

# روشی مؤثر در مدل‌سازی جواب‌های سولیتونی جدید برای معادله غیرخطی رادکریشن-کوندو-لاکشمنا

بهزاد قنبری\*

دانشگاه صنعتی کرمانشاه، گروه علوم پایه، گروه ریاضی

دریافت: ۹۸/۰۱/۳۰

پذیرش: ۹۸/۱۱/۲۱

## چکیده

در این مقاله، معادله غیرخطی رادکریشن-کوندو-لاکشمنا بررسی خواهد شد. در تعیین جواب‌های دقیق جدید این معادله از روش توابع نمایی کسری تعمیم یافته استفاده شده است. شبیه‌سازی‌های عددی مختلف نیز به منظور نمایش رفتار جواب‌های دقیق معادله ارائه شده است. جواب‌های جدید معرفی شده کاربردهای وسیعی در مسائل مربوط خواهند داشت. به وضوح می‌توان دید که این روش، روشی ساده در عین حال کارآمد در تعیین جواب‌های این معادله است. به علاوه آن را می‌توان در حل بسیاری مسائل غیرخطی در ریاضی، فیزیک و سایر شاخه‌های مهندسی به کار گرفت. در انجام کلیه محاسبات و شبیه‌سازی‌های عددی از نرم افزار ممتیکا استفاده شده است.

**واژه‌های کلیدی:** معادلات با مشتقات جزئی، معادله غیرخطی رادکریشن-کوندو-لاکشمنا، روش توابع نمایی کسری تعمیم یافته، محاسبات نمادین، جواب‌های موج سولیتونی

## ۱. مقدمه

حساب دیفرانسیل کسری یک تعمیم برای مشتق و انتگرال از مرتبه عدد صحیح است. این ابزار ریاضی با موفقیت برای توصیف مسائل فراوان در شاخه‌های مهندسی مورد استفاده قرار گرفته است [۷،۱]. در ادبیات، تعریف‌های بسیاری از مشتق کسری وجود دارد. برخی از اصلی‌ترین این تعاریف عبارتند از ریمان لیوویل، لیوویل-کاپوتو، کاپوتو فابریزیو، آتگانا-بالینو، ریس، هیلفر و غیره [۸، ۱۰]. اخیراً چند روش عددی کارآمد برای به دست آوردن راه حل‌های تقریبی معادلات دیفرانسیل کسری معمولی و جزئی پیشنهاد شده است. برخی از این روش‌ها عبارتند از روش زیر-معادل، [۱۲، ۱۱]، روش تجزیه آدومین [۱۳، ۱۵]، روش آشفته‌گی هوموتوبی [۱۷، ۱۶]، روش تکرار وردشی [۲۱، ۱۸] و روش تبدیل هوموتوبی [۲۳، ۲۲]. خلیل در [۲۴]، تعریف جدیدی از مشتق به نام مشتق سازگار<sup>۱</sup> را معرفی کرد، این مشتق از برخی خواص متعارف مشتق نظیر قضیه زنجیره‌ای مشتق، قانون مشتق حاصل ضرب، قانون مشتق تقسیم، قضیه مقدار میانگین، قانون مشتق توابع مرکب

\*نویسنده مسئول: b.ghanbari@kut.ac.ir

<sup>1</sup> Conformable derivative

را برآورده می کند. این مشتق ممکن است به عنوان مشتق کسری شناخته نشود اما دارای مولفه مرتبه اعشاری است. این عملگر مشتق در سال های اخیر توجه زیادی را به خود جلب کرده است [۳۴،۲۵].

اخیرا یک تعریف جدید از مشتقات کسری توسط آتانگانا در ادبیات مربوط به مشتقات سازگار ارائه شد [۳۵]. این مشتق به نام  $\beta$ -مشتق معروف است. کاربردهای بسیاری با استفاده از این نوع مشتق در [۳۹،۳۶] گزارش شده است. **تعریف:**  $f(x)$  در یک نقطه  $\beta$ -مشتق پذیر از مرتبه اعشاری  $\alpha$  است هرگاه حد زیر موجود و متناهی باشد

$${}^A_0 D_x^\alpha \{f(x)\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f\left(x + \varepsilon \left(x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{1-\alpha}\right) - f(x)}{\varepsilon}. \quad (1)$$

در این مقاله به دنبال تعیین جواب های جدید دقیق برای این معادله رادکریشن-کوندو-لاکشمنان<sup>۲</sup> به صورت زیر هستیم

$$i {}^A_0 D_t^\alpha \{\phi\} + a {}^A_0 D_x^{2\alpha} \{\phi\} + b |\phi|^2 \phi = i [\rho {}^A_0 D_x^\alpha \{\phi\} + \lambda {}^A_0 D_x^\alpha \{|\phi|^2 \phi\} + \theta {}^A_0 D_x^\alpha \{|\phi|^2\} \phi - \gamma {}^A_0 D_x^{3\alpha} \{\phi\}]. \quad (2)$$

در این معادله تابع مجهول  $\phi(x,t)$  بر حسب متغیر مستقل مکانی  $x$  و متغیر زمانی  $t$  بیان می شود. هم چنین در آن  $a, b, \rho, \lambda, \theta, \gamma$  اعداد ثابتی هستند. تاکنون روش های متفاوتی در حل این معادله استفاده شده است. به عنوان مثال در [۴۱،۴۰]، جواب های ۱- سولیتونی این معادله با استفاده از یک روش توابع موج کمکی تطبیق یافته بدست آمده است. روش معادله کمکی و روش معادله ساده دو روش استفاده شده در مقاله [۴۲] برای تعیین جواب های دقیق این معادله است. در [۴۳،۴۵]، جواب های سولیتونی روشن، تاریک و منفرد برای این مدل با در نظر گرفتن نوع قانون غیرخطی شامل قانون کر<sup>۳</sup> و قانون توانی براساس روش توابع آزمون معرفی شده اند. در مرجع [۴۶] از روش گروه های لی برای تعیین جواب های دقیق این معادله استفاده شده است. هم چنین، در [۴۷] نویسندگان با به کارگیری روش سین گوردون بهبود یافته، فرم های جدید از جواب های سولیتونی معادله ارائه کرده اند.

در این مقاله دسته های جدیدی از جواب های دقیق معادله (۱) با استفاده از روش جدید توابع نمایی کسری تعمیم یافته<sup>۴</sup> (GERFM) معرفی خواهد شد.

ساختار ارائه مطالب در این پژوهش به شرح زیر می باشد: در فصل دوم مراحل استفاده از روش ذکر شده در حل دقیق معادلات ارائه خواهد شد. این روش در تعیین جواب های دقیق بسیاری از معادلات با مشتقات جزئی استفاده شده است. در فصل سوم

<sup>2</sup> Radhakrishnan-Kundu-Lakshmanan equation.

<sup>3</sup> Kerr law

<sup>4</sup> Generalized exponential rational function method

مقاله، جواب‌های دقیق جدید برای معادله با استفاده از این روش معرفی می‌شوند. این فصل هم‌چنین شبیه سازی‌های عددی از رفتار برخی جواب‌های به دست آمده را شامل می‌شود. سرانجام در انتهای مقاله، نتیجه‌گیری بیان خواهد شد.

## ۲. بیان روش تحلیلی

روش توابع نمایی کسری تعمیم یافته نخستین بار در سال ۲۰۱۸ توسط قنبری و همکارانش [۴۸] در حل معادله دیفرانسیل نوسانی شرویدنگر ارائه شده است. تاکنون، از این روش در حل بسیاری از معادلات استفاده شده است [۵۴،۴۹]. در این بخش، به گام‌های اساسی به کارگیری روش در حل معادلات غیرخطی اشاره خواهد شد:  
گام نخست: معادله غیرخطی زیر را در نظر بگیرید

$$L(\phi, {}_0^A D_x^\alpha \{\phi\}, {}_0^A D_t^\alpha \{\phi\}, {}_0^A D_x^{2\alpha} \{\phi\}, \dots) = 0. \quad (3)$$

با استفاده از تغییر متغیرهای جدید  $\phi = \Phi(\tau)$  و  $t = \frac{l}{\alpha} \left( x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^\alpha - \frac{l}{\alpha} \left( t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^\alpha$ ، معادله (۲) را می‌توان به فرم معادله دیفرانسیل معمولی زیر بازنویسی کرد

$$L(\Phi, \Phi', \Phi'', \dots) = 0, \quad (4)$$

گام دوم: حال فرض می‌کنیم معادله (۳) دارای جوابی به صورت زیر باشد

$$\Psi(\tau) = A_0 + \sum_{k=1}^M A_k \Lambda(\tau)^k + \sum_{k=1}^M B_k \Lambda(\tau)^{-k}. \quad (5)$$

که در آن

$$\Theta(\tau) = \frac{p_1 e^{q_1 \tau} + p_2 e^{q_2 \tau}}{p_3 e^{q_3 \tau} + p_4 e^{q_4 \tau}}. \quad (6)$$

هم‌چنین  $p_i, q_i$  ها برای  $1 \leq i \leq 4$ ، به علاوه  $A_0, A_1, \dots, A_k$  و  $B_1, \dots, B_k$  به ازای  $1 \leq k \leq M$  ثابت‌های مجهولی هستند که در خلال روش تعیین می‌شوند. عدد صحیح و نامنفی  $M$  نیز با به کار بستن اصول تعادلی در معادله (۳) تعیین می‌شود.  
گام سوم: با جایگذاری (۴) در معادله (۳) با در نظر گرفتن معادله (۵) و سپس دسته بندی عبارات با استفاده از نمادگذاری  $Z_i = e^{q_i \tau}$  برای  $i = 1, \dots, 4$ ، به معادله چندجمله‌ای به فرم  $P(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) = 0$  حاصل می‌شود. با مساوی صفر قرار دادن تمامی ضرائب این چندجمله‌ای یک دستگاه غیرخطی از معادلات حاصل می‌شود.

گام چهارم: با استفاده از نرم افزارهای محاسبات نمادین نظیر مپل و ممتیکا می‌توان دستگاه غیرخطی حاصل را حل نمود تا کلیه ضرائب مجهول در نظر گرفته شده تعیین شوند.

گام پنجم: با استفاده از مقادیر به دست آمده و جایگذاری آن‌ها در روابط (۴) و (۵)، جواب‌های سولیتونی دقیق برای معادله (۲) تعیین می‌شوند.

### ۳. تعیین جواب‌های دقیق معادله (۱)

فرض اصلی این روش بر این استوار است که جواب‌های معادله را می‌توان به فرم سولیتونی زیر بیان کرد

$$\phi(x, t) = \Phi(\tau) e^{i\varphi(x, t)}, \quad \tau = \frac{1}{\alpha} \left( x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^\alpha - \frac{\nu}{\alpha} \left( t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^\alpha, \quad \varphi(x, t) = -\frac{\kappa}{\alpha} \left( x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^\alpha + \frac{\omega}{\alpha} \left( t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^\alpha, \quad (7)$$

که در آن  $\omega$ ،  $\kappa$  و  $\nu$  به ترتیب نشان دهنده‌ی مولفه فازی، فرکانس سولیتون و عدد موج سولیتونی هستند. اکنون، روابط (۶) را در معادله (۱) جایگذاری کرده و سپس عبارت‌ها را به صورت حقیقی و مختلط دسته بندی می‌کنیم. در این صورت از رابطه قسمت موهومی نتیجه می‌شود

$$3\gamma\Phi''(\tau) - 3(\nu + \rho + 2a\kappa + 3\gamma\kappa^2)\Phi(\tau) - (3\lambda + 2\theta)\Phi^3(\tau) = 0. \quad (8)$$

که در آن مشتق‌ها برحسب متغیر  $\tau$  هستند. هم‌چنین قسمت حقیقی این عبارت به صورت زیر خواهد بود

$$(a + 3\kappa\gamma)\Phi''(\tau) - (\omega + \rho\kappa + a\kappa^2 + \gamma\kappa^3)\Phi(\tau) + (b - \lambda\kappa)\Phi^3(\tau) = 0, \quad (9)$$

با به کار بردن اصول تعادل در معادله (۷) (و یا (۸)) بین دو عبارت  $\Phi^3$  و  $\Phi''$  داریم  $2 + M = 3M$ ، بنابراین  $M = 1$  تعیین می‌شود.

با قرار دادن  $M = 1$  در عبارت (۴) خواهیم داشت

$$\Phi(\tau) = A_0 + A_1\Lambda(\tau) + \frac{B_1}{\Lambda(\tau)}, \quad (10)$$

با قرار دادن معادله (۹) در معادله (۱) و با دنبال کردن مراحل گفته شده برای روش در فصل، دسته جواب‌های نابدیهی زیر برای معادله (۱) حاصل می‌شوند:

دسته ۱: برای  $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [2-i, -2-i, -1, 1]$  و  $[q_1, q_2, q_3, q_4] = [i, -i, i, -i]$  داریم

$$\Lambda(\tau) = \frac{\cos(\tau) - 2\sin(\tau)}{\sin(\tau)}. \quad (11)$$

حالت ۱:

$$\kappa = \frac{(-2\theta - 3\lambda)a - 3b\gamma}{6\gamma(\lambda + \theta)}, A_0 = -2\sqrt{\frac{6\gamma}{3\lambda + 2\theta}}, \quad A_1 = 0, \quad B_1 = -5\sqrt{\frac{6\gamma}{3\lambda + 2\theta}}.$$

به علاوه

$$\begin{aligned} \omega = & \frac{1}{216\gamma^2(\lambda + \theta)^3} [27b(b^2 - 24\lambda^2 - 48\lambda\theta - 24\theta^2)\gamma^3 + (-216a\lambda^3 + (-432a\theta + 108\rho b)\lambda^2 + \\ & + (27ab^2 - 216a\theta^2 + 216\rho b\theta)\lambda + 108b\rho\theta^2)\gamma^2 - 36(\theta + 3/2\lambda)a(-2\rho\lambda^2 + (1/2ab - 4\rho\theta)\lambda + ab\theta - 2\rho\theta^2)\gamma - \\ & 16(\theta + 3/2\lambda)^2(3/4\lambda + \theta)a^3], \end{aligned}$$

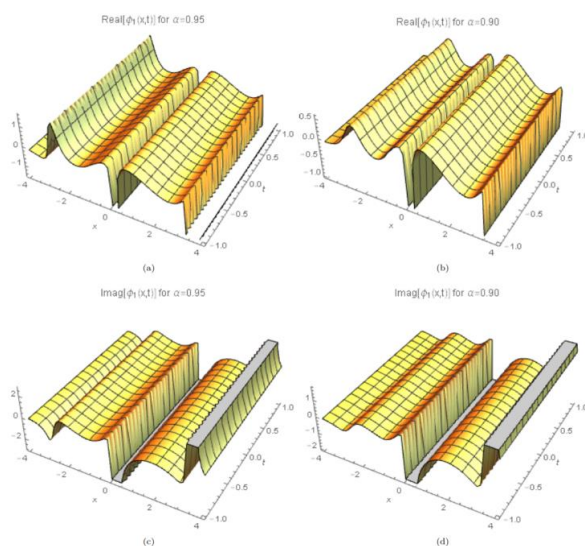
با قراردادن این مقادیر در روابط (۹) و (۱۰)، نتیجه می‌شود

$$\Phi(\tau) = -\sqrt{\frac{6\gamma}{3\lambda + 2\theta}} \frac{(5\cos(\tau)\sin(\tau) + 2)}{(5\cos^2(\tau) - 4)}.$$

از این رو جواب دقیق معادله (۱)، به صورت زیر تعیین می‌شود

$$\begin{aligned} \phi_1(x, t) = & \left( \frac{\sqrt{\frac{6\gamma}{3\lambda + 2\theta}} \left( 5\cos\left(\frac{1}{\alpha}\left(x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^\alpha - \frac{\nu}{\alpha}\left(t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^\alpha\right) \sin\left(\frac{1}{\alpha}\left(x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^\alpha - \frac{\nu}{\alpha}\left(t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^\alpha\right) + 2}{5\cos^2\left(\frac{1}{\alpha}\left(x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^\alpha - \frac{\nu}{\alpha}\left(t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^\alpha\right) - 4} \right)}{e^{i\left(\frac{\kappa}{\alpha}\left(x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^\alpha + \frac{\omega}{\alpha}\left(t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^\alpha\right)}} \right) \quad (12) \end{aligned}$$

نمودار ۱ برخی نمودارهای سه بعدی نظیر به جواب (۱۱) را نمایش می‌دهند.



نمودار ۱. شمایل جواب دقیق  $\phi(x, t)$ ، با استفاده از مقادیر مختلف  $\alpha$  و  $a = 0.5, b = 0.5, \rho = 1, \lambda = \theta = \gamma = 0.3$

دسته ۲: برای  $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [i, -i, 1, 1]$  و  $[q_1, q_2, q_3, q_4] = [i, -i, i, -i]$  داریم

$$\Lambda(\tau) = -\frac{\sin(\tau)}{\cos(\tau)} \tag{۱۳}$$

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{(-2\theta - 3\lambda)a - 3b\gamma}{6\gamma(\lambda + \theta)}, \quad A_0 = 0, \quad A_1 = -\sqrt{\frac{6\gamma}{3\lambda + 2\theta}}, \quad B_1 = -\sqrt{\frac{6\gamma}{3\lambda + 2\theta}}, \\ \nu &= \frac{(-9b^2 - 48\lambda^2 - 96\lambda\theta - 48\theta^2)\gamma^2 + (-12\rho\lambda^2 + (-6ab - 24\rho\theta)\lambda - 12\rho\theta^2)\gamma + 4(\theta + 3/2\lambda)(\theta + \lambda/2)a^2}{12\gamma(\lambda + \theta)^2}, \\ \omega &= \frac{1}{216\gamma^2(\lambda + \theta)^3} [27b(b^2 + 48\lambda^2 + 96\lambda\theta + 48\theta^2)\gamma^3 + (432a\lambda^3 + (864a\theta + 108\rho b)\lambda^2 + \\ &+ (27ab^2 + 432a\theta^2 + 216\rho b\theta)\lambda + 108b\rho\theta^2)\gamma^2 - 36(\theta + 3/2\lambda)a(-2\rho\lambda^2 + (1/2ab - 4\rho\theta)\lambda + ab\theta - 2\rho\theta^2)\gamma \\ &- 16(\theta + 3/2\lambda)^2(3/4\lambda + \theta)a^3 - 216\gamma^2(\lambda + \theta)^3]. \end{aligned}$$

با استفاده از این مقادیر در روابط (۹) و (۱۲)، نتیجه می‌شود

$$\Phi(\tau) = \sqrt{\frac{6\gamma}{3\lambda + 2\theta}} \frac{1}{\cos(\tau)\sin(\tau)}.$$

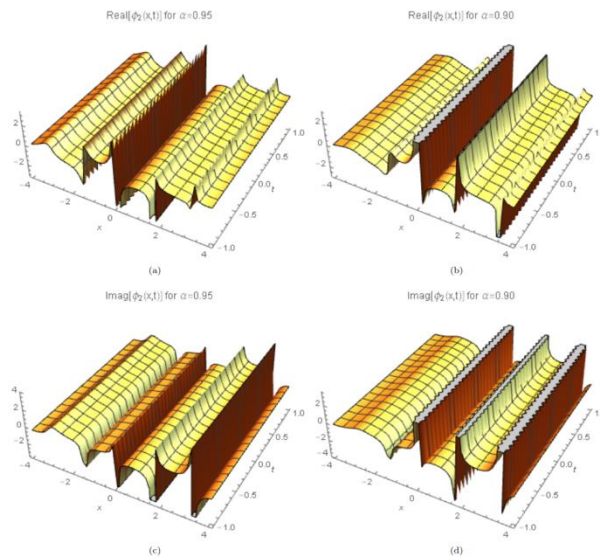
بنابراین جواب دقیق زیر برای معادله (۱)، حاصل می‌شود

$$\phi_2(x,t) = \left( \frac{1}{\sqrt{3\lambda + 2\theta} \cos\left(\frac{1}{\alpha}\left(x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^\alpha - \frac{\nu}{\alpha}\left(t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^\alpha\right) \sin\left(\frac{1}{\alpha}\left(x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^\alpha - \frac{\nu}{\alpha}\left(t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^\alpha\right)} \right) \times e^{i\left(-\frac{\kappa}{\alpha}\left(x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^\alpha + \frac{\theta}{\alpha}\left(t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^\alpha\right)} \quad (14)$$

نمودار ۲ برخی نمودارهای سه بعدی نظیر به جواب (۱۳) را نمایش می‌دهند.

دسته ۳: برای  $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [1 - i, 1 + i, 1, 1]$  و  $[q_1, q_2, q_3, q_4] = [i, -i, i, -i]$  داریم

$$\Lambda(\tau) = \frac{\cos(\tau) + \sin(\tau)}{\cos(\tau)} \quad (15)$$



نمودار ۲. شمایل جواب دقیق  $\phi_1(x,t)$ ، با استفاده از مقادیر مختلف  $\alpha$  و  $a = 0.5, b = 0.5, \rho = 1, \lambda = \theta = \gamma = 0.3$

$$\kappa = \frac{(-2\theta - 3\lambda)a - 3b\gamma}{6\gamma(\lambda + \theta)}, \quad A_0 = \sqrt{\frac{6\gamma}{2\theta + 3\lambda}}, \quad A_1 = 0, \quad B_1 = -2\sqrt{\frac{6\gamma}{2\theta + 3\lambda}},$$

$$\nu = \frac{(-9b^2 + 24\lambda^2 + 48\lambda\theta + 24\theta^2)\gamma^2 + (-12\rho\lambda^2 + (-6ab - 24\rho\theta)\lambda - 12\rho\theta^2)\gamma + 4(\theta + 3/2\lambda)(\theta + \lambda/2)a^2}{12\gamma(\lambda + \theta)^2},$$

$$\omega = \frac{1}{216\gamma^2(\lambda + \theta)^3} [27b(b^2 - 24\lambda^2 - 48\lambda\theta - 24\theta^2)\gamma^3 + (-216a\lambda^3 + (-432a\theta + 108\rho b)\lambda^2$$

$$+ (27ab^2 - 216a\theta^2 + 216\rho b\theta)\lambda + 108b\rho\theta^2)\gamma^2 - 36(\theta + 3/2\lambda)a(-2\rho\lambda^2 + (1/2ab - 4\rho\theta)\lambda + ab\theta - 2\rho\theta^2)\gamma$$

$$- 16(\theta + 3/2\lambda)^2(3/4\lambda + \theta)a^3],$$

با استفاده از این مقادیر در روابط (۹) و (۱۴)، نتیجه می شود

$$\Phi(\tau) = \sqrt{\frac{6\gamma}{2\theta + 3\lambda}} \frac{\sin(\tau) - \cos(\tau)}{(\cos(\tau) + \sin(\tau))}.$$

بنابراین جواب دقیق زیر برای معادله (۱)، حاصل می شود

$$\phi_3(x, t) = \left( \frac{\sqrt{\frac{6\gamma}{2\theta + 3\lambda}} \left( \sin \left( \frac{1}{\alpha} \left( x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^\alpha - \frac{\nu}{\alpha} \left( t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^\alpha \right) - \cos \left( \frac{1}{\alpha} \left( x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^\alpha - \frac{\nu}{\alpha} \left( t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^\alpha \right) \right)}{\sqrt{\frac{6\gamma}{2\theta + 3\lambda}} \left( \cos \left( \frac{1}{\alpha} \left( x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^\alpha - \frac{\nu}{\alpha} \left( t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^\alpha \right) + \sin \left( \frac{1}{\alpha} \left( x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^\alpha - \frac{\nu}{\alpha} \left( t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^\alpha \right) \right)} \right) \times e^{i \left( \frac{\kappa}{\alpha} \left( x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^\alpha + \frac{\omega}{\alpha} \left( t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^\alpha \right)}, \quad (16)$$

نمودار ۳ برخی نمودارهای سه بعدی نظیر به جواب (۱۵) را نمایش می دهند.

**دسته ۴:** برای  $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [-1, 0, 1, 1]$  و  $[q_1, q_2, q_3, q_4] = [0, 0, 1, 0]$  داریم

$$\Lambda(\tau) = -\frac{1}{1 + e^\tau}. \quad (17)$$

$$\kappa = \frac{(-2\theta - 3\lambda)a - 3b\gamma}{6\gamma(\lambda + \theta)}, \quad A_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6\gamma}{2\theta + 3\lambda}}, \quad A_1 = \sqrt{\frac{6\gamma}{2\theta + 3\lambda}}, \quad B_1 = 0,$$

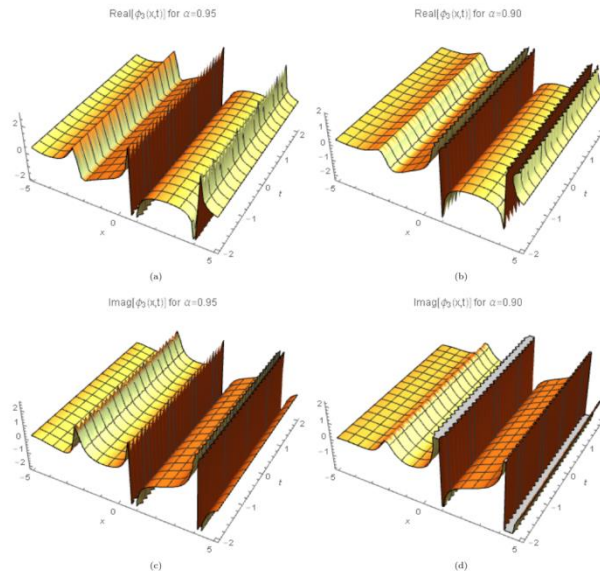
$$\nu = \frac{(-9b^2 - 6\lambda^2 - 12\lambda\theta - 6\theta^2)\gamma^2 + (-12\rho\lambda^2 + (-6ab - 24\rho\theta)\lambda - 12\rho\theta^2)\gamma + 4(\theta + 3/2\lambda)(\theta + \lambda/2)a^2}{12\gamma(\lambda + \theta)^2},$$

$$\omega = \frac{1}{216\gamma^2(\lambda + \theta)^3} [27b(b^2 + 6\lambda^2 + 12\lambda\theta + 6\theta^2)\gamma^3 + (54a\lambda^3 + (108a\theta + 108\rho b)\lambda^2$$

$$+ (27ab^2 + 54a\theta^2 + 216\rho b\theta)\lambda + 108b\rho\theta^2)\gamma^2 - 36(\theta + 3/2\lambda)a(-2\rho\lambda^2 + (1/2ab - 4\rho\theta)\lambda + ab\theta - 2\rho\theta^2)\gamma$$

$$- 16(\theta + 3/2\lambda)^2(34\lambda + \theta)a^3],$$





نمودار ۳. شمایل جواب دقیق  $\phi_3(x,t)$ ، با استفاده از مقادیر مختلف  $\alpha$  و  $a=1, b=1, \rho=2, \lambda=\theta=\gamma=0.5$

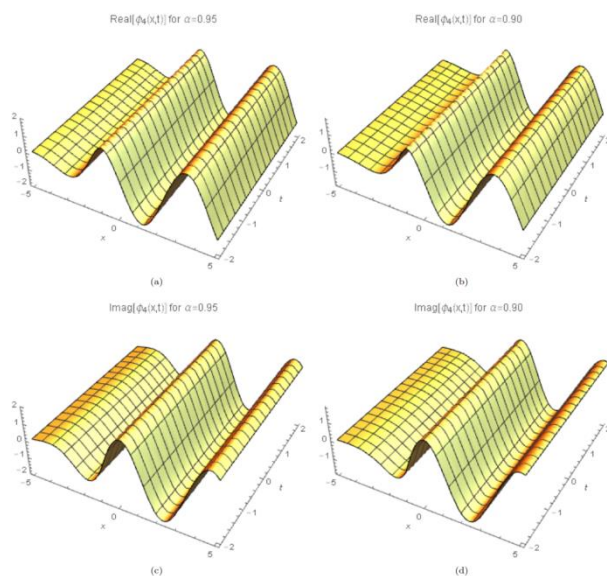
با استفاده از این مقادیر در روابط (۹) و (۱۶)، نتیجه می‌شود

$$\Phi(\tau) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{6\gamma}{2\theta+3\lambda}} \frac{\sqrt{6}\sqrt{\gamma}(e^\tau-1)}{\sqrt{2\theta+3\lambda}(e^\tau+1)}$$

بنابراین جواب دقیق زیر برای معادله (۱)، حاصل می‌شود

$$\phi_4(x,t) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\left( e^{\frac{1}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^\alpha} - \frac{v}{\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^\alpha - 1 \right)}{\sqrt{2\theta+3\lambda} \left( e^{\frac{1}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^\alpha} - \frac{v}{\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^\alpha + 1 \right)} \right] \times e^{i \left( \frac{\kappa}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^\alpha + \frac{\omega}{\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^\alpha \right)} \quad (18)$$

نمودار ۴ برخی نمودارهای سه بعدی نظیر به جواب (۱۷) را نمایش می‌دهند.



نمودار ۴. شمایل جواب دقیق  $\phi_4(x,t)$ ، با استفاده از مقادیر مختلف  $\alpha$  و  $a=1, b=1, \rho=2, \lambda=\theta=\gamma=0.5$

دسته ۵: برای  $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [-3, -1, -1, 1]$  و  $[q_1, q_2, q_3, q_4] = [-1, 1, -1, 1]$  داریم

$$\Lambda(\tau) = \frac{\cosh(\tau) - 2\sinh(\tau)}{\sinh(\tau)} \tag{۱۹}$$

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{(-2\theta - 3\lambda)a - 3b\gamma}{6\gamma(\lambda + \theta)}, A_0 = -2\sqrt{\frac{6\gamma}{2\theta + 3\lambda}}, A_1 = 0, B_1 = -3\sqrt{\frac{6\gamma}{2\theta + 3\lambda}}, \\ v &= \frac{(-9b^2 - 24\lambda^2 - 48\lambda\theta - 24\theta^2)\gamma^2 + (-12\rho\lambda^2 + (-6ab - 24\rho\theta)\lambda - 12\rho\theta^2)\gamma + 4(\theta + 3/2\lambda)(\theta + \lambda/2)a^2}{12\gamma(\lambda + \theta)^2}, \\ \omega &= \frac{1}{216\gamma^2(\lambda + \theta)^3} [27b(b^2 + 24\lambda^2 + 48\lambda\theta + 24\theta^2)\gamma^3 + (216a\lambda^3 + (432a\theta + 108\rho b)\lambda^2 \\ &+ (27ab^2 + 216a\theta^2 + 216\rho b\theta)\lambda + 108b\rho\theta^2)\gamma^2 - 36(\theta + 3/2\lambda)a(-2\rho\lambda^2 + (1/2ab - 4\rho\theta)\lambda + ab\theta - 2\rho\theta^2)\gamma \\ &- 16(\theta + 3/2\lambda)^2(3/4\lambda + \theta)a^3 - 216\gamma^2(\lambda + \theta)^3], \end{aligned}$$

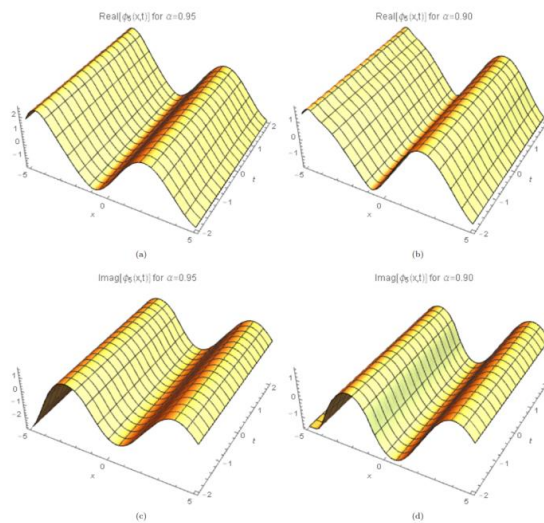
با استفاده از این مقادیر در روابط (۹) و (۱۸)، نتیجه می شود

$$\Phi(\tau) = \sqrt{\frac{6\gamma}{2\theta + 3\lambda}} \frac{(\sinh(\tau) - 2\cosh(\tau))}{(\cosh(\tau) - 2\sinh(\tau))}$$

بنابراین جواب دقیق زیر برای معادله (۱)، حاصل می شود

$$\phi_5(x,t) = \left[ \frac{\sqrt{6\gamma} \left( \sinh \left( \frac{1}{\alpha} \left( x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^\alpha - \frac{\nu}{\alpha} \left( t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^\alpha \right) - 2 \cosh \left( \frac{1}{\alpha} \left( x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^\alpha - \frac{\nu}{\alpha} \left( t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^\alpha \right) \right)}{\sqrt{2\theta + 3\lambda} \left( \cosh \left( \frac{1}{\alpha} \left( x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^\alpha - \frac{\nu}{\alpha} \left( t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^\alpha \right) - 2 \sinh \left( \frac{1}{\alpha} \left( x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^\alpha - \frac{\nu}{\alpha} \left( t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^\alpha \right) \right)} \right] \times e^{i \left( -\frac{\kappa}{\alpha} \left( x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^\alpha + \frac{\theta}{\alpha} \left( t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^\alpha \right)} \quad (20)$$

نمودار ۵ برخی نمودارهای سه بعدی نظیر به جواب (۱۹) را نمایش می‌دهند.



نمودار ۵. شمایل جواب دقیق  $\phi_5(x,t)$ ، با استفاده از مقادیر مختلف  $\alpha$  و  $a = 0.3, b = 0.2, \rho = 0.5, \lambda = \theta = \gamma = 0.4$

دسته ۶: برای  $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [1 - i, 1 + i, 1, 1]$  و  $[q_1, q_2, q_3, q_4] = [-i, i, -i, i]$  داریم

$$\Lambda(\tau) = \frac{\cos(\tau) - \sin(\tau)}{\cos(\tau)} \quad (21)$$

$$\kappa = \frac{(-2\theta - 3\lambda)a - 3b\gamma}{6\gamma(\lambda + \theta)}, A_0 = 0, \quad A_1 = -\sqrt{\frac{6\gamma}{2\theta + 3\lambda}}, \quad B_1 = \sqrt{\frac{6\gamma}{2\theta + 3\lambda}},$$

$$\nu = \frac{(-9b^2 - 96\lambda^2 - 192\lambda\theta - 96\theta^2)\gamma^2 + (-12\rho\lambda^2 + (-6ab - 24\rho\theta)\lambda - 12\rho\theta^2)\gamma + 4(\theta + 3/2\lambda)(\theta + \lambda/2)a^2}{12\gamma(\lambda + \theta)^2},$$

$$\omega = \frac{1}{216\gamma^2(\lambda + \theta)^3} [27b(b^2 + 96\lambda^2 + 192\lambda\theta + 96\theta^2)\gamma^3 + (864a\lambda^3 + (1728a\theta + 108\rho b)\lambda^2 + (27ab^2 + 864a\theta^2 + 216\rho b\theta)\lambda + 108b\rho\theta^2)\gamma^2 - 36(\theta + 3/2\lambda)a(-2\rho\lambda^2 + (1/2ab - 4\rho\theta)\lambda + ab\theta - 2\rho\theta^2)\gamma - 16(\theta + 3/2\lambda)^2(3/4\lambda + \theta)a^3],$$

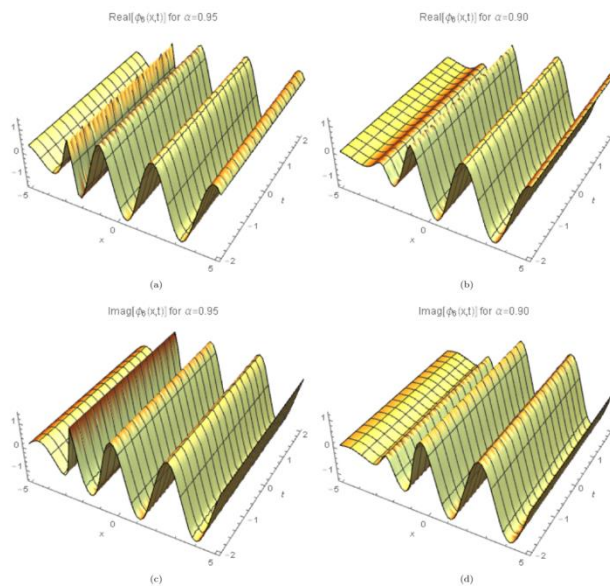
با استفاده از این مقادیر در روابط (۹) و (۲۰)، نتیجه می‌شود

$$\Phi(\tau) = \sqrt{\frac{6\gamma}{2\theta + 3\lambda}} \frac{(\coth^2(\tau) + 1)}{\coth(\tau)}.$$

بنابراین جواب دقیق زیر برای معادله (۱)، حاصل می‌شود

$$\phi_6(x, t) = \left[ \frac{\sqrt{\frac{6\gamma}{2\theta + 3\lambda}} \left( \coth^2 \left( \frac{1}{\alpha} \left( x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^\alpha - \frac{v}{\alpha} \left( t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^\alpha \right) + 1 \right)}{\coth \left( \frac{1}{\alpha} \left( x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^\alpha - \frac{v}{\alpha} \left( t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^\alpha \right)} \right] \times e^{i \left( -\frac{k}{\alpha} \left( x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^\alpha + \frac{\omega}{\alpha} \left( t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^\alpha \right)}. \quad (22)$$

نمودار ۶ برخی نمودارهای سه بعدی نظیر به جواب (۲۱) را نمایش می‌دهند.



نمودار ۶. شمایل جواب دقیق  $\phi_6(x, t)$ ، با استفاده از مقادیر مختلف  $\alpha$  و  $a = 0.3, b = 0.2, \rho = 0.5, \lambda = \theta = \gamma = 0.4$

دسته ۷: برای  $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [2, 0, 1, -1]$  و  $[q_1, q_2, q_3, q_4] = [1, 0, 1, -1]$ ، داریم

$$\Lambda(\tau) = \frac{\cosh(\tau) + \sinh(\tau)}{\sinh(\tau)}. \quad (23)$$

$$\kappa = \frac{(-2\theta - 3\lambda)a - 3b\gamma}{6\gamma(\lambda + \theta)}, A_0 = -\sqrt{\frac{6\gamma}{2\theta + 3\lambda}}, \quad A_1 = \sqrt{\frac{6\gamma}{2\theta + 3\lambda}}, \quad B_1 = 0.$$

$$v = \frac{(-9b^2 - 24\lambda^2 - 48\lambda\theta - 24\theta^2)\gamma^2 + (-12\rho\lambda^2 + (-6ab - 24\rho\theta)\lambda - 12\rho\theta^2)\gamma + 4(\theta + 3/2\lambda)(\theta + \lambda/2)a^2}{12\gamma(\lambda + \theta)^2},$$

$$\omega = \frac{1}{216\gamma^2(\lambda + \theta)^3} [27b(b^2 + 24\lambda^2 + 48\lambda\theta + 24\theta^2)\gamma^3 + (216a\lambda^3 + (432a\theta + 108\rho b)\lambda^2 + (27ab^2 + 216a\theta^2 + 216\rho b\theta)\lambda + 108b\rho\theta^2)\gamma^2 - 36(\theta + 3/2\lambda)a(-2\rho\lambda^2 + (1/2ab - 4\rho\theta)\lambda + ab\theta - 2\rho\theta^2)\gamma - 16(\theta + 3/2\lambda)^2(3/4\lambda + \theta)a^3],$$

با استفاده از این مقادیر در روابط (۹) و (۲۲)، نتیجه می‌شود

$$\Phi(\tau) = \sqrt{\frac{6\gamma}{2\theta + 3\lambda}} \frac{\cosh(\tau)}{\sinh(\tau)}.$$

بنابراین جواب دقیق زیر برای معادله (۱)، حاصل می‌شود

$$\phi_1(x, t) = \left( \frac{\sqrt{\frac{6\gamma}{2\theta + 3\lambda}} \cosh\left(\frac{1}{\alpha}\left(x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^\alpha - \frac{v}{\alpha}\left(t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^\alpha\right)}{\sinh\left(\frac{1}{\alpha}\left(x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^\alpha - \frac{v}{\alpha}\left(t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^\alpha\right)} \right) \times e^{i\left(\frac{\kappa}{\alpha}\left(x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^\alpha + \frac{\omega}{\alpha}\left(t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^\alpha\right)}. \quad (24)$$

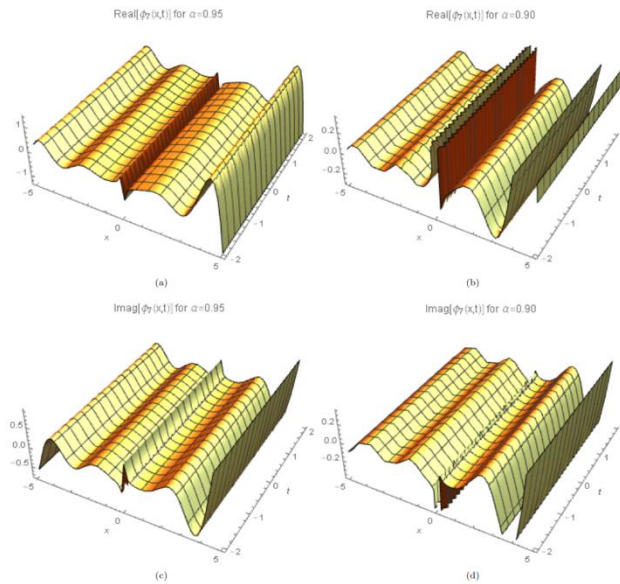
نمودار ۷ برخی نمودارهای سه بعدی نظیر به جواب (۲۳) را نمایش می‌دهند.

**نکته ۱:** شرط وجود این جواب برقراری رابطه  $\gamma(3\lambda + 2\theta) > 0$  است.

**نکته ۲:** درستی تمامی جواب‌های دقیق به دست آمده با جایگذاری مستقیم آن‌ها در معادله اصلی بررسی شده‌اند.

**نکته ۳:** جواب‌های به دست آمده در مقایسه با در نتایج به دست آمده در مقالات [۴۷، ۴۰]، نتایج و جواب‌هایی کاملاً متفاوت

و جدید هستند که برای بار اول در ادبیات ارائه شده‌اند.



نمودار ۷. شمایل جواب دقیق  $\phi_r(x,t)$ ، با استفاده از مقادیر مختلف  $\alpha$  و  $a = 0.1, b = 0.3, \rho = 0.2, \lambda = \theta = \gamma = 0.1$

#### ۴. نتیجه گیری

هدف اصلی این مقاله ارائه جواب های جدید دقیق و عددی برای یک معادله دیفرانسیل غیرخطی با مشتقات جزئی است. روش تحلیلی به کار رفته در مقاله روش توابع نمایی کسری تعمیم یافته است. درستی کلیه جواب های دقیق ارائه شده با استفاده از نرم افزار محاسبات نمادین متمتیکا بررسی شده اند. و ملاحظه شد که همگی آن ها در معادله اصلی صدق می کنند. جواب های سولیتونی به دست آمده دارای ساختار متفاوتی مانند مثلثاتی، هذلولی و توابع نمایی هستند؛ این موضوع بیانگر قدرت و کارایی روش است. اهمیت نتایج این پژوهش مربوط به ارائه دسته های جدید از جواب های دقیق برای این معادله است. روش های استفاده شده را می توان در حل سایر معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی در ریاضی، فیزیک و مهندسی غیرخطی نیز به کار برد.

#### References

1. X.J. Yang, F. Gao, H.M. Srivastava. Exact travelling wave solutions for the local fractional two-dimensional Burgers-type equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 73(2), (2017), 203-210.
2. O.S. Iyiola, E.O. Asante-Asamani, B.A. Wade. A real distinct poles rational approximation of generalized MittagLeffler functions and their inverses: Applications to fractional calculus. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 330, (2018), 307-317.

3. Y. Bai, D. Baleanu, G.C. Wu. Existence and discrete approximation for optimization problems governed by fractional differential equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 59, (2018), 338-348.
4. R. Garrappa, M. Popolizio. Computing the matrix Mittag-Leffler function with applications to fractional calculus. *Journal of Scientific Computing*, 1, (2018), 1-25.
5. Y. Mousavi, A. Alfi. Fractional calculus-based firefly algorithm applied to parameter estimation of chaotic systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 114, (2018), 202-215.
6. A. Fernandez, D. Baleanu, H.M. Srivastava. Series representations for fractional-calculus operators involving generalized Mittag-Leffler functions. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 67, (2018), 517-527.
7. C.S. Liu. Counterexamples on Jumarie's three basic fractional calculus formulae for non-differentiable continuous functions. *Chaos, Solitons & Fractals*, 109, (2018), 219-222.
8. I. Podlubny. *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and some of Their Applications*. Academic Press, San Diego, Calif, USA, (1999).
9. A. Atangana, D. Baleanu. New Fractional Derivatives with Nonlocal and Non-Singular Kernel. Theory and Application to Heat Transfer Model. *Therm Sci.* 20(2), (2016), 763-769.
10. M. Caputo, M. Fabricio. A New Definition of Fractional Derivative without Singular Kernel. *Progr. Fract. Differ. Appl.* 1(2), (2015), 73-85.
11. H. Yépez-Martínez, J.F. Gómez-Aguilar. Fractional sub-equation method for Hirota-Satsuma-coupled KdV equation and coupled mKdV equation using the Atangana's conformable derivative. *Waves in Random and Complex Media*, 1, (2018), 1-16.

12. H. Yépez-Martínez, J.F. Gómez-Aguilar, D. Baleanu. Beta-derivative and sub-equation method applied to the optical solitons in medium with parabolic law nonlinearity and higher order dispersion. *Optik-*, 155, (2018), 357-365.
13. M. Ahmad, A.A. Bhat, R. Jain. Space Time Fractional Telegraph Equation and its Application by Using Adomian Decomposition Method. *Journal of New Theory*, (22), (2018), 73-81.
14. A. Alizadeh, S. Effati. Modified Adomian decomposition method for solving fractional optimal control problems. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 40(6), (2018), 2054-2061.
15. D. Rani, V. Mishra. Modification of Laplace Adomian decomposition method for solving nonlinear Volterra integral and integro-differential equations based on Newton Raphson formula. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 11(1), (2018), 202-214.
16. D. Kumar, R.P. Agarwal, J. Singh. A modified numerical scheme and convergence analysis for fractional model of Lienard's equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 339, (2018), 405-413.
17. B.K. Singh, P. Kumar, V. Kumar. Homotopy Perturbation Method for Solving Time Fractional Coupled Viscous Burgers' Equation in  $(2 + 1)$  and  $(3 + 1)$  Dimensions. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 4(1), (2018), 1-19.
18. N. Das, R. Singh, A.M. Wazwaz, J. Kumar. An algorithm based on the variational iteration technique for the Bratu-type and the Lane-Emden problems. *Journal of Mathematical Chemistry*, 54(2), (2016), 527-551.
19. G.C. Wu, D. Baleanu, Z.G. Deng. Variational iteration method as a kernel constructive technique. *Applied Mathematical Modelling*, 39(15), (2015), 4378-4384.
20. G.C. Wu, D. Baleanu. Variational iteration method for the Burgers' flow with fractional derivatives-new Lagrange multipliers. *Applied Mathematical Modelling*, 37(9), (2013), 6183-6190.



21. J.S. Duan, R. Rach, A.M. Wazwaz. Higher order numeric solutions of the Lane-Emden-type equations derived from the multi-stage modified Adomian decomposition method. *International Journal of Computer Mathematics*, (2015), 1-19.
22. D. Kumar, J. Singh, S. Kumar. Analytic and approximate solutions of space-time fractional telegraph equations via laplace transform. *Walailak Journal of Science and Technology (WJST)*, 11(8), (2013), 711-728.
23. D. Kumar, J. Singh, S. Kumar. Numerical computation of nonlinear fractional Zakharov-Kuznetsov equation arising in ion-acoustic waves. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 22(3), (2014), 373-378.
24. R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef, M. Sababheh. A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264, (2014), 65-70.
25. A. Yusuf, A.I. Aliyu, D. Baleanu. Soliton structures to some time-fractional nonlinear differential equations with conformable derivative. *Optical and Quantum Electronics*, 50(1), (2018), 1-20.
26. A. Akbulut, M. Kaplan. Auxiliary equation method for time-fractional differential equations with conformable derivative. *Computers & Mathematics with Applications*, 75(3), (2018), 876-882.
27. H.W. Zhou, S. Yang, S.Q. Zhang. Conformable derivative approach to anomalous diffusion. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 491, (2018), 1001-1013.
28. C. Chen, Y.L. Jiang. Simplest equation method for some time-fractional partial differential equations with conformable derivative. *Computers & Mathematics with Applications*, 75(8), (2018), 2978-2988.
29. O. Acan, O. Firat, Y. Keskin. Conformable variational iteration method, conformable fractional reduced differential transform method and conformable homotopy analysis method for non-linear fractional partial differential equations. *Waves in Random and Complex Media*, 1, (2018), 1-19.

30. A. Korkmaz. On the wave solutions of conformable fractional evolution equations. *Communications*, 67, (2018), 68-79.
31. M.T. Darvishi, M. Najafi, A.R. Seadawy. Dispersive bright, dark and singular optical soliton solutions in conformable fractional optical fiber Schrödinger models and its applications. *Optical and Quantum Electronics*, 50(4), (2018), 1-18.
32. B. Abdalla. Oscillation of differential equations in the frame of nonlocal fractional derivatives generated by conformable derivatives. *Advances in Difference Equations*, 2018(1), (2018), 1-17.
33. O. Özkan, A. Kurt. The analytical solutions for conformable integral equations and integro-differential equations by conformable Laplace transform. *Optical and Quantum Electronics*, 50(2), (2018), 1-18.
34. A. Yusuf, A.I. Aliyu, D. Baleanu. Dark and singular optical solitons for the conformable space-time nonlinear Schrödinger equation with Kerr and power law nonlinearity. *Optik*, 162, (2018), 65-75.
35. A. Atangana. A novel model for the lassa hemorrhagic fever: deathly disease for pregnant women. *Neural Comput. Appl.* 26, (2015), 1895-1903.
36. E. Bonyah, A. Atangana, M.A. Khan. Modeling the spread of computer virus via Caputo fractional derivative and the beta-derivative. *Asia Pacific Journal on Computational Engineering*, 4(1), (2017), 1-18.
37. A. Atangana, C.Ünlü. New groundwater flow equation with its exact solution. *Scientia Iranica. Trans. B Mech. Eng.* 23, (2016), 1837-1843.
38. A. Atangana, D. Baleanu, A. Alsaedi. Analysis of time-fractional Hunter-Saxton equation: A model of neumatic liquid crystal. *Open Phys.* 14, (2016), 145-149.
39. A. Atangana, B.S.T. Alkahtani. Modeling the spread of Rubella disease using the concept of with local derivative with fractional parameter. *Complexity*, 21, (2016), 442-451.

40. A. Biswas, 1-soliton solution of the generalized Radhakrishnan, Kundu, Lakshmanan equation, *Physics Letters A* 373 (2009) 2546-2548.
41. B. Sturdevant, D.A. Lott, A. Biswas, Topological 1-soliton solution of the generalized Radhakrishnan- KunduLakshmanan equation with nonlinear dispersion. *Mod. Phys. Lett. B* 24(16)(2010), 1825-1831.
42. D. Lu, A. R. Seadawy, M. M. A. Khater, Dispersive optical soliton solutions of the generalized RadhakrishnanKundu-Lakshmanan dynamical equation with power law nonlinearity and its applications, *Optik* 164 (2018) 54-64.
43. A. Biswas, M. Ekici, A. Sonmezoglu, A. Alshomrani, Optical solitons with Radhakrishnan-Kundu-Lakshmanan equation by extended trial function scheme, *Optik* 160 (2018) 415-427.
44. A. Biswas, Y. Yildirim, E. Yasar, M. F. Mahmood, A. S. Alshomrani, Q. Zhou, S. P. Moshokoa, M. Belic, Optical soliton perturbation for Radhakrishnan-Kundu-Lakshmanan equation with a couple of integration schemes, *Optik*, 163 (2018) 126-136.
45. A. Biswas, Optical soliton perturbation with Radhakrishnan-Kundu-Lakshmanan equation by traveling wave hypothesis, *Optik* 171 (2018) 217-220.
46. A. Bansal, A. Biswas, M. F. Mahmood, Q. Zhou, M. Mirzazadeh, A. S. Alshomrani, S. P. Moshokoa, M. Belic, Optical soliton perturbation with Radhakrishnan-Kundu- Lakshmanan equation by Lie group analysis, *Optik* 163 (2018) 137-141.
47. T. A. Sulaiman, H. Bulut, G. Yel, S. S. Atas, Optical solitons to the fractional perturbed Radhakrishnan-KunduLakshmanan model, *Optical and Quantum Electronics* (2018) 50:372.
48. B. Ghanbari, M. Inc. A new generalized exponential rational function method to find exact special solutions for the resonance nonlinear Schrödinger equation. *Eur. Phys. J. Plus*, 133, (2018), 142.
49. M.S. Osama, B. Ghanbari, New optical solitary wave solutions of Fokas-Lenells equation in presence of perturbation terms by a novel approach, *Optik* 175 (2018) 328-333.

50. Ghanbari. B, Raza. N, “An analytical method for soliton solutions of perturbed Schrödinger’s equation with quadratic-cubic nonlinearity: Mod. Phys. Lett. B, 33, 2019
51. Osman. M.S, Ghanbari. B, Machado .J.A.T, “New complex waves in nonlinear optics based on the complex Ginzburg-Landau equation with Kerr law nonlinearity”, Eur. Phys. J. Plus, 134, 20, 2019
52. Ghanbari. B, Yusuf. A, Inc. M, Baleanu. D, “The new exact solitary wave solutions and stability analysis for the (2 + 1)-dimensional Zakharov–Kuznetsov equation”, Advances in difference equations, 2019, 49, 2019
53. Ghanbari. B, “Abundant soliton solutions for the Hirota-Maccari equation via the generalized exponential rational function method”, Modern Physics Letters B, 1950106, 2019
54. Ghanbari. B, Inc. M, Rada. L, “Solitary wave solutions to the tzitzeica type equations obtained by a new efficient approach”, Journal of Applied Analysis and Computation, 9(2), 1-22, 2019