

## رادیکال هونکه‌ای در توپوس Act-S

علی معدنشکاف، زینب خان‌جان‌زاده سرستی  
دانشگاه سمنان، گروه ریاضی

دریافت ۹۷/۱۲/۱۲ پذیرش ۹۸/۰۵/۲۶

### چکیده

یکی از مفاهیم مهم در نظریه توپوس‌ها، توپولوژی لایر-تیرنی (ضعیف) است. یک رده از توپولوژی‌های لایر-تیرنی (ضعیف) روی توپوس Act-S، متشکل از کنش‌های راست روی تکواره ثابت S، توپولوژی ایدالی است که به وسیله نویسندگان در [۱۳] معرفی شده است. در این مقاله قصد داریم مشخصه‌سازی‌هایی از بافه‌ها نسبت به این گونه توپولوژی‌ها ارائه دهیم. در ادامه با استفاده از این توپولوژی، رادیکالی هونکه روی Act-S می‌سازیم. سرانجام، رابطه بین بافه‌های متناظر با عملگر بستاری حاصل از این رادیکال و بافه‌های متناظر با توپولوژی ایدالی را بررسی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: S-کنش، عملگر بستاری ایدالی، (پیش)رادیکال هونکه، تاب، توپولوژی ایدالی.

### مقدمه و پیش‌نیازها

امروزه کاربردهای فراوانی از توپولوژی‌های لایر-تیرنی در توپوس‌ها و بافه‌های آنها، در شاخه‌های متفاوت ریاضی مانند نظریه اندازه [۸] و فیزیک کوانتوم [۱۸]، [۱۹] مشاهده شده است. یک رده از توپولوژی‌های لایر-تیرنی (ضعیف) روی رسته کنش‌های روی یک تکواره ثابت، «توپولوژی ایدالی»، با نمایش  $I^1$  است که به وسیله نویسندگان در [۱۳] معرفی شده و در [۱۰]، [۱۲] به طور دقیق بررسی شده‌اند. به عنوان کاربردی از توپولوژی ایدالی، در [۱۲] مشاهده شده است که تعدادی از رسته‌های مشهور متشکل از کنش‌های جداشده<sup>۱</sup> روی یک تکواره، در حقیقت حالت‌های خاصی از رسته کنش‌های  $I^1$ -جداشده هستند. از این منظر مایلیم در اینجا توپولوژی ایدالی و اشیای جداشده نسبت به آن را روی توپوس Act-S مطالعه کنیم. در حالت خاص، می‌خواهیم  $I^1$ -بافه‌های روی تکواره‌های به شکل  $S = G \dot{\cup} I$ ، که در آن G یک گروه و I ایدالی دوطرفه از S است، را بررسی کنیم. در [۵]، [۶] نشان داده شده است که برای کنش‌ها روی این نوع تکواره‌ها، S-کنش A هموار است اگر آن به عنوان یک  $I^1$ -کنش چپین باشد. در اینجا قصد داریم رابطه بین  $I^1$ -بافه‌ها در توپوس‌های Act-S و  $Act-I^1$  را بیابیم.

در سراسر این مقاله، تکواره S با عضو همانی ۱ را ثابت می‌گیریم. هم‌چنین در همه جا که ذکر نشده است، I ایدال چپی از S است. اکنون محتوای بخش‌های دیگر را به طور خلاصه بیان می‌کنیم: در بخش دوم، مشخصه‌سازی‌هایی از  $I^1$ -بافه‌ها در Act-S را ارائه می‌دهیم. هم‌چنین احکامی برای تکواره‌های به شکل  $S = G \dot{\cup} I$

\*نویسنده مسئول amadanshekaf@semnan.ac.ir

1. Separated

که در آن  $G$  یک گروه و  $I$  ایدالی دوطرفه از  $S$  است را به دست می‌آوریم. در بخش سوم، برای یک ایدال چپ خودتوان  $I$  از  $S$  نشان می‌دهیم رسته  $\mathbf{Act-S}$  توسیعی رادیکالی از رسته  $(\mathbf{Act-S})_I$ ، متشکل از همه  $S$ -کنش‌های  $I$ -جداشده، است یعنی رادیکالی روی  $\mathbf{Act-S}$  موجود است که رده بی‌تاب<sup>۱</sup> آن  $(\mathbf{Act-S})_I$  است. هم‌چنین نشان می‌دهیم این رادیکال، یک تاب (یا به بیان دقیق‌تر رادیکال موروثی) روی  $\mathbf{Act-S}$  است. در نهایت، عملگر بستاری متناظر با این رادیکال را ساخته و نشان می‌دهیم هر  $I$ -بافه، یک بافه نسبت به این عملگر بستاری نیز هست.

در این مقاله، نمادگذاری‌ها و مفاهیم زیر را استفاده می‌کنیم که تعدادی از آنها را از مراجع [۱۴]، [۲۰] یادآوری می‌کنیم. یک « $S$ -کنش (راست)» مجموعه  $A$  (با امکان تهی بودن) همراه با نگاشت  $\mu: A \times S \rightarrow A$  با  $\mu(a, s) = a \cdot s$  به صورت  $as$  نشان می‌دهیم، با نام «کنش» روی  $S$ ،  $A$ ، است به قسمی که برای هر  $a \in A$  و  $s, t \in S$ ، داریم  $a \cdot (st) = (as)t$  و  $a(st) = (as)t$ . یک «نگاشت حافظ کنش»  $f: A \rightarrow B$  از یک  $S$ -کنش  $A$  به  $S$ -کنش دیگر  $B$  نگاشتی است که  $f(as) = f(a)s$  برای هر  $a \in A$  و  $s \in S$ . برای هر دو  $S$ -کنش  $A$  و  $B$  مجموعه تمام نگاشت‌های حافظ کنش از  $A$  به  $B$ ، را به صورت  $\text{Hom}_S(A, B)$  نشان می‌دهیم. رسته همه  $S$ -کنش‌ها و نگاشت‌های حافظ کنش بین آنها را به صورت  $\mathbf{Act-S}$  نمایش می‌دهیم. از [۱۵] می‌دانیم این رسته یکرخت است با  $\text{Sets}^{\text{op}}$ ، توپوس پیش‌بافه‌های روی  $S$  که در آن تکواره  $S$  را به عنوان رسته‌ای با تنها یک شی در نظر می‌گیریم.

یک «پیش رادیکال<sup>۲</sup>» (که ممکن است یک «پیش رادیکال نرمال» نیز نامیده شود) نگارنده  $r: A \rightarrow r(A)$  است که به هر  $A \in \mathbf{Act-S}$  هم‌نهستی  $r(A) \in \text{Con}(A)$  را چنان نظیر می‌کند که هر نگاشت حافظ کنش  $f: A \rightarrow B$  نگاشت حافظ کنش  $r(f): r(A) \rightarrow r(B)$  را القا می‌کند، بدین معنی که برای هر نگاشت حافظ کنش  $f: A \rightarrow B$ ، داشته باشیم  $(f(a), f(a')) \in r(B)$  هرگاه  $(a, a') \in r(A)$ . توجه کنید که  $r(A)$  و  $r(B)$ ، به ترتیب، زیرکنش‌هایی از  $A \times A$  و  $B \times B$  هستند، زیرا  $r(A) \in \text{Con}(A)$  و  $r(B) \in \text{Con}(B)$ . یک پیش رادیکال  $r$  یک «رادیکال» (یا یک «رادیکال هونکه<sup>۳</sup>» در [۲۰]) است اگر برای هر  $S$ -کنش  $A$ ،  $r(A/r(A)) = \Delta_{A/r(A)}$  متذکر می‌شویم برای رسته‌های نرمال، تعاریف از مرجع [۲] اقتباس می‌شوند. رادیکال  $r$  در  $\mathbf{Act-S}$  را یک «تاب» (به شکل دقیق‌تر، «نگارنده تابی موروثی<sup>۴</sup>») می‌نامیم اگر  $r$  موروثی باشد، یعنی  $r$  برای همه زیرکنش‌های  $B$  از هر  $S$ -کنش  $A$ ، دارای خاصیت  $r(B) = r(A) \cap \nabla_B$  باشد. (همچنین، مرجع [۲۰] را مشاهده کنید).

در ادامه به صورت کوتاه، مفهوم توپولوژی ایدالی و مفاهیم مرتبط با آن را ذکر می‌کنیم. برای اطلاعات بیشتر در مورد توپولوژی‌ها روی  $\mathbf{Act-S}$  و خواص آنها، به [۱۲] رجوع شود. در ابتدا عملگر بستاری  $C = (C_A)_{A \in \mathbf{Act-S}}$  را یک «عملگر بستاری موجه<sup>۵</sup>» روی  $\mathbf{Act-S}$  می‌نامیم هرگاه برای همه زیرکنش‌های  $B$ ،  $B_1$  و  $B_2$  از  $A$ ، این خواص را دارا باشد:

$$1. B \subseteq C_A(B) \text{ (توسیعی)},$$

1. Torsion-free
2. Preradical
3. Hoehnke
4. Hereditary
5. Modal

۲.  $B_1 \subseteq B_2$  نتیجه دهد  $C_A(B_1) \subseteq C_A(B_2)$  (یکنوایی)،

۳. برای هر نگاشت حافظ کنش  $f: E \rightarrow F$ ، داشته باشیم  $C_E(f^{-1}(U)) \subseteq f^{-1}(C_F(U))$  برای هر زیرکنش  $U$  از  $F$  (پیوستگی)،

۴. برای هر نگاشت حافظ کنش  $f: E \rightarrow F$ ، داشته باشیم  $C_E(f^{-1}(U)) = f^{-1}(C_F(U))$  برای هر زیرکنش  $U$  از  $F$  (موجه).

متذکر می‌شویم  $C$  یک «عملگر بستاری» است هرگاه تنها در شرایط (۱)، (۲) و (۳) صدق کند. هم‌چنین گوییم عملگر بستاری  $C$  «خودتوان» است هرگاه برای هر زیرکنش  $B \subseteq A$ ، داشته باشیم  $C_A(C_A(B)) = C_A(B)$ . برای اطلاعات بیشتر در مورد عملگرهای بستاری روی رسته‌های کلی‌تر و خواص آنها به [۳] مراجعه کنید.

می‌دانیم مجموعه همه ایدآل‌های راست  $K$  از تکواره  $S$  همراه با کنش

$$K \cdot s = \{t \in S \mid st \in K\} \quad (۱)$$

یک  $S$ -کنش است که آن را به صورت  $\text{RIIdl}(S)$  نمایش می‌دهیم. حال، نگاشت حافظ کنش  $z: \text{RIIdl}(S) \rightarrow \text{RIIdl}(S)$  یک «توپولوژی (لاویر-تیرنی) ضعیف» روی  $\text{Act-S}$  نامیده می‌شود هرگاه این شرایط پیش آید:

$$\text{الف) } z(S) = S;$$

$$\text{ب) } z(K_1 \cap K_2) \subseteq z(K_1) \cap z(K_2), \text{ برای همه ایدآل‌های راست } K_1 \text{ و } K_2 \text{ از } S.$$

علاوه بر این،  $z$  «حاصل ضربی» است هرگاه در شرط (ب) به جای  $\subseteq$ ، تساوی برقرار باشد. یک توپولوژی ضعیف خودتوان روی  $\text{Act-S}$  یک «توپولوژی» روی  $\text{Act-S}$  نامیده می‌شود.

از [۱۲] می‌دانیم عملگرهای بستاری موجه روی  $\text{Act-S}$  در تناظر دوسویی با توپولوژی‌های لاویر-تیرنی ضعیف (با به اختصار توپولوژی‌های ضعیف) روی توپوس  $\text{Act-S}$  هستند. فرض می‌کنیم  $z$  یک توپولوژی (ضعیف) روی  $\text{Act-S}$  و  $(\cdot)$  عملگر بستاری موجه متناظر با  $z$  باشد. هم‌چنین، فرض کنیم  $B \subseteq A$  یک زیرکنش باشد. گوییم  $B$  در  $A$ ، « $z$ -بسته» است اگر  $\bar{B} = B$ ، و در  $A$  « $z$ -چگال» است اگر  $\bar{B} = A$ . می‌توان فرض کرد در  $\text{Act-S}$  (در حد یکرختی) هر تکرختی یک نگاشت شمول است. این فرض به ما اجازه می‌دهد یک  $z$ -بافه در  $\text{Act-S}$  را با شکل کمی متفاوت از [۱۵] تعریف کنیم، به این صورت که،  $S$ -کنش  $C$  یک « $z$ -بافه» نامیده می‌شود هرگاه برای هر زیرکنش  $z$ -چگال  $B \subseteq A$ ، هر نگاشت حافظ کنش  $h: B \rightarrow C$  را بتوان به یک نگاشت حافظ کنش یکتای  $g: A \rightarrow C$  توسعه داد. گوییم  $C$  « $z$ -جداشده» است اگر ریخت  $g$  در صورت وجود، یکتا باشد.

اکنون گیریم  $I$  ایدآل چپی از  $S$  باشد. در این صورت عملگر بستاری ایدآلی نسبت به  $I$ ، معرفی شده در [۴]، با ضابطه

$$C_A^I(B) = \{a \in A \mid \forall t \in I, at \in B\}, \quad (۲)$$

برای هر زیرکنش  $B \subseteq A$  است، به آسانی دیده می‌شود  $C^I I = C$  یک عملگر بستاری موجه روی توپوس  $\text{Act-S}$  است. حال، توپولوژی ضعیف متناظر با  $C^I$  روی  $\text{Act-S}$  معرفی شده در [۱۳]، نگاشت حافظ کنش

$$z^I: \text{RIIdl}(S) \rightarrow \text{RIIdl}(S) \text{ با ضابطه}$$

$$z^I(K) = \{s \in S \mid \forall t \in I, st \in K\}, \quad (۳)$$

برای هر  $K \in \text{RIdl}(S)$ ، است. هم‌چنین متذکر می‌شویم که برای یک ایدآل (چپ)  $I$  از  $S$ ،  $I^2 = I$  است اگر و تنها اگر  $I = (IS)^2 = IS$ . در ضمن، زیرکنش  $B \subseteq A$ ،  $I^2 = I$  چگال است هرگاه  $AI \subseteq B$ .

### مشخصه‌سازی‌هایی از $I^2 = I$ - بافه‌ها

در این بخش، قصد داریم  $I^2 = I$  - بافه‌ها را در توپوس  $\text{Act-S}$  مشخصه‌سازی کنیم. سپس،  $I^2 = I$  - بافه‌ها را برای تکواریه‌هایی به شکل  $S = G \cup I$  بررسی می‌کنیم که در آن  $G$  یک گروه و  $I$  ایدآل دوطرفه‌ای از  $S$  است که کنش‌های روی این گونه از تکواریه‌ها به وسیله برخی از ریاضیدانان، به‌طور مثال در [۵]، [۱۷]، بررسی شده‌اند. در ابتدا از [۱۲] یادآوری می‌کنیم که برای ایدآل چپ  $I$  از تکواریه  $S$ ،  $S$  - کنش  $A$  را « $I$ -جداشده» می‌نامیم هرگاه برای همه  $a, b \in A$  داشته باشیم

$$(\forall s \in I, as = bs) \Rightarrow a = b. \quad (۴)$$

حال نتیجه مهم و پایه‌ای زیر را از [۱۲] بیان می‌کنیم.

**گزاره ۱.** برای ایدآل چپ  $I$  از  $S$ ، یک  $S$  - کنش  $A$ ،  $I$  - جداشده است اگر و تنها اگر آن  $I^2 = I$  - جداشده باشد. از این‌جا به بعد، طبق گزاره فوق، به‌جای مفهوم  $I^2 = I$  - جداشده از مفهوم « $I$ -جداشده» استفاده خواهیم کرد. حال تعریف می‌کنیم:

**تعریف ۲.** فرض می‌کنیم  $I$  ایدآلی راست از تکواریه  $S$  است.  $S$  - کنش  $A$  را «به‌طور یکتا  $I$ -کامل» می‌نامیم هرگاه برای هر نگاشت حافظ کنش  $f: I \rightarrow A$  عضو (یکتای)  $a \in A$  موجود باشد به‌قسمی که  $f = \lambda_a|_I$ ، یعنی، برای هر  $s \in I$  داشته باشیم  $f(s) = \lambda_a(s) = as$ .

در حقیقت، منظور از یک کنش « $I$ -کامل»  $A$ ، کنش «دنباله‌ای کامل (یا به‌طور خلاصه  $s$ -کامل)» نسبت به زیر نیم‌گروه  $I$  از تکواریه  $S$  است، که در [۱۶]، تعریف [۶.۲] معرفی شده است. اکنون داریم:

**لم ۳.** فرض می‌کنیم  $I$  ایدآلی دوطرفه از تکواریه  $S$  است. در این صورت،  $S$  - کنش  $A$  به‌طور یکتا  $I$ -کامل است اگر و تنها اگر آن،  $I$ -کامل و  $I$ -جداشده باشد. اثبات. اثبات سراسر است.

قضیه ۴ مشخصه‌سازی‌های مهمی از  $I^2 = I$  - بافه‌ها به‌دست می‌دهد.

**قضیه ۴.** فرض می‌کنیم  $I$  ایدآلی دوطرفه از تکواریه  $S$  است. برای  $S$  - کنش  $A$ ، احکام زیر معادلند:

(الف)  $A$  یک  $I^2 = I$  - بافه است.

(ب) هر نگاشت حافظ کنش  $f: I \rightarrow A$  را می‌توان به‌طور یکتا به یک نگاشت حافظ کنش  $\bar{f}: S \rightarrow A$  توسعه داد.

(پ)  $A$  به‌طور یکتا  $I$ -کامل است.

(ت) نگاشت  $\lambda: A \rightarrow \text{Hom}_S(I, A)$  با ضابطه  $\lambda(a) = \lambda_a$  برای هر  $a \in A$ ، دوسویی است.

**اثبات.** (ب)  $\Rightarrow$  (الف) از آن‌جاکه  $I$  در  $S$  چگال است، طبق (الف) نگاشت حافظ کنش یکتای  $\bar{f}: S \rightarrow A$  موجود است به‌قسمی که  $\bar{f}|_I = f$ .

(پ)  $\Rightarrow$  (ب) برای  $f: I \rightarrow A$  مفروض، طبق (ب) نگاشت حافظ کنش یکتای  $\bar{f}: S \rightarrow A$  موجود است به قسمی که  $\bar{f}|_I = f$ .

اکنون با در نظر گرفتن  $a = \bar{f}(1)$ ، داریم  $\bar{f} = \lambda_a$  و در نتیجه  $f = \lambda_a|_I$ . بنابراین،  $A$ ،  $I$ -کامل است. علاوه بر این،  $A$ ،  $I$ -جدا شده است. زیرا برای هر  $a, b \in A$  که داشته باشیم  $at = bt$  برای هر  $t \in I$ ، دو نگاشت انتقال چپ  $\lambda_a, \lambda_b: I \rightarrow A$  مساویند. بنابراین طبق (ب)، دو توسیع آنها، که طبق یکتایی ریخت‌های  $\bar{\lambda}_a, \bar{\lambda}_b: S \rightarrow A$  به ترتیب با ضابطه‌های  $\bar{\lambda}_a(s) = as$  و  $\bar{\lambda}_b(s) = bs$  هستند، نیز مساویند. از این رو،  $a = \bar{\lambda}_a(1) = \bar{\lambda}_b(1) = b$ . از این که  $A$ ،  $I$ -جدا شده است، طبق لم ۳، نتیجه می‌شود که  $A$  به طور یکتا  $I$ -کامل است.

(الف)  $\Rightarrow$  (پ) با استفاده از مرجع [۱۱]، کافی است نشان دهیم  $A$  درون بر مطلق یکتا<sup>۱</sup> است. برای انجام این کار، توسیع  $I$ -چگال  $B$  از  $A$  را در نظر بگیرید. برای هر  $b \in B$ ، نگاشتی حافظ کنش از  $I$  به  $A$  است که چون  $A$  به طور یکتا  $I$ -کامل است، به صورت  $\lambda_b$ ، برای عضو یکتای  $a_b \in A$  است. اکنون نگارنده  $b \mapsto a_b$  درون بری مورد نیاز را به دست می‌دهد. بنابراین  $A$ ، درون بر مطلق و از این رو  $I$ -انژکتیو است. اکنون، نشان می‌دهیم  $A$ ،  $I$ -جدا شده نیز هست. برای این منظور، عناصر  $a, b \in A$  را چنان اختیار کنید که برای هر  $n \in I$ ،  $an = bn$ . بنابراین،  $\lambda_a = \lambda_b$  و طبق (پ)،  $a = b$ .

(ت)  $\Rightarrow$  (پ) اثبات سراسر است.

در این جا نتیجه‌ای مانند محک بئر-اسخورنیاخف<sup>۲</sup> را برای  $I$ -بافه‌ها بیان می‌کنیم.

نتیجه ۵. فرض می‌کنیم  $I$  ایدآلی دوطرفه از تکواره  $S$  است. برای  $S$ -کنش  $A$ ، احکام زیر معادلند:  
(الف)  $A$ ،  $I$ -بافه است.

(ب) برای هر نگاشت  $I$ -چگال  $h: B \rightarrow cS$  به یک کنش دوری و هر نگاشت حافظ کنش  $f: B \rightarrow A$  نگاشت حافظ کنش یکتای  $g: cS \rightarrow A$  موجود است به طوری که  $gh = f$ .

(پ) برای هر  $c \in S$ ، هر نگاشت حافظ کنش  $f: cI \rightarrow A$  می‌تواند به طور یکتا به نگاشت حافظ کنش  $\bar{f}: cS \rightarrow A$  توسعه داده شود.

اثبات. (ب)  $\Rightarrow$  (الف) واضح است.

(پ)  $\Rightarrow$  (ب) در (ب)، قرار دهید  $B = cI$ . از آن جا که  $I$  ایدآل چپی از  $S$  است، بنابراین  $cSI \subseteq cI$ ، از این رو،  $cI \subseteq cS$ ،  $I$ -چگال است.

(الف)  $\Rightarrow$  (پ) با قرار دادن  $c = 1$ ، (پ) دقیقاً بند (ب) از قضیه ۴ است که معادل با تعریف یک  $I$ -بافه است.

از [۱۴] یادآوری می‌کنیم که نیم‌گروه  $S$  «به‌طور یک‌به‌یک» روی  $S$ -کنش  $A$  عمل می‌کند هر گاه  $as = bs$  به‌ازای یک عنصر  $s \in S$  نتیجه دهد  $a = b$ . گزاره زیر مشخصه‌سازی دیگری از  $I$ -بافه‌ها به دست می‌دهد.

گزاره ۶. گیریم ایدآل دوطرفه  $I$  از تکواره  $S$ ، به‌عنوان یک نیم‌گروه، به‌طور یک‌به‌یک روی  $A$  عمل کند. در این صورت  $A$ ،  $I$ -بافه است اگر و تنها اگر برای هر نگاشت حافظ کنش  $f: S \rightarrow A$  و هر ایدآل راست متناهی مولد  $K$  از  $I$  (به‌عنوان یک نیم‌گروه)، عضو یکتای  $a \in A$  موجود باشد طوری که  $f|_K = \lambda_a|_K$ .

1. Unique absolute retract  
2. Baer-Skornjakov

**اثبات.** برای اثبات جهت نابدیهی، گیریم  $f: I \rightarrow A$  نگاشتی حافظ کنش باشد. عنصر  $s \in I$  را اختیار کنید. از آن‌جاکه  $sS$  ایدال راستی از  $I$  است بنابراین  $f|_{sS}: sS \rightarrow A$  نگاشتی حافظ کنش است که طبق فرض، برای عضو یکتای  $a_s \in A$  دارای شکل  $\lambda_{a_s}$  است. همچنین برای  $s \neq t \in I$ ، عضو یکتای  $c \in A$  موجود است به طوری که  $f|_{\{s, t\}S} = \lambda_c$ . اکنون، داریم  $a_s s = cs$  و بنابراین  $a_s = c$ ، چون  $I$  به طور یک‌به‌یک روی  $A$  عمل می‌کند. به طور مشابه  $a_t = c$ ، از این‌رو،  $a_s = a_t$ . در نتیجه همه  $a_s$  ها یکسانند و برای عضو یکتای  $a \in A$ ، داریم  $f = \lambda_a|_I$ . اکنون حکم از قضیه ۴ نتیجه می‌شود.

**گزاره ۷.** فرض کنیم  $M$  تکواره‌ای باشد که عضو معکوس‌پذیر راست و چپ (نابدیهی) نداشته باشد، یعنی  $S = M \setminus \{1\}$  ایدالی دو طرفه از  $M$  باشد. اگر هر ایدال دوطرفه  $M$  درون‌بری از  $M$  باشد، آن‌گاه یک  $M$ -کنش  $A$ ،  $J$ -انژکتیو است اگر و تنها اگر برای هر ایدال دو طرفه  $I$  از  $M$ ،  $A$ ،  $J$ -انژکتیو باشد.

**اثبات:** برای اثبات جهت نابدیهی، گیریم  $f: I \rightarrow A$  نگاشت کنشی از یک ایدال دوطرفه  $I$  از  $M$  باشد. طبق فرض، درون‌بری  $g: M \rightarrow I$  موجود است که  $g|_I = id$ . از این‌رو، نگاشت تحدید  $fg|_S: S \rightarrow A$  حافظ کنش است و طبق  $J$ -انژکتیو بودن  $A$ ،  $a \in A$  چنان موجود است که  $fg|_S = \lambda_a|_S$ . بنابراین،  $f$  نیز به صورت  $\lambda_a$  است. زیرا اگر  $s \in I$  را در نظر بگیرید آن‌گاه  $g(s) = s$  و سپس  $f(s) = fg(s) = as$

گزاره ۸ خاصیت دیگری از  $J$ -بافه‌ها به دست می‌دهد. اثبات آن مشابه قضیه ۲.۳ از [۱۶] است.

**گزاره ۸.** فرض می‌کنیم  $I$  ایدال دوطرفه از تکواره  $S$  و  $\{A_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$  خانواده‌ای از  $S$ -کنش‌ها باشد. اگر هم حاصل ضرب این خانواده  $J$ -بافه باشد آن‌گاه هر  $A_\alpha$  نیز چنین است.

بیش از این، با در نظر گرفتن ایدال دوطرفه  $I$  به جای نیم گروه  $S$  در [۱۶]، نتایج دیگری از این مرجع را می‌توان دقیقاً برای  $J$ -بافه‌ها بیان کرد مانند گزاره ۱۵.۲، قضیه ۴.۳ و نتیجه ۵.۳.

در ادامه این بخش، تکواره‌های به صورت  $S = G \dot{\cup} I$ ، که در آن  $G$  یک گروه و  $I$  ایدال دوطرفه‌ای از  $S$  است، را بررسی می‌کنیم. در ابتدا، از [۱۴، گزاره III ۲.۳]، تعریف (معادل) یک کنش انژکتیو ضعیف (اصلی) را یادآوری می‌کنیم:

**تعریف ۹.**  $S$ -کنش  $A$  «انژکتیو ضعیف (اصلی)» نامیده می‌شود هرگاه برای هر ایدال راست (اصلی)  $J$  از  $S$  و برای هر نگاشت حافظ کنش  $f: J \rightarrow A$  عضو  $a \in A$  موجود باشد به قسمی که  $f = \lambda_a|_J$ ، یعنی برای هر  $s \in J$  داشته باشیم  $f(s) = as$ .

اکنون، تعریف می‌کنیم:

**تعریف ۱۰.**  $S$ -کنش  $A$  را «بافه ضعیف (اصلی)» می‌نامیم هرگاه برای هر ایدال دوطرفه (اصلی)  $J$  از  $S$ ، انژکتیو ضعیف (اصلی) و  $J$ -جداشده باشد.

حال داریم:

**قضیه ۱۱.** فرض کنیم  $S = G \cup I$  تکواره‌ای باشد که در آن  $G$  یک گروه و  $I$  ایدال دوطرفه‌ای از  $S$  بوده است و  $A$  نیز یک  $S$ -کنش باشد. آن‌گاه،  $A$  به‌عنوان یک  $S$ -کنش، بافه ضعیف (اصلی) است هرگاه به‌عنوان یک  $I$ -کنش چنین باشد.

**اثبات.** به‌سادگی می‌توان مشاهده کرد که برای هر ایدال دوطرفه  $J$  از  $S$ ، داریم  $J = S$  یا  $J$  ایدالی از  $I$  است. سپس فوراً نتیجه می‌شود که برای هر ایدال دوطرفه  $J$  از  $S$ ،  $A$  به‌عنوان یک  $I$ -کنش،  $J$ -جداشده است اگر و تنها اگر به‌عنوان یک  $S$ -کنش،  $J$ -جداشده باشد. اکنون تعریف ۱۰ و قضیه‌های ۱.۲ و ۲.۲ از [۱۷] حکم را ثابت می‌کنند.

**قضیه ۱۲.** رابطه بین  $I^J$ -بافته‌ها در توپوس‌های Act-S و Act- $I^J$  را بررسی می‌کنیم.

**قضیه ۱۲.** فرض کنید  $S = G \cup I$  یک تکواره است و هم‌ریختی نیم گروهی نابدیهی  $I^J : S \rightarrow I^J$  با خاصیت  $h(\cdot) = 1$  را اختیار کنید. در این صورت،  $A$  در توپوس Act- $I^J$  یک  $I^J$ -بافته است اگر و تنها اگر  $A$  در توپوس Act-S،  $I^J$ -بافته باشد.

**اثبات.** به‌آسانی دیده می‌شود  $S$ -کنش  $A$  در توپوس Act- $I^J$ ،  $I$ -جداشده است اگر و تنها اگر در توپوس Act-S چنین باشد. حال قضیه ۶.۳ از [۱۷] حکم را ثابت می‌کنند.

### توسیع رادیکالی از $S$ -کنش‌های جداشده

در این بخش، نشان می‌دهیم توپوس Act-S توسیع رادیکالی از رسته (Act-S) برای یک ایدال چپ خودتوان  $I$  از  $S$  است یعنی رادیکالی روی Act-S موجود است که رده بی‌تاب آن (Act-S) است؛ به‌عنوان مثالی از این نوع ایدال‌ها، ایدال  $\mathbb{N}$  از اعداد طبیعی از تکواره  $\mathbb{N}^\infty = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  همراه با عمل کمینه را در نظر بگیرید. در ابتدا، از [۱۲] نتیجه ۱.۳ را می‌آوریم. با این وجود برای راحتی خواننده طرحی از اثبات را در این‌جا ذکر می‌کنیم.

**گزاره ۱۳.** برای یک ایدال (چپ)  $I$  از  $S$  با خاصیت  $I^2 = I$ ،  $(IS)^2 = IS$ ، تابعگون شمول  $L : \text{Act-S} \rightarrow \text{Sep}_I(\text{Act-S})$  الحاقی چپ  $L : \text{Act-S} \rightarrow \text{Sep}_I(\text{Act-S})$  با ضابطه  $L(A) = A/\sigma_A$  (روی اشیاء)

را دارد که در آن  $\sigma_A$  هم‌نهشتی  $S$ -کنشی (۵) روی  $A$  است

$$\sigma_A = \{(a, b) \in A \times A \mid \forall t \in I, at = bt\}. \quad (5)$$

**اثبات.** یک بررسی ساده نشان می‌دهد که نگارنده

$$\alpha : \text{id}_{\text{Act-S}} \rightarrow L \circ i; \quad \alpha_A = \pi_A : A \rightarrow A/\sigma_A,$$

برای هر  $S$ -کنش  $A$ ، که در آن نگاشت کانونی است، یک تبدیل طبیعی است که در آن  $\text{id}_{\text{Act-S}}$  تابعگون همانی روی Act-S است. علاوه بر این،  $\alpha$  خاصیت جهانی یکه الحاق چپ  $L$  به  $i$  را دارد (برای اطلاعات بیشتر، نتیجه ۶.۳.V از [۱۵] را ملاحظه کنید).

تابعگون  $L : \text{Act-S} \rightarrow \text{Sep}_I(\text{Act-S})$  معرفی شده در گزاره مذکور، به رادیکالی در رسته Act-S به‌صورت

قضیه ۱۴ بالا می‌رود. متذکر می‌شویم در قضیه ۱۴،  $I$  می‌تواند صرفاً ایدال چپی از  $S$  باشد.

**قضیه ۱۴.** گیریم  $I$  ایدال چپی از  $S$  باشد. آن‌گاه نگارنده  $\eta_I : A \rightarrow \sigma_A$ ، که در آن  $\sigma_A$  در (۵) معرفی شده است، پیش رادیکالی در Act-S است. علاوه بر این،  $\eta_I$  رادیکالی در Act-S است هرگاه  $I$  خودتوان باشد، یعنی  $I^2 = I$ .

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم  $\Gamma$  پیش رادیکال است. برای انجام آن، گیریم  $f: A \rightarrow B$  نگاشتی حافظ کنش باشد. باید رابطه شمول  $f(\sigma_A) \subseteq \sigma_B$  را ثابت کنیم. عضو دلخواه  $(f(a), f(b)) \in f(\sigma_A)$  را اختیار کنید. از آن‌جاکه  $(a, b) \in \sigma_A$ ، برای هر  $t \in I$  داریم  $at = bt$ . این‌که  $f$  حافظ کنش است نتیجه می‌دهد برای هر  $t \in I$   $f(a)t = f(b)t$ . پس  $(f(a), f(b)) \in \sigma_B$ . اکنون فرض کنیم  $I$  خودتوان نیز باشد. سپس، برای هر  $S$ -کنش  $A$ ، تساوی  $\Gamma(A/\sigma_A) = \Delta_A/\sigma_A$  را ثابت می‌کنیم. برای هر زوج  $(a/\sigma_A, b/\sigma_A) \in \Gamma(A/\sigma_A)$ ، داریم  $as/\sigma_A = bs/\sigma_A$ ، برای هر  $s \in I$ . اما، طبق (۵)، تساوی  $ast = bst$  برای هر  $s, t \in I$  برقرار است. بنابراین،  $a \sigma_A b$ ، از این‌رو،  $a/\sigma_A = b/\sigma_A$ ، زیرا  $I$  خودتوان است. پس،  $\Gamma(A/\sigma_A)$  مساوی با  $\Delta_A/\sigma_A$  است.

نتیجه ۱۵ زیر نشان می‌دهد، رده  $S$ -کنش‌های  $I$ -جداشده رده بی‌تاب از یک رادیکال است.

گزاره ۱۵. اگر  $I$  ایدآل چپ خودتوانی از  $S$  باشد آن‌گاه رده متشکل از همه  $S$ -کنش‌های  $I$ -جداشده، دقیقاً رده بی‌تاب متناظر با رادیکال  $\Gamma$  است.

اثبات. از [۲۰] می‌دانیم رده بی‌تاب متناظر با رادیکال  $\Gamma$  رده همه  $S$ -کنش‌های  $A$  است به‌قسمی که  $\sigma_A = \Delta_A$ . اما داریم  $\sigma_A = \Delta_A$  است اگر و تنها اگر  $A$  یک  $S$ -کنش  $I$ -جداشده باشد.

رادیکال معرفی شده در قضیه ۱۴ خاصیت بیش‌تری برای  $S$ -کنش‌ها دارد.

گزاره ۱۶. اگر  $I$  ایدآل چپ خودتوانی از  $S$  باشد، آن‌گاه نگارنده  $\Gamma: A \mapsto \sigma_A$  معرفی شده در (۵)، تابی در  $\mathbf{Act-S}$  است.

اثبات. ابتدا، طبق قضیه ۱۴ می‌دانیم  $\Gamma$  یک رادیکال است. علاوه بر این، برای هر  $S$ -کنش  $A$  و هر زیرکنش  $B$  از آن بی‌درنگ مشاهده می‌شود  $\sigma_B = \sigma_A \cap \nabla_B$ . از این‌رو،  $\Gamma$  رادیکالی موروثی است، از این‌رو، یک تاب است.

فرض کنیم  $B$  یک زیرکنش از  $S$ -کنش دلخواه  $A$  و  $r$  یک پیش‌رادیکال در رسته  $\mathbf{Act-S}$  باشد. در این صورت کلاس عضو  $B$  از  $S$ -کنش ریس  $A/B$  تحت هم‌نهشتی  $r(A/B)$  را با  $[B]_{\Gamma(A/B)}$  نشان می‌دهیم. در واقع داریم

$$[B]_{\Gamma(A/B)} = \{ a/B \in A/B \mid (a/B, B) \in r(A/B) \}.$$

حال قصد داریم به هر پیش‌رادیکال در  $\mathbf{Act-S}$  یک عملگر بستاری نظیر کنیم (هم‌چنین [۳] و [۷] ملاحظه شود).  
لم ۱۷. متناظر با هر پیش‌رادیکال  $r$  در  $\mathbf{Act-S}$ ، با در نظر گرفتن هم‌ریختی طبیعی  $\pi: A \rightarrow A/B$ ، عملگر بستاری  $C^r$  با ضابطه  $C^r_A(B) = \pi^{-1}([B]_{\Gamma(A/B)})$ ، برای هر  $S$ -کنش  $A$  و زیرکنش  $B$  از  $A$  موجود است.

هم‌چنین، زیرکنش  $B$  از  $A$ ،  $C^r$ -چگال است اگر و تنها اگر  $\nabla_{A/B} = r(A/B)$ .

اثبات. می‌توان مشاهده کرد که در واقع برای هر  $S$ -کنش  $A$  و هر زیر  $S$ -کنش  $B$  از  $A$ ، داریم

$$C^r_A(B) = \{ a \in A \mid \exists b \in B; (a/B, b/B) \in r(A/B) \}. \quad (۶)$$

افزون بر این به آسانی می‌توان مشاهده کرد عملگر  $C^r$ ، در  $\mathbf{Act-S}$  توسیعی و یکنوا است. هم‌چنین، خاصیت تعدی هم‌نهشتی  $r(A/B)$  نتیجه می‌دهد زیرکنش  $B \subseteq A$ ،  $C^r$ -چگال است اگر و تنها اگر  $r(A/B) = \nabla_{A/B}$ . حال ثابت می‌کنیم  $C^r$  پیوسته است. یعنی برای هر نگاشت حافظ کنش  $f: A \rightarrow B$  و هر زیرکنش  $D$  از  $B$ ، نشان می‌دهیم که داریم  $C^r_A(f^{-1}(D)) \subseteq f^{-1}(C^r_B(D))$ . اما بنا بر (۶) داریم

$$C^r_A(f^{-1}(D)) = \{ a \in A \mid \exists b \in f^{-1}(D); (a/f^{-1}(D), b/f^{-1}(D)) \in r(A/f^{-1}(D)) \} \quad (۷)$$



$$f^{-1}(C_B^r(D)) = \{a \in A \mid \exists d \in D; (f(a)/D, d/D) \in r(B/D)\}. \quad (8)$$

اکنون عضو دلخواه  $a \in C_A^r(f^{-1}(D))$  را در نظر بگیرید. بنا بر رابطه (۷)، عضو  $b \in f^{-1}(D)$  موجود است به قسمی که  $(a/f^{-1}(D), b/f^{-1}(D)) \in r(A/f^{-1}(D))$ . حال به سادگی مشاهده می‌کنیم که نگاشت  $\varphi_f: A/f^{-1}(D) \rightarrow B/D$  با ضابطه  $\varphi_f(a/f^{-1}(D)) = f(a)/D$  حافظ کنش است. از آن‌جا که  $r$  پیش رادیکال است، از این‌رو، نگاشت حافظ کنش  $r(\varphi_f): r(A/f^{-1}(D)) \rightarrow r(B/D)$  موجود است. حال  $(a/f^{-1}(D), b/f^{-1}(D)) \in r(A/f^{-1}(D))$ ، نتیجه می‌دهد  $(\varphi_f(a/f^{-1}(D)), \varphi_f(b/f^{-1}(D))) \in r(B/D)$ ، از این‌رو،  $(f(a)/D, f(b)/D) \in r(B/D)$ . اکنون، از آن‌جا که  $f(b) \in D$  بنا بر (۸)،  $a \in f^{-1}(C_B^r(D))$ .

اکنون، طبق (۵)، لم ۱۷ و قضیه ۱۴، متناظر با هر پیش رادیکال  $r_I$  (برای هر ایدآل چپ  $I$  از  $S$ ) در Act-S یک عملگر بستاری  $C_A^{r_I}$  با ضابطه

$$C_A^{r_I}(B) = \{a \in A \mid \exists b \in B; \forall t \in I, at = bt\} \quad (9)$$

را داریم.

گزاره ۱۸ رابطه بین عملگرهای بستاری  $C^{r_I}$  و  $C^I$  را نشان می‌دهد.

**گزاره ۱۸.** گیریم  $I$  ایدآل چپی از  $S$  باشد. آن‌گاه  $C^{r_I} \subseteq C^I$ . عکس شمول برقرار است اگر  $I$  همانی چپ داشته باشد.

**اثبات.** طبق روابط (۲) و (۹)، قسمت اول گزاره برقرار است. برای اثبات قسمت دوم، زیرکنش  $B \subseteq A$  و عضو  $a \in C_A^I(B)$  را در نظر بگیرید. هم‌چنین عضو همانی چپ  $I$  را با  $e$  نمایش می‌دهیم. طبق (۲)، برای هر  $t \in I$  داریم  $at \in B$ . بنابراین، هم‌چنین  $ae \in B$ . اکنون برای هر  $t \in I$  داریم  $at = aet$ . اکنون طبق (۹) حکم برقرار است.

به آسانی می‌توان مشاهده کرد که زیرکنش  $B \subseteq A$ ،  $C^{r_I}$ -چگال است هرگاه برای هر عضو  $a \in A$ ، عضو  $b \in B$  موجود باشد طوری که برای هر  $t \in I$ ، تساوی  $at = bt$  برقرار باشد. علاوه بر این، در [۱]، بافه‌ها نسبت به عملگرهای بستاری روی یک رسته با حدهای متناهی تعریف شده‌اند. به‌طور مشابه، در این‌جا نیز می‌توانیم  $S$ -کنش  $C$  را یک « $C^{r_I}$ -بافه» بنامیم هرگاه برای هر زیرکنش  $C^{r_I}$ -چگال  $B \subseteq A$ ، هر نگاشت حافظ کنش  $h: B \rightarrow C$  را بتوان به یک نگاشت حافظ کنش یکتای  $g: A \rightarrow C$  توسعه داد، یعنی  $g|_B = h$ . حال قضیه ۱۹ که فوراً از گزاره ۱۸ به‌دست می‌آید، ویژگی دیگری از  $I$ -بافه‌ها در Act-S را به‌دست می‌دهد.

**قضیه ۱۹.** گیریم  $I$  ایدآل چپی از  $S$  باشد. در این صورت، اگر زیرکنش  $B \subseteq A$ ،  $C^{r_I}$ -چگال باشد آن‌گاه  $I$ -چگال نیز هست. در ضمن، هر  $I$ -بافه یک  $C^{r_I}$ -بافه نیز هست.

## منابع

1. Carboni A., Mantovani S., "An Elementary Characterization of Categories of Separated Objects", J. Pure and Appl. Alg., 89 (1993) 63-92.
2. Clementino M. M., Dikranjan D., Tholen W., "Torsion Theories and Radicals in Normal Categories", J. Algebra 305 (2006) 98-129.

3. Dikranjan D., Tholen W., "Categorical Structure of Closure Operators. Kluwer", Netherlands, (1995).
4. Ebrahimi M. M., "On Ideal Closure Operators of  $M$ -Sets", Southeast Asian Bull, of Math., 30 (2006) 439-444.
5. Golchin A., Renshow J., "Periodic Monoids over which all Flat Cyclic Right Acts Satisfy Condition (P)", Semigroup Forum, 54 (2) (1997) 261-263.
6. Golchin A., "On Flatness of Acts", Semigroup Forum, 67 (2003) 262-270.
7. Haddadi M., Sheykhislamia S. M. N., "Radical-Injectivity in the Category  $S$ -Act", arXiv:1806.07077v1.
8. Jackson M., "A Sheaf Theoretic Approach to Measure Theory", PhD Thesis, University of Pittsburgh (2006).
9. Kashu A. I., "On Preradicals Associated to Principal Functors of Module Categories", I, Bul. A. S. R. M., Matematica, 2 (60) (2009) 62-72.
10. Khanjanzadeh Z., "Topologies on Topos  $M$ -Act and on Some Models of SDG", Ph.D. Thesis, Semnan University, March (2017).
11. Khanjanzadeh Z., Madanshekaf A., "Lawvere-Tierney Sheaves, Factorization Systems, Sections and  $j$ -essential Monomorphisms in a Topos", Italian J. Pure Appl. Math., 39 (2018) 55-72.
12. Khanjanzadeh Z., Madanshekaf A., "Weak Ideal Topology in the Topos of Right Acts over a Monoid", Comm. Alg., 46 (5) (2018) 1868-1888.
13. Khanjanzadeh Z., Madanshekaf A., "Weak Topologies on Toposes", Bull. Iran. Math. Soc. (2020). <https://doi.org/10.1007/s41980-020-00393-7>.
14. Kilp M., Knauer U., Mikhalev A., "Monoids, Acts and Categories", Walter de Gruyter, Berlin, New York, (2000).
15. Mac Lane S., Moerdijk I., "Sheaves in Geometry and Logic", Springer-Verlag, New York, (1992).
16. Mahmoudi M., Shahbaz L., "Characterizing Semigroups by Sequentially Dense Injective Acts", Semigroup Forum, 75 (2007) 116-128.
17. Moghaddasi Gh., Haddadi M., Delavari S., "On Injectivity of Acts", U.P.B. Sci. Bull., Series A, 79 (4) (2017) 189-198.
18. Nakayama K., "Topologies on Quantum Topoi Induced by Quantization", J. Math. Phys., 54 (2013) 072102.
19. Nakayama K., "Topos Quantum Theory on Quantization-Induced Sheaves", J. Math. Phys., 55 (2014) 102103.
20. Wiegandt R., "Radical and Torsion Theory for Acts", Semigroup Forum, 72 (2006) 312-328.