مسأله (۱) به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$X\left(A,b\right)=X^*=\{x\in[0,1]^n \mid A o x=b\}.$$

این مجموعه جواب در دستگاه (۲) سازگار است اگر و تنها اگر $X\left(A,b\right)=X^*\neq\varnothing$.

$\hat{x}\in X^*$ را یک جواب ماکسیمم گویند اگر و تنها اگر $x\leq\hat{x}$ برای همهٔ $x\in X^*$. به طور مشابه، $\check{x}\in X^*$ را یک جواب مینیمال گویند اگر و تنها اگر $x\leq\check{x}$ ، برای هر $x\in X^*$ ، نتیجه می‌دهد $x=\check{x}$. هنگامی که $X\left(A,b\right)$ غیر تهی باشد، ناحیه شدنی می‌تواند به وسیلهٔ یک جواب ماکسیمم منحصربه‌فرد و تعدادی متناهی از جواب‌های مینیمال [۳،۱۱،۲۰،۲۱]، کاملاً معین شود.

قضیهٔ ۱ ([۱۳،۱۷]). دستگاه (۲) سازگار است اگر وتنها اگر $\hat{x}=(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\cdots,\hat{x}_n)^T$ جوابی از دستگاه (۲) باشد؛ در اینجا $\hat{x}_j$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{x}_j=\begin{cases}\min\left\{\dfrac{b_i}{a_{ij}},a_{ij}>b_i\right\}, & if\ \left\{\dfrac{b_i}{a_{ij}},a_{ij}>b_i\right\}\neq\phi\\ 1 & otherwise\end{cases}\qquad (۳)$$

علاوه بر این، $\hat{x}$ جواب ماکسیمم است. اگر دستگاه (۲) سازگار باشد جواب ماکسیمم وجود دارد و منحصربه‌فرد است. برخلاف یکتایی جواب ماکسیمم، ممکن است تعداد متناهی جواب مینیمال از دستگاه (۲) داشته باشیم که با $\check{X}$ نشان می‌دهیم. (مجموعه‌ای از همه جواب‌های مینیمال به وسیله $\check{X}\left(A,b\right)$ مشخص می‌شود).

قضیهٔ ۲ ([۱۷،۱۸]). اگر دستگاه (۲) سازگار باشد آن‌گاه مجموعه جواب $X^*=X\left(A,b\right)$ کاملاً به وسیله یک جواب ماکسیمم و تعدادی متناهی جواب مینیمال مشخص می‌شود، بدین معنی که [۲۲]:

$$X^*=X\left(A,b\right)=\bigcup_{\check{x}\in\check{X}(A,b)}\{x\in[0,1]^n \mid \check{x}\leq x\leq\hat{x}\}.$$

مجموعه جواب X^* هنگامی غیرتهی است که به طور کلی مجموعه‌ای غیر محدب باشد. هم چنین روش استاندارد برنامه نویسی محدب هم بی‌فایده است. پس ما راه و روش ابتدایی را برای به دست آوردن همه جواب‌های مینیمال از دستگاه (۲) آماده خواهیم کرد. خواننده می‌تواند به مراجع ذکر شده [۱۶،۱۷] از این حیث مراجعه کند.

وقتی که مجموعه جواب دستگاه (۲) غیر تهی باشد $\left(X\left(A,b\right)\neq\varnothing\right)$ ، برای هر $i\in I$ مجموعه‌ی اندیس‌ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$J_i=\{j\in J \mid a_{ij}.\hat{x}_j=b_i\},$$

$$\Lambda=J_1\times J_2\times\cdots\times J_m.$$

فرض کنید هر ترکیب به وسیلهٔ یک بردار نشان داده شود:

$$q=\left(q_1,q_2,\cdots,q_m\right)\in\Lambda\Leftrightarrow q_i\in J_i,\forall i\in I.$$

برای هر $q\in\Lambda$، تعریف می‌کنیم:

$$I_q^j=\left\{i\in I|q_i=j\right\}, j\in J. \qquad (۴)$$

و $F=\Lambda\rightarrow R^n$ به طوری که برای هر $j\in J$، داریم:

$$F_j\left(q\right)=\begin{cases}\dfrac{b_i}{a_{ij}} & \forall i\in I_q^j\neq\varnothing,\\ 0 & if\ I_q^j=\varnothing,\end{cases} \qquad (۵)$$

بردار $q\in\Lambda$ را یک[۴] $\left(C-Path\right)$ از دستگاه (۲) گویند [۶،۱۷،۲۲]. مجموعه‌ای از همهٔ $C-Paths$ از دستگاه (۲) را با CP نشان می‌دهند.

تعریف ۱ ([۱۶،۱۷]). بردار $q=\left(q_1,q_2,\cdots,q_m\right)$ را یک[۵] $\left(FRE-Path\right)$ از دستگاه (۲) گویند اگر در رابطهٔ زیر صدق کند:

$$\mathrm{q}_i=\begin{cases}\in J_1 & K=1\\ \in J_i & J_i\cap\{\mathrm{q}_1,\mathrm{q}_2,...,\mathrm{q}_{i-1}\}=\phi,i\in I,\\ =0, & otherwise\end{cases}$$

مجموعه‌ای از همهٔ FRE-Paths از دستگاه (۲) را با FREP نشان می‌دهند.

تعریف ۲ ([۱۶]). فرض کنید $q\in CP$ باشد؛ $x^q=\left(x_1^q,\cdots,x_n^q\right)$ را یک جواب شبه‌مینیمال یا جواب مشابه با q گویند، در اینجا برای هر $j\in J$ داریم: $x_j^q=F_j\left(q\right)$. q یک $C-Path$ مشابه با x^q است.

قضیهٔ ۳ ([۱۶]). اگر $X^*\neq\varnothing$، آن‌گاه:

$$X^*=\left\{x\in X\mid x^q\leq x\leq\hat{x},q\in CP\right\}=\left\{x\in X\mid x^q\leq x\leq\hat{x},q\in FREP\right\}.$$

قضیه ۴ ([۱۹]). فرض کنید $X^*\neq\varnothing$، نتایج زیر را داریم:

$$\begin{cases}\left(1\right)if\quad q\in\Lambda,\Rightarrow F\left(q\right)\in X^*.\\ \left(2\right)\forall x\in X^*,\exists q\in\Lambda\, s.t.\ F\left(q\right)\leq x.\end{cases}$$

قضیه ۵ ([۱۶]). *فرض کنیم* $\check{x}$ جواب مینیمال از دستگاه (۲) باشد. آن‌گاه $q\in FREP$ به طوری که $\check{x}=x^q$ وجود دارد، که برای هر $j\in J$ داریم $x_j^q=F_j\left(q\right)$. هم چنین برای هر $q\in FREP$، x^q یک جواب مینیمال از دستگاه (۲) باشد.

بنابراین برای قضیه ۵ می‌توانیم هم جواب‌های مینیمال از دستگاه (۲) را به وسیله $FREP$ به دست آوریم.

[4] Conservative path
[5] Fuzzy relational equalities path

۲. نتایج اصلی

فرض کنیم مجموعه جواب‌های $A o x = b$ را بتوان به صورت زیر نوشت:

$$X(A,b) = \left\{ \check{x}^{1} \le x \le \hat{x} \right\} \cup \cdots \cup \left\{ \check{x}^{l} \le x \le \hat{x} \right\},$$

در این‌جا؛

$$x = \left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)^T$$
$$\hat{x} = \left(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_n\right)^T$$

$$\check{x}^{t} = \left(\check{x}^{t}_1, \check{x}^{t}_2, \cdots, \check{x}^{t}_n\right)^T \qquad t = 1, 2, \cdots, l.$$

و $\hat{x}$ جواب ماکسیمم است، در حالی که $\check{x}^{1}, \check{x}^{2}, \check{x}^{3}, \cdots, \check{x}^{l}$ همگی جواب‌های مینیمال از $A o x = b$ هستند.

گزارهٔ ۱ ([۱۵]). فرض کنید

$$K_j = \left\{k \in K \mid \gamma_{k_j} \neq 0\right\} \subseteq K, \; j = 1, 2, \cdots, n.$$

آن‌گاه موارد زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} (i)\, if \;\; K_j = \phi, \; then \;\; \gamma_{1j} = \gamma_{2j} = \ldots = \gamma_{pj} = 0 \\ (ii)\, if \;\; K_j \neq \phi, \; then \;\; \forall k_j^1, k_j^2 \in K_j, \dfrac{\gamma_{k_j^1}}{\left|\gamma_{k_j^1}\right|} = \dfrac{\gamma_{k_j^2}}{\left|\gamma_{k_j^2}\right|} = 1 \; or \; -1 \end{cases}$$

و اگر فرض کنید

$$J' = \left\{ j \in J \mid \frac{\gamma_{k_j}}{\left|\gamma_{k_j}\right|} = 1, \forall k_j \in K_j \right\}$$

و

$$J'' = \left\{ j \in J \mid K_j = \varnothing, \; or \; \frac{\gamma_{k_j}}{\left|\gamma_{k_j}\right|} = 1, \forall k_j \in K_j \right\}.$$

آن‌گاه $J = J' \cup J''$.

لم ۱ ([۱۵]). اگر $\gamma_{k_j} > 0$ برای هر $k \in K$ و $j \in J$، آن‌گاه $J'' = \varnothing$، و یکی از جواب‌های مینیمال $\check{x}^t$ جواب بهینه از مسأله (۱) می‌باشد.

لم ۲ ([۱۵]). اگر $\gamma_{k_j} < 0$ برای هر $k \in K$ و $j \in J$، آن‌گاه $J' = \varnothing$، و جواب بهینه مسأله (۱) $\hat{x}^t$ می‌باشد.

مباحث مذکور دربالا پایه‌ای هستند، اکنون ما تعدادی قواعد برای کاهیده شدن مسأله (۱) معرفی می‌کنیم.

قاعدهٔ ۱. I^0 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$I^0 := \left\{ i \in I \mid \exists j_i \in J'' \ s.t.\ \left\{ a_{ij_i} \ .\hat{x}_{j_i} \right\} = b_i \right\}.$$

برای هر $J \in J''$، مجموعهٔ $x_j = \hat{x}_j$ و ستون j از ماتریس فازی A حذف می‌شود. برای هر $i \in I^0$، i امین قید (سطر) نیز حذف می‌شود آن‌گاه مسأله (۱) به صورت مسأله زیر کاهیده می‌شود:

$$\begin{aligned} &\min Z(x) = \sum_{k=1}^{p} c_k \prod_{j \in j''} \hat{x}_j^{\gamma_{kj}} \prod_{j \in j'} x_j^{\gamma_{kj}} \\ &s.t.\ \ A' o x = b', \qquad\qquad (۶) \\ &x_j \in [0,1],\ j \in J. \end{aligned}$$

در این‌جا A' ماتریس رابط-فازی تجدید نظر شده و b' بردار فازی می‌باشد، بنابراین بر اساس لم ۱ یکی از جواب‌های مینیمم $\check{x}^t$ است که جواب بهینه از مسأله (۶) است.

قضیهٔ ۶. فرض کنید که $\check{x}^t$ یک جواب بهینه از مسأله (۶) است. آنگاه جواب بهینه x^* از مسأله (۱) به صورت زیر خواهد بود:

$$x_j^* = \begin{cases} \check{x}_j^t & if \quad j \in J', \\ \hat{x}_j & if \quad j \in J''. \end{cases}$$

به این ترتیب جواب بهینه x^* از مسأله (۱) به دست می‌آید، بنابراین بر اساس لم ۱ و قضیه ۶ فقط به حل مسأله (۶) نیاز داریم. حال چگونگی حل مسأله (۶) را بیشتر باز می‌کنیم.

قاعدهٔ ۲ ([۱۵]). اگر $i \ge k$ و $J_i \supseteq J_k$، آن‌گاه J_i را حذف می‌کنیم و با محاسبهٔ Λ مجموعه‌ای از همه جواب‌های شدنی مینیمال $\check{x}$ از مسأله (۶) به دست می‌آید.

قضیهٔ ۷ ([۱۵]). اگر $j_1 \in J'$ وجود داشته باشد که در شرط $\gamma_{k_{j_1}} > 0$ صدق کند برای همه $i \in I$ همهٔ $j_1 \notin J_i$، $k \in K$، آنگاه، $Z\left(x^*\right) = 0$ مقدار بهینه مسأله (۱) است و x^* جواب بهینه در $x^*_{j_1} = 0$ صدق می‌کند.

اثبات. فرض کنیم x^* یک جواب از مسأله (۱) باشد. مشاهده می‌کنیم که t وجود دارد به طوری که $x^*_i = \check{x}^t_i$. برای هر $q \in \Lambda$، برای همه $i \in I$ می‌توانیم $q_i \neq j_1$ را به دست آوریم، از آن‌جایی که $j_1 \notin J_i$ برای همه $i \in I$. این نتیجه می‌دهد که $x^q_{j_i} = 0$. با پیروی از قضیه ۳ که برای همه $t = 1, 2, \cdots, l$ داریم $\check{x}^t_{j_1} = 0$. هم چنین $x^*_{j_1} = 0$ و

$$Z\left(x^*\right) = \sum_{k=1}^{p} c_k \prod\nolimits_{j=1, j \neq j_1}^{n} \left(x^*_j\right)^{\gamma_{kj}} \left(x^*_{j_1}\right)^{\gamma_{kj_1}} = 0.$$

قضیهٔ ۸ ([۱۵]). اگر مسأله (۱) دارای شرایط زیر باشد:

$$\begin{cases} (1)\mathrm{K}=\mathrm{K}' \cup \mathrm{K}'', \mathrm{K}' \cap \mathrm{K}''=\phi, \mathrm{K}',\mathrm{K}'' \subseteq K; \\ (2)\mathrm{K}' := \{k \in K \mid J', \forall j \in J'\}; \\ (3)\mathrm{K}'' := \{k \in K \mid \exists j_1 \in J', \gamma_{k_{j_1}} \neq 0, j_1 \notin J_i, \forall i \in I\} \end{cases}$$

آن‌گاه جواب بهینهٔ این مسأله $\hat{x}$ است.

اثبات. برای اثبات از قضیهٔ ۷، مشاهده می‌کنیم که x^* جواب بهینه در $x^*_{j_1} = 0$ صدق می‌کند. نتیجه می‌شود که، برای هر $k \in K''$، $c_k \prod_{j=1}^{n} \left(x^*_j\right)^{\gamma_{kj}} = 0$.

سپس، مسأله (۱) را می‌توان به صورت زیر ساده کرد

$$\min \sum_{k \in K'} c_k \prod_{j \in J''} x_j^{\gamma_{kj}}$$

$$s.t.\ Aox = b,$$

$$x_j \in [0,1], j \in J.$$

بر اساس لم ۳ نتیجه می‌شود که $\hat{x}$ جواب بهینه مسأله (۱) است.

قاعدهٔ ۳ ([۱۵]). J^0 به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J^0 := \left\{ j \in J' \mid j \notin J_i, \forall i \in I \right\}.$$

و برای همه $j \in J^0$، مجموعه K^0_j تعریف می‌شود:

$$K_j^0 := \left\{ k \in K \,\middle|\, \gamma_{k_j} \right\rangle 0 \Big\}.$$

اگر $k \in K_{j_1}^0$، آن‌گاه تعدادی $j_1 \in J'$ به طوری که $\gamma_{k_{j_1}} > 0$ و $j_1 \notin J_i$ برای همه $i \in I$ وجود دارد، که برای هر $t = 1, 2, \cdots, l$، $\check{x}_{j_1}^{t} = 0$ و برای همه جواب‌های شدنی $x \in X(A,b)$ داریم:

$$c_k \prod_{j=1}^{n} x_j^{\gamma_{kj}} \geq 0 = c_k \prod_{j=1}^{n} x_j^{*\,\gamma_{kj}} ,$$

چون برای هر $j \in J$، $x_j \geq 0$ هستند. بنابراین اگر $k \in K^0$، آن‌گاه حذف k امین مؤلفه $c_k \prod_{j=1}^{n} x_j^{\gamma_{kj}}$ از تابع هدف، تأثیری روی جواب بهینه مسأله ندارد. آن‌گاه، اگر $j_1 \in J^0$ و $k \in K_{j_1}^0$، قرار می‌دهیم $x_{j_1} = 0$ و k امین مؤلفه $c_k \prod_{j=1}^{n} x_j^{\gamma_{kj}}$ از تابع $Z(x)$ حذف می‌شود.

۳.الگوریتم

بر اساس قضیه‌های گفته شده، الگوریتم زیر را برای حل مسأله ارائه می‌دهیم:

گام ۱. یافتن جواب شدنی ماکسیمم $\hat{x}$ از مسأله (۱)، اگر $A o \hat{x} = b$ برو گام دو. در غیر این صورت، مسأله نشدنی است، متوقف شوید.

گام ۲. اگر $j \in J''$ آنگاه مجموعه‌ی $x_j = \hat{x}_j$ و مسأله (۱) به مسأله (۶) به وسیله قاعده ۱ تبدیل می‌شود.

گام ۳. برای همهٔ $i \in I \setminus I^0$، مجموعهٔ اندیس‌ها J_i به وسیله رابطهٔ (۴) محاسبه می‌شود.

گام ۴. مسأله (۶) به وسیله قاعده ۲ تقلیل داده می‌شود.

گام ۵. اگر $j_1 \in J^0$ و $k \in K_{j_1}^0$، قرار می‌دهیم $x_{j_1} = 0$ و $c_k \prod_{j=1}^{n} x_j^{\gamma_{kj}}$ از $Z(x)$ به وسیلهٔ قاعده ۳ حذف می‌شود.

گام ۶. به وجود آوردن جواب درختی به وسیلهٔ $(FREP)$ و محاسبهٔ یک جواب بهینه از مسأله ۶ به وسیله روش شاخه و کران. آنگاه، جواب بهینه $\check{x}^{*}$ و مقدار بهینه $Z(x^*)$ از مسأله (۱) را محاسبه می‌کنیم.

۴.مثال عددی

در این بخش، یک مثال عددی را مطابق با روش پیشنهادی توضیح می‌دهیم.

مسأله زیر را در نظر بگیرید:

$$\min Z(x) = 0.3x_1^{0.6}x_3^{0.6}x_4^{0.3}x_6^{0.8} + 0.2x_2^{-0.8}x_5^{-0.2}x_8^{0.5}x_9^{0.3} +$$
$$0.2x_2^{-0.3}x_3^{0.4}x_5^{-0.1}x_7^{0.3}x_9^{0.2} + 0.3x_2^{-0.4}x_5^{-0.2}x_6^{0.3}$$
$$s.t.\ A o x = b, \qquad (۷)$$
$$x \in [0,1]^9,$$

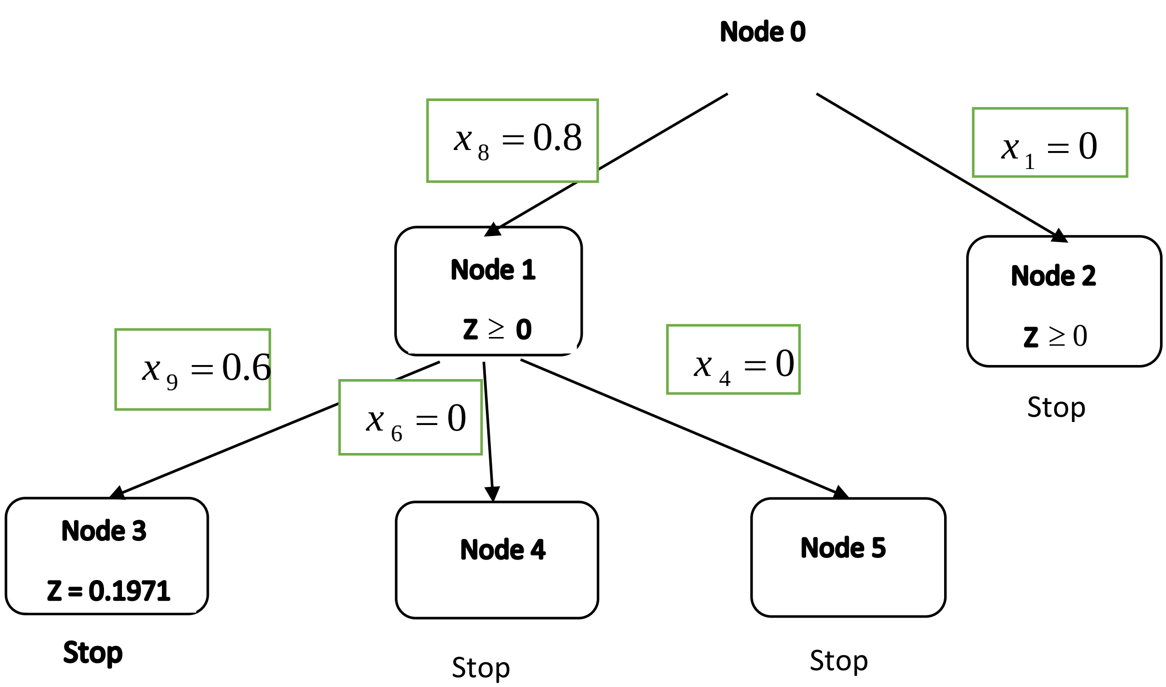
در این‌جا A و b به صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 & 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.8 & 0.4 & 0.6 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.9 & 0.6 & 0.8 & 0.4 & 0.5 & 0.3 & 0.5 \\ 0.5 & 0.9 & 0.4 & 0.2 & 0.8 & 0.1 & 0.4 & 0.4 & 0.7 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 & 0.5 & 0.8 & 0.1 & 0.8 & 0.3 & 0.4 \\ 0.7 & 0.8 & 0.5 & 0.4 & 0.8 & 0.2 & 0.4 & 0.1 & 0.9 \\ 0.5 & 0.9 & 0.7 & 0.1 & 0.5 & 0.8 & 0.7 & 0.2 & 0.9 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.7 & 0.5 & 0.8 & 0.3 & 0.5 & 0.7 \\ 0.8 & 0.8 & 0.7 & 0.5 & 0.8 & 0.3 & 0.4 & 0.7 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$b = [0.48\ 0.56\ 0.72\ 0.56\ 0.64\ 0.72\ 0.42\ 0.64]^T .$$

گام ۱. جواب شدنی ماکسیمم $\hat{x}$ از مسأله (۷) به صورت زیر است.

$$\hat{x} = (0.8\ 0.8\ 0.622\ 0.6\ 0.7\ 0.525\ 0.7\ 0.8\ 0.6)^T$$



شکل ۱: روش شاخه و کران

و $A o\hat{x} = b$، آن‌گاه به گام ۲ می‌رویم.

گام ۲. بدیهی است که $J' = \{1,3,4,6,7,8,9\}$ و $J'' = \{2,5\}$. بنابراین، ما می‌توانیم قرار دهیم $x_2 = 0.8$ و $x_5 = 0.7$ و ستون‌های ۲ و ۵ از A را حذف می‌کنیم. از آن جایی که $I^0 = \{2,3,4,5,6,8\}$، قیدهای (سطرهای) ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۸ را از مسأله (۷) را حذف می‌کنیم. حال مسأله کاهیده شده به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
\min Z(x) &= 0.3x_1^{0.6}x_3^{0.6}x_4^{0.3}x_6^{0.8} + 0.25677x_8^{0.5}x_9^{0.3} + 0.22161x_3^{0.4}x_7^{0.3}x_9^{0.2} \\
&\quad + 0.35226x_6^{0.3} \\
&s.t.\ A'ox = b', \\
&x \in [0,1]^7, \qquad (۸)
\end{aligned}$$

در این‌جا A' و b' و x به صورت زیر است:

$$A' = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.1 & 0.1 & 0.8 & 0.4 & 0.6 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.7 & 0.8 & 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix},$$

$$b' = [0.48 \ \ 0.42]^T,$$

$$x = (x_1, x_3, x_4, x_6, x_7, x_8, x_9)^T.$$

گام ۳. به وسیلهٔ خاصیت (۴)، ما مجموعهٔ اندیس‌ها J_i، را برای $(i = 1,7)$، حساب می‌کنیم. به طوری که نتیجه می‌شود:

$$J_1 = \{1,8\},\ J_7 = \{4,6,9\}.$$

گام ۴. از آن‌جایی که هیچ رابطه‌ای در قاعده ۲ صدق نمی‌کند به محاسبه Λ می‌پردازیم: $\Lambda = J_1 \times J_7$.

گام ۵. از آن جایی که $J^0 = \{3,7\}$ می‌باشد؛ $K_3^0 = \{1,3\}$ و $K_7^0 = \{3\}$ آنگاه می‌توانیم قرار دهیم $x_3 = 0$ و $x_7 = 0$

یادآوری می‌کنیم که با صفر شدن x_3 و x_7 اولین و سومین مؤلفه از $Z(x)$ حذف می‌شود و $Z(x)$ به صورت زیر کاهیده می‌شود:

$$Z(x) = 0.25677x_8^{0.5}x_9^{0.3} + 0.35226x_6^{0.3}.$$

گام ۶. حال الگوی درختی را با استفاده از روش شاخه و کران برای جواب بهینه (برای جزئیات شکل ۱ را ببینید). آنگاه جواب بهینه از مسأله (۸)، $\check{x}^* = ((0,0,0,0,0,0,0,0.8,0.6))^T$، و جواب بهینه از مسأله (۷):

$$x^* = (0,0.8,0,0.7,0,0,0.8,0.6)^T ,$$

است. و در نهایت مقدار بهینه $Z\left(x^*\right) = 0.1971$ است.

۵.نتیجه‌گیری

همان‌طوری که در مقدمه نیز اشاره شده مسایل برنامه‌ریزی خطی بر پایهٔ معادلات رابط-فازی در مدل‌سازی بسیاری از پدیده‌های واقعی دیده می‌شود، در این مقاله، مجموعه جواب‌های معادلات رابط-فازی با ترکیب ماکسیمم-حاصلضرب مطالعه شد. مسأله برنامه‌ریزی هندسی چندجمله‌ای چندمتغیره با معادلات رابط-فازی با ترکیب ماکسیمم-حاصلضرب، و ویژگی‌های خاصی از ناحیه شدنی را آنالیز کردیم. تابع هدف مسأله تابعی غیر نزولی (کاهشی) با متغیرهای کمکی است؛ نشان دادیم که جواب بهینه از یک جواب شدنی ماکسیمم منحصر به فرد و تعداد متناهی جواب شدنی مینیمال، به دست می‌آید. سپس قواعدی برای آسان‌تر کردن حل مسأله معرفی شد. یک جواب بهینه بنابر مسأله از تکنیک معادلات رابط-فازی، روش شاخه و کران و در نهایت با ارائه‌ی یک الگوریتم تولید می‌شود. سرانجام، همچنین مثالی برای چگونگی پیدا کردن جواب مسأله چندهدفۀ برنامه‌ریزی هندسی چندجمله‌ای چندمتغیره با قیود معادلات رابط-فازی ارائه شد.

References

1. Sanchez, E. (1976). “Resolution of composite fuzzy relation equation”. *Inf. Control*, (30), 38-48.

2. Loetamonphong, J., & Fang, S.C. (2001). “Optimization of fuzzy relation equations with max-product composition”. *Fuzzy Sets Syst.* (118), 509 - 517.

3. Czogala, E., Drewniak, J., & Pedrycz W. (1982). “Fuzzy relation equations on a finite set”. *Fuzzy Sets Syst.* (7), 89-101.

4. Di Nola, A., Sessa, S., Pedrycz, W., & Sanchez E. (1989). “Fuzzy Relation Equations and Their Applications in Knowledge Engineering”. Kluwer Academic Press, Dordrecht.

5. Li, P., & Fang, S.C. (2009). “Latticized linear optimization on the unit interval”. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* 17(6), 1353–1365.

6. Higashi, M., & Klir, G.J. (1984). “Resolution of finite fuzzy relation equations”. *Fuzzy Sets Syst.* (13), 65–82.

7. Zimmermann, H.J. (1991). “Fuzzy Set Theory and Its Applications, Kluwer Academic Publishers”. Boston.

8. Dubois, D., & Prade, H. (1986). “New results about properties and semantics of fuzzy set-theoretic operators, in: P.P. Wang, S.K. Chang (Eds.), Fuzzy Sets, Plenum Press, New York, pp. 59–75.

9. Thole, U., Zimmermann, H.J., & Zysno, P. (1979). “On the suitability of minimum and product operators for intersection of fuzzy sets”. *Fuzzy Sets and Systems* (2) 167–180.

10. Zimmermann, H.J., & Zysno, P. (1980). “Latent connectives in human decision-making”. *Fuzzy Sets and Systems* (4), 37–51.

11. Bourke, M.M., & Fisher D.G. (1998). “Solution algorithms for fuzzy relational equations with max product composition”. *Fuzzy Sets Syst.* (94), 61-69.

12. Zhou, X.G., & Ahat, R. (2011). “Geometric programming problem with single-term exponents subject to max-product fuzzy relational equations”. *Math. Comput. Model.* (53), 55-62.

13. Zhou, X.G., Yang, X.P., & Cao, B.Y. (2016). “Posynomial geometric programming problem subject to max-min fuzzy relation equations”. *Inf. Sci.* (328) 15-25.

14. Guo, F.F., Pang, L.P., Meng, D., & Xia Z.Q. (2013). "An algorithm for solving optimization problems with fuzzy relational inequality constraints". *Inf. Sci.* (252), 20-31.

15. Wang, P.Z., Zhang, D.Z., Sanchez, E., & Lee, E.S. (1991). "Latticized linear programming and fuzzy relation inequalities". *J. Math. Anal. Appl.* (159), 72–87.

16. Freson, S., De Baets, B., & De Meyer, H. (2013). "Linear optimization with bipolar max–min constraints". I*nf. Sci.* (234), 3–15.

17. Li, G.Z., &Fang, S.C. (1998). "Solving interval-valued fuzzy relation equations". *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* 6(2), 321–324.

18. Li, G., &Fang, S.C. (1996). "On the resolution of finite fuzzy relation equations". OR Report No. 322, North Carolina State University, Raleigh, North Carolina, May.

19. Fang, S.C., & Li G. (1999). "Solving fuzzy relation equations with a linear objective function". *Fuzzy Sets Syst.* (103), 107-113.

20. Lu, J., & Fang, S.C. (2001). "Solving nonlinear optimization problems with fuzzy relation equations constraints". *Fuzzy Sets Syst.* (119), 1–20.

21. Pedrycz, W. (1985). "On generalized fuzzy relational equations and their applications". *J. Math. Anal. Appl.* (107), 520-536.

22. Pedrycz, W. (1993). "s-t fuzzy relational equations". *Fuzzy Sets Syst.* (59), 189–195.

28. Yang, J.H., & Cao, B.Y. (2005). "Geometric programming with fuzzy relation equation constraints". in: *Proceedings of IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, 557–560.

23. Yang, J.H., & Cao, B.Y. (2007). “Monomial geometric programming with fuzzy relation equation constraints”. *Fuzzy Optim. Decis. Mak.* (6), 337–349.

24. Ghodousian, A., & Khorram, E. (2006). “An algorithm for optimizing the linear function with fuzzy relation equation constraints regarding max-prod composition” *Appl. Math. Comput.* (178), 502-509.

25. Ghodousian, A., & Khorram, E. (2012). “Linear optimization with an arbitrary fuzzy relational inequality”. *Fuzzy Sets Syst.* (206), 89-102.

26. Li, H., & Wang, Y. (2013). “A matrix approach to latticized linear programming with fuzzy-relation inequality constraints”. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* 21(4), 781–788.

27. Shivanian, E., & Khorram, E. (2009). “Monomial geometric programming with fuzzy relation inequality constraints with max-product composition”. *Comput. Ind. Eng.* (56), 1386-1392.

28. Zhou, X. G., Yang, X. P., & Cao, B. Y. (2016). Posynomial geometric programming problem subject to max–min fuzzy relation equations. *Information Sciences*, *328*, 15-25.

29. Mansori A, Iranzadeh S, Hadi A. (2018). Designing a Model of Social Performance for Green Supply Chain using Fuzzy Mathematical Programming under Uncertain Conditions. *Journal of Operational Research and Its Applications*. 15 (3): 87-106.

30. Aghajani M, Safaei Ghadikolaei A, Aghajani H, Valipour Khatir M. (2019). Fuzzy Mathematical Programming Model for Designing Sustainable Supply Chain: A Comparative Study. *Journal of Operational Research and Its Applications*. 2019; 15 (4):121-149.