تعمیم الگوریتم بوخبرگر در مدول‌های تفاضلی نسبت به ترتیب‌های چندگانه

حمزه حرف‌شنو، عبدالعلی بصیری*، سجاد رحمانی
دانشگاه دامغان، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، گروه ریاضی

دریافت ۹۸/۰۳/۰۴ پذیرش ۹۸/۰۹/۰۲

چکیده

پایهٔ گربنر نسبت به چند ترتیب برای یک مدول تفاضلی، مهم‌ترین ابزار برای یافتن چندجمله‌ای بعد دستگاه‌های دیفرانسیلی و تفاضلی است. در این مقاله، الگوریتمی برای محاسبهٔ این پایهٔ گربنر ارائه شده است. برای این منظور، ابتدا برای هر عضو از یک مدول تفاضلی نوعی نمایش، موسوم به نمایش نسبت به چند ترتیب، معرفی می‌کنیم. سپس با استفاده از این نمایش، اثباتی برای تعمیم قضیهٔ بوخبرگر در مدول‌های تفاضلی متناهی مولد، ارائه می‌دهیم. همچنین شرطی لازم و کافی برای وجود پایهٔ گربنر نسبت به چند ترتیب برای یک مدول تفاضلی را بیان کرده و در ادامه، الگوریتمی برای محاسبهٔ پایهٔ گربنر یک زیرمدول تفاضلی متناهی مولد نسبت به چند ترتیب، ارائه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: حلقهٔ تفاضلی، مدول تفاضلی، پایهٔ گربنر، الگوریتم بوخبرگر.

۱. مقدمه

نظریهٔ پایهٔ گربنر ابزاری بسیار مهم در جبر محاسباتی است. اگرچه این نظریه در دههٔ ۱۹۷۰ میلادی توسط برونو بوخبرگر به‌منظور حل الگوریتمی مساله‌ی عضویت در حلقهٔ چندجمله‌ای‌ها ابداع شد [۱]، اما طولی نکشید که به یک ابزار الگوریتمی قوی برای حل مسائل مختلف ریاضیات در علوم پایه و مهندسی تبدیل شد. اهمیت نظریهٔ پایهٔ گربنر بیشتر به دلیل ماهیت الگوریتمی آن است. در کنار کاربردهای فراوان پایهٔ گربنر در جبرهای جابه‌جایی، در سال‌های اخیر، پژوهشگران زیادی از این مفهوم در حل مسائل مربوط به جبرهای ناجابه‌جایی، جبرهای دیفرانسیلی و جبرهای تفاضلی بهره برده‌اند [۸،۱۲،۲۲،۲۳].

جبر دیفرانسیلی نخستین بار توسط ریاضیدانی به نام جوزف ریت در دههٔ ۱۹۳۰ میلادی به منظور مطالعهٔ معادلات دیفرانسیلی مطرح شد [۲۵،۲۶]. بعد از گذشت چند سال، ریت، روش‌های مشابهی برای حل معادلات تفاضلی به کار بست که منجر به ایجاد شاخهٔ جدیدی در ریاضیات به نام جبر تفاضلی شد. اما در آن سال‌ها و حتی تا چند دهه پس از آن، تحت تأثیر جبر دیفرانسیلی، جبر تفاضلی نتوانست نظر پژوهشگران را به خود جلب کند. تا این‌که بعد از قریب به ۳۰ سال پس از معرفی آن، این‌بار ریاضیدانی به‌نام ریچارد کوهن، به بیان نظام‌مند آن پرداخت [۲]. جبرهای دیفرانسیلی و تفاضلی به مطالعهٔ اثر یک یا چند عملگر بر یک ساختار جبری می‌پردازند. در سال‌های اخیر استفاده از این مفهوم گسترش زیادی داشته است [۴،۱۱،۱۴،۲۲].

می‌توان نشان داد، استفاده از مفهوم پایهٔ گربنر برای حل مسائل زیادی در جبرهای تفاضلی از جمله بعد فضای جواب معادلات دیفرانسیلی- تفاضلی خطی و محاسبهٔ چندجمله‌ای بعد دیفرانسیلی- تفاضلی ضروری است[۲۹]. به‌طورکلی

*نویسندهٔ مسئول basiri@du.ac.ir

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.513]

استفاده از مفهوم پایه‌ی گربنر در جبرهای تفاضلی از دو منظر ایده‌آلی و مدولی قابل بررسی است. تطبیق مفهوم پایهٔ گربنر با مفاهیم موجود در ایده‌آل‌های تفاضلی منجر به تعریف پایه‌ی گربنر تفاضلی شده است [۹،۲۷]. حل دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی و انتگرال‌های فینمان نمونه‌ای از کاربردهای پایهٔ گربنر تفاضلی است [۸،۱۱،۲۱].

به دست آوردن چندجمله‌ای بعد دستگاه معادلات دیفرانسیلی و تفاضلی و چندجمله‌ای بعد دستگاه شبه‌چندجمله‌ای‌های تفاضلی، یکی از مسائل مهم در جبرهای دیفرانسیلی و تفاضلی است [۴،۱۸]. مفهوم چندجمله‌ای بعد دیفرانسیلی نخستین بار در سال ۱۹۶۴ توسط کلچین، برای توصیف بعد توسیع یک میدان دیفرانسیلی مطرح شد [۱۲]. سپس لوین و دژاوادف به ترتیب به معرفی مفاهیم چندجمله‌ای بعد تفاضلی و چندجمله‌ای بعد تفاضلی- دیفرانسیلی پرداختند [۶،۱۵]. ویژگی‌های این چندجمله‌ای‌ها را می‌توان در فصل‌های ۶ و ۸ کتاب [۲۲] مطالعه کرد. چندجمله‌ای‌های بعد تفاضلی (دیفرانسیلی، تفاضلی- دیفرانسیلی) همان نقشی را در مطالعهٔ ساختارهای جبری تفاضلی (دیفرانسیلی، تفاضلی- دیفرانسیلی) و دستگاه معادلات جبری تفاضلی (دیفرانسیلی، تفاضلی- دیفرانسیلی) دارند که چندجمله‌ای‌های هیلبرت در جبر جابه‌جایی و هندسهٔ جبری ایفا می‌کنند. اهمیت چندجمله‌ای‌های بعد تفاضلی، دیفرانسیلی و تفاضلی- دیفرانسیلی حداقل از ۳ جهت قابل بیان است:

الف. چندجمله‌ای بعد یک دستگاه معادلات تفاضلی (دیفرانسیلی و تفاضلی – دیفرانسیلی) بیانگر قدرت این دستگاه از منظر فیزیکی برحسب تعریف آلبرت اینشتین [۷] است [۱۴،۱۷،۱۹].

ب. چندجمله‌ای بعد یک دستگاه متناهی شامل مولدهای توسیع یک میدان تفاضلی، دارای ناورداها و اعدادی است که با تغییر مولدها تغییر نمی‌کنند [۱۱،۱۲،۲۴].

پ. اهمیت دیگر چندجمله‌ای بعد تفاضلی بر پایهٔ رابطهٔ بین ایده‌ال‌های تفاضلی اول بازتابی و چندجمله‌ای بعد آن‌ها است، که منجر به یافتن نتایج جالبی دربارهٔ بعد کرول جبرهای تفاضلی و مدول‌ها می‌شود [۲۲].

در حالت کلی سه روش برای محاسبهٔ چندجمله‌ای بعد وجود دارد. روش اول مبتنی بر مفهوم مجموعهٔ مشخصه و روش دوم بر مبنای تحلیل آزاد یک مدول است [۱۲،۲۴]. اشکال این روش‌ها، نخست عدم وجود یک الگوریتم کارا برای محاسبهٔ مجموعهٔ مشخصه و سپس ممکن نبودن استفاده از روش تحلیل آزاد برای انواع دستگاه‌ها، است. در سال ۱۹۷۴ جانسون نشان داد [۱۰] چندجمله‌ای بعد دیفرانسیلی یک توسیع میدان دیفرانسیلی مشابه چندجمله‌ای هیلبرت یک مدول دیفرانسیلی است. این موضوع باعث ورود مفهوم پایهٔ گربنر در محاسبات مربوط به چندجمله‌ای بعد شد. به این ترتیب، روش سوم مبتنی بر مفهوم پایهٔ گربنر است. این روش توسط لوین پایه‌گذاری شد. در واقع لوین مبانی نظری و جبری استفاده از مفهوم پایهٔ گربنر در محاسبهٔ چندجمله‌ای بعد را وضع کرد [۱۴،۱۷].

یکی از ابزارهای مهم در نظریهٔ پایهٔ گربنر مفهوم کاهش یک چندجمله‌ای نسبت به یک یا چند، چندجمله‌ای دیگر با در نظر گرفتن یک یا چند ترتیب است. با توجه به نوع کاهش، حداقل به دو روش می‌توان از پایهٔ گربنر برای محاسبهٔ چندجمله‌ای بعد بهره گرفت[۲۰]:

۱- استفاده از مفهوم پایهٔ گربنر نسبت به چند ترتیب؛ ۲- پایهٔ گربنر نسبی. در سال ۲۰۰۸ دو ریاضیدان به نام‌های ژو منگ و فرانز وینکلر دو الگوریتم برای محاسبهٔ پایهٔ گربنر نسبی به منظور دستیابی به چندجمله‌ای بعد دیفرانسیلی- تفاضلی دو متغیره مطرح کردند [۳۰]. دو سال بعد وینکلر به همراه کریستین دنچ، اجرای این الگوریتم را در نرم‌افزار میپل ارائه

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.513]

دادند [۵]. لوین، برای اولین‌بار، مفهوم پایهٔ گربنر نسبت به چند ترتیب را معرفی و سپس تعمیم قضیهٔ بوخبرگر در مدول‌های تفاضلی متناهی مولد را بیان و اثبات کرد [۸]. در مقالهٔ حاضر، اثبات متفاوتی برای این قضیه بیان می‌کنیم. برتری روش اثبات در این مقاله، کاستن از فرض‌هایی است که در اثبات لوین در نظر گرفته شده‌اند. در ادامه به ارائهٔ الگوریتمی مبتنی بر این قضیه، برای محاسبهٔ پایهٔ گربنر یک زیرمدول تفاضلی می‌پردازیم. این الگوریتم تنها روش مبتنی بر مفهوم پایهٔ گربنر برای محاسبهٔ چندجمله‌ای بعد تفاضلی چندمتغیره است. اجرای این الگوریتم توسط نویسندگان این مقاله در نرم‌افزار میپل انجام شده است [۲۸]. همچنین نشان داده‌ایم هر ایده‌ال از حلقهٔ عملگرهای تفاضلی، متناهی مولد است. سپس یک نمایش برای هر عضو از یک مدول تفاضلی آزاد نسبت به یک زیرمجموعه از آن مدول و نسبت به چند ترتیب، معرفی می‌کنیم. این نمایش در اثبات قضیهٔ مذکور، اهمیت فراوانی دارد. در ادامه، شرطی لازم و کافی برای وجود یک پایهٔ گربنر نسبت به چند ترتیب برای یک زیرمدول تفاضلی متناهی مولد ارائه می‌دهیم.

ادامهٔ این مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است. در بخش ۲، تعاریف و قضایای لازم از جبرهای تفاضلی مرور شده‌اند. در این بخش به اثبات دو گزارهٔ مهم پرداخته‌ایم. در سومین بخش، یک ترتیب روی مدول‌های تفاضلی تعریف می‌کنیم. در بخش ۴، مفهوم کاهش نسبت به چند ترتیب را بیان نموده، سپس به بیان مفهوم پایهٔ گربنر نسبت به چند ترتیب می‌پردازیم. همچنین مفهوم k-امین S- چندجمله‌ای بین دو عضو از یک مدول تفاضلی آزاد تعریف شده است. در بخش آخر، یک نمایش نسبت به یک مجموعه و چند ترتیب برای هر عضو از یک مدول تفاضلی آزاد معرفی کرده و بر اساس آن به اثبات تعمیم قضیهٔ بوخبرگر می‌پردازیم. در آخر، یک الگوریتم برای به دست آوردن پایهٔ گربنر یک زیرمدول تفاضلی متناهی مولد نسبت به چند ترتیب ارائه می‌دهیم.

۲. تعاریف و پیش‌نیازها

در این بخش، پیش‌نیازهای لازم برای درک مفهوم پایه‌ی گربنر در جبرهای تفاضلی، آورده شده‌است. برای مطالعهٔ بیشتر دربارهٔ جبرهای تفاضلی و پایهٔ گربنر به‌ترتیب به [۲،۱۶] و [۳] مراجعه کنید. در ادامهٔ این نوشتار، همهٔ حلقه‌ها جابه‌جایی، شرکت‌پذیر و یکدار در نظر گرفته شده‌اند. همچنین همهٔ مدول‌ها روی حلقهٔ $\boldsymbol{R}$ یکدار و $\boldsymbol{R}$- مدول چپ هستند. $\mathbb{Z}$، $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Q}$ به‌ترتیب نشان‌دهندهٔ مجموعهٔ اعداد صحیح، مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی و مجموعهٔ اعداد گویا هستند.

تعریف ۲،۱. [۱۶] فرض کنید R یک حلقهٔ جابه‌جایی و $\sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ مجموعه‌ای از خودریختی‌های یک‌به‌یک از R باشد، به‌طوری‌که برای هر $\alpha_i,\ \alpha_j \in \sigma$ و هر $a \in R$ داشته باشیم $\alpha_i\alpha_j(a) = \alpha_j\alpha_i(a)$، دراین‌صورت زوج (R, σ) یک حلقه‌ی تفاضلی نامیده می‌شود. به مجموعه‌ی σ مجموعه‌ی پایه و به خودریختی‌های α_1و .... و α_n انتقال (یا تبدیل) گفته می‌شود.

در تعریف بالا، اگر R یک میدان باشد، آن‌گاه (R, σ) یک میدان تفاضلی نامیده می‌شود.

مثال ۲،۲. فرض کنید A حلقهٔ توابع n متغیرهٔ حقیقی و پیوسته روی فضای n- بعدی حقیقی $\mathbb{R}^n$ باشد. همچنین، فرض کنید h_1 و... و h_n اعداد حقیقی ثابتی باشند. اگر برای هر $f \in A$ عملگرهای α_1 و ... و α_n را به صورت

$$(\alpha_i f)(x_1, \dots, x_m) = f(x_1, \dots, x_i + h_i, \dots, x_m)$$

روی A تعریف کنیم، آن‌گاه A یک حلقه‌ی تفاضلی با مجموعهٔ پایهٔ $\sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ است.

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.513]

اگر R یک حلقهٔ تفاضلی با مجموعهٔ پایهٔ $\sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ باشد، نیم‌گروه آزاد تولید شده توسط σ را با T_σ نشان می‌دهیم. هر عضو τ از T_σ به‌صورت $\tau = \alpha_1^{k_1} \dots \alpha_n^{k_n}$ نمایش داده می‌شود که در آن $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$. (معمولاً به جای T_σ از T استفاده می‌کنیم).

تعریف ۲٫۳. [۱۶] یک عملگر تفاضلی روی حلقهٔ تفاضلی R عبارتی به شکل $\sum_{\tau\in T} a_\tau \tau$ است، که در آن $a_\tau \in R$ و فقط برای تعداد متناهی $\tau \in T$، a_τها مخالف صفر هستند. دو عملگر تفاضلی $\sum_{\tau\in T} a_\tau \tau$ و $\sum_{\tau\in T} b_\tau \tau$ مساوی هستند اگر و تنها اگر به ازای هر $\tau \in T$، $a_\tau = b_\tau$.
مجموعهٔ همهٔ عملگرهای تفاضلی روی R را با $\mathcal{D}$ نشان داده و برای هر $\sum_{\tau\in T} a_\tau \tau \in \mathcal{D}$ و $\sum_{\tau\in T} b_\tau \tau$، دو عمل جمع و ضرب به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

- $\sum_{\tau\in T} a_\tau \tau + \sum_{\tau\in T} b_\tau \tau = \sum_{\tau\in T}(a_\tau + b_\tau)\tau$
- $a \sum_{\tau\in T} a_\tau \tau = \sum_{\tau\in T}(a a_\tau)\tau$
- $(\sum_{\tau\in T} a_\tau \tau)\tau_1 = \sum_{\tau\in T} a_\tau(\tau\tau_1)$
- $\tau_1 a = \tau_1(a)\tau_1$.

با اعمال فوق $\mathcal{D}$ تبدیل به یک حلقه می‌شود که آن را حلقهٔ عملگرهای تفاضلی روی R می‌نامند.

تعریف ۲٫۴. [۱۶] فرض کنید R یک حلقهٔ تفاضلی و $\mathcal{D}$ حلقهٔ عملگرهای تفاضلی روی R باشد. اگر E یک $\mathcal{D}$- مدول چپ باشد، آن‌گاه E یک R- مدول تفاضلی نامیده می‌شود. در حالتی‌که R یک میدان تفاضلی باشد، R- مدول تفاضلی E، یک فضای برداری تفاضلی روی R است. همچنین اگر E یک مدول آزاد روی $\mathcal{D}$ باشد، آن‌گاه E یک فضای برداری تفاضلی آزاد روی K خواهد بود. فرض کنید E توسط مجموعهٔ متناهی $e = \{e_1, \dots, e_m\}$ تولید شده باشد، در این صورت E یک فضای برداری آزاد متناهی مولد روی $\mathcal{D}$ با مولدهای آزاد $\{e_1, \dots, e_m\}$ نامیده می‌شود.
لم ۲٫۵. فرض کنید K یک میدان تفاضلی و E یک فضای برداری آزاد متناهی مولد روی حلقهٔ عملگرهای تفاضلی $\mathcal{D}$ با مولدهای $e = \{e_1, \dots, e_m\}$ باشد، در این صورت E یک فضای برداری آزاد روی K با مولدهای

$$Te = \{\tau e_i | \tau \in T, 1 \le i \le m\}$$

است.

اثبات. به وضوح این حکم برقرار است.■
با توجه به لم فوق، هر عضو غیر صفر $f \in E$ دارای نمایش یکتای

$$f = a_1\tau_1 e_{i_1} + \dots + a_l \tau_l e_{i_l}$$

است که در آن $\tau_1 e_{i_1}$ و ... و $\tau_l e_{i_l}$ تک‌جمله‌ای‌های متمایز از Te و a_1 و ... و a_l عناصر غیر صفری از K هستند. به اعضای Te تک‌جمله‌ای می‌گوییم. در ادامه به اثبات دو گزارهٔ مهم می‌پردازیم. قضیهٔ ۲. ۷. اهمیت زیادی در اثبات پایان‌پذیری الگوریتم محاسبهٔ پایهٔ گربنر یک مدول تفاضلی دارد.

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.513]

گزاره ۲,۶. هر ایده‌ال تک‌جمله‌ای در حلقهٔ عملگرهای تفاضلی $\mathcal{D}$، متناهی مولد است.

اثبات. فرض کنید K یک میدان تفاضلی با مجموعه‌ی پایه‌ی $\sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ و $\mathcal{D}$ حلقه‌ی عملگرهای تفاضلی روی K باشد. می‌توان $\mathcal{D}$ را به‌عنوان یک حلقه‌ی چندجمله‌ای معمولی بر حسب متغیرهای α_1 و ... و α_n روی K در نظر گرفت. حال با استفاده از قضیه‌ی اساسی هیلبرت [۱۳] برای $\mathcal{D}$، حکم گزاره ثابت می‌شود.■

قضیه۲,۷. فرض کنید K یک میدان تفاضلی و $\mathcal{D}$ حلقهٔ عملگرهای تفاضلی روی K باشد. اگر E یک مدول تفاضلی آزاد متناهی مولد روی D باشد، آن‌گاه هر زیرمدول تفاضلی تک‌جمله‌ای از E، متناهی مولد است.

اثبات فرض کنید $\{e_1, \dots, e_n\}$ یک مجموعهٔ مولد برای E و N یک زیرمدول تفاضلی تک‌جمله‌ای از E باشد. همچنین فرض کنید N_i زیرمجموعه‌ای از N به صورت $N_i = \{\tau \in T \mid \tau e_i \in \mathrm{N}\}$ است. می‌توان ثابت کرد که N_i یک ایده‌ال تک‌جمله‌ای از $\mathcal{D}$ است. بنابراین، از گزارهٔ ۲,۶ نتیجه می‌شود که ایده‌ال N_i متناهی مولد است. فرض کنید به ازای هر i، B_i مولد N_i باشد. حال قرار دهید $B = B_1 e_1 \cup \dots \cup B_n e_m$. به راحتی دیده می‌شود که B یک مجموعه‌ی مولد متناهی برای N است.■

۳. ترتیب روی مدول‌های تفاضلی

به منظور تعریف پایه‌ی گربنر برای مدول‌های تفاضلی متناهی مولد، ابتدا یک ترتیب روی مجموعه‌ی Te تعریف می‌کنیم. زیر مجموعه‌های $\sigma_1 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n_1}\}$، $\sigma_2 = \{\alpha_{n_1+1}, \dots, \alpha_{n_1+n_2}\}$ و ... و $\sigma_p = \{\alpha_{n_1+n_2+\dots+n_{p-1}+1}, \dots, \alpha_n\}$ را، از مجموعهٔ پایهٔ $\sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ طوری در نظر می‌گیریم که برای هر $i = 1, \dots, p$، $n_i \geq 1$ و $n_1 + \dots + n_p = n$.
واضح است که این زیرمجموعه‌ها یک افراز برای مجموعهٔ σ تشکیل می‌دهند.

برای هر $\tau = \alpha_1^{k_1} \dots \alpha_n^{k_n} \in T$، مرتبهٔ کلی τ و مرتبهٔ τ نسبت به σ_i را به ترتیب به صورت $ord\,\tau = \sum_{i=1}^{n} k_i$ و $ord_i\,\tau = \sum_{\alpha_i \in \sigma_i, \alpha_i^{k_v} \mid \tau} k_v = \sum_{v=n_1+\dots+n_{i-1}+1}^{n_1+\dots+n_i} k_v$ تعریف می‌کنیم. به عبارت دیگر، مرتبهٔ τ نسبت به σ_i برابر است با مجموع توان‌های اعضایی از σ_i که در τ ظاهر می‌شوند.

حال ترتیب‌های $<_1$، $<_2$ و ... و $<_p$ را روی نیم‌گروه T به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\tau = \alpha_1^{k_1} \dots \alpha_n^{k_n} <_i \tau' = \alpha_1^{l_1} \dots \alpha_n^{l_n}$$

اگر و تنها اگر

$$\begin{gathered}(ord_i\tau, ord\,\tau, ord_1\tau, \dots, ord_{i-1}\tau, ord_{i+1}\tau, \dots, ord_p\tau,\\ k_{n_1+\dots+n_{i-1}+1}, \dots, k_{n_1+\dots+n_i}, k_1, \dots, k_{n_1+\dots+n_{i-1}}, k_{n_1+\dots+n_i+1}, \dots, k_n)\\ <_{lex} (ord_i\tau', ord\,\tau', ord_1\tau', \dots, ord_{i-1}\tau', ord_{i+1}\tau', \dots, ord_p\tau',\\ l_{n_1+\dots+n_{i-1}+1}, \dots, l_{n_1+\dots+n_i}, l_1, \dots, l_{n_1+\dots+n_{i-1}}, l_{n_1+\dots+n_i+1}, \dots, l_n)\end{gathered}$$

در حالتی که $p = 1$ ترتیب فوق به ترتیب درجه‌ای الفبایی با شرط $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n$ تبدیل می‌شود.
ترتیب‌های $<_1$، $<_2$، ... و $<_p$ روی نیم‌گروه T، خوش‌ترتیب هستند.

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.513]

اکنون می‌توان p ترتیب جمله‌ای روی مجموعهٔ Te ایجاد کرد. این ترتیب‌ها را مجدد با $<_1$، $<_2$ و ... و $<_p$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\tau e_\mu <_i \tau' e_\nu$$ اگر و تنها اگر $\nu < \mu$ و $\tau = \tau'$ یا $\tau <_i \tau'$.

هرگاه $f = \sum_{j=1}^{n} a_j \tau_j e_{i_j}$ عضوی از E باشد، $lm_k(f)$ عبارتست از $\tau_v e_{i_v}$ که بزرگترین عبارت از $\{\tau_1 e_{i_1}, \dots, \tau_n e_{i_n}\}$ نسبت به ترتیب $<_k$ است و به $u_f^{(k)}$ نمایش می‌دهند. همچنین $ord_k(f)$ نشان دهندهٔ مرتبهٔ کلی $lm_k(f)$ و $lc_k(f)$ نشان دهندهٔ ضریب $lm_k(f)$ است.

۴. پایهٔ گربنر نسبت به چندین ترتیب

در این بخش به معرفی دو ابزار مهم در نظریهٔ پایهٔ گربنر می‌پردازیم. ابتدا مفهوم کاهش نسبت به چند ترتیب را بیان کرده، سپس مفهوم k- امین S- چندجمله‌ای بین دو عضو از E را تعریف می‌کنیم. همچنین مفهوم پایهٔ گربنر نسبت به چند ترتیب را بررسی می‌کنیم. مفهوم کاهش نسبت به چند ترتیب را اولین بار لوین در [۱۹] برای به دست آوردن مجموعهٔ مشخصهٔ یک دستگاه تفاضلی مطرح کرده است.

تعریف ۴,۱. فرض کنید $f, g \in E$ و $g \neq 0$. همچنین فرض کنید i_1، i_2 و ... و i_l و k عناصر متمایزی از مجموعهٔ $\{1, 2, \dots, p\}$ باشند. در این صورت گوییم f ، $(<_k, <_{i_1}, \dots, <_{i_l})$- کاهش‌یافته نسبت به gاست، اگر $lm_k(g)$ هیچکدام از جمله‌های f را عاد نکند یا اگر $lm_k(g)$ جمله‌ای مانند τe_i از f را عاد کند، آن‌گاه حداقل یک i_v که $1 \le v \le l$، وجود داشته باشد که

$$ord_{i_v}\left(\frac{\tau e_i}{lm_k(g)} lm_{i_v}(g)\right) > ord_{i_v}\left(lm_{i_v}(f)\right).$$

اگر G یک زیرمجموعه از E و $f \in E$، آن‌گاه گوییم f نسبت به G، $(<_k, <_{i_1}, \dots, <_{i_l})$- کاهش‌یافته است، اگر نسبت به هر عضو G، $(<_k, <_{i_1}, \dots, <_{i_l})$- کاهش‌یافته باشد.

تذکر ۴,۲. واضح است که اگر f، $(<_k)$- کاهش‌یافته نسبت به G باشد، آن‌گاه $(<_k, <_{i_1}, \dots, <_{i_l})$- کاهش‌یافته نسبت به G است. عکس جمله بالا لزوماً برقرار نیست.

تعریف ۴,۳. فرض کنید $f, g, h \in E$ و $g \neq 0$. همچنین فرض کنید $lm_k(g)$ جمله‌ای از f مانند ω با ضریب c را بشمارد. اگر قرار دهیم $h = f - c\left(\frac{\omega}{lm_k(g)}(lc_k(g))\right)^{-1} \frac{\omega}{lm_k(g)} g$ به طوری‌که

$$ord_{i_v}\left(\frac{\omega}{lm_k(g)} lm_{i_v}(g)\right) \le ord_{i_v}\left(lm_{i_v}(f)\right) \qquad (1 \le v \le l),$$

گوییم f به پیمانهٔ g با ترتیب $(<_k, <_{i_1}, \dots, <_{i_l})$ در یک مرحله به h کاهش می‌یابد.

تعریف فوق به راحتی برای چند مرحله کاهش نیز قابل تعمیم است.

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.513]

در ادامه با در نظر گرفتن z_1 و... و z_{p-1} به عنوان $p-1$ نماد جدید، به بیان تعریف پایهٔ گربنر نسبت به چند ترتیب می‌پردازیم. فرض کنید Γ نیم‌گروه جابه‌جایی آزاد شامل همهٔ حاصل‌ضرب‌های توانی $\gamma = \alpha_1^{k_1} \dots \alpha_n^{k_n}\, z_1^{l_1} \dots z_{p-1}^{l_{p-1}}$ با توان‌های صحیح نامنفی باشد. بنابراین

$$\Gamma e = \{\gamma e_j | \gamma \in \Gamma, 1 \leq j \leq m\} = \Gamma \times \{e_1, \dots, e_m\}.$$

همچنین، فرض کنید برای هر عضو غیر صفر f از E، قرار دهید

$$d_i(f) = ord_i(lm_i(f)) - ord_i(lm_1(f)) \qquad (2 \leq i \leq p).$$

حال نگاشت $\rho: E \to \Gamma e$ به صورت $\rho(f) = z_1^{d_2(f)} \dots z_{p-1}^{d_p(f)}\, lm_1(f)$ تعریف می‌شود.

تعریف ۴،۴. [۱۶] فرض کنید N یک $\mathcal{D}$- زیر مدول از E باشد. یک زیرمجموعهٔ متناهی از اعضای غیرصفر N مانند $G = \{g_1, \dots, g_r\}$ را یک پایه‌ی گربنر نسبت به ترتیب $(<_1, \dots, <_p)$ برای N گوییم، هرگاه برای هر عضو غیر صفر $f \in N$، عضوی از G مانند g_i موجود باشد به‌طوری‌که در Γe، $\rho(g_i) | \rho(f)$.

در ادامه، با بررسی دقیق تعریف ۴. ۴. یک شرط لازم و کافی برای وجود پایهٔ گربنر یک مدول تفاضلی متناهی مولد نسبت به چند ترتیب را به‌دست می‌آوریم.

اگر $\rho(g_i) | \rho(f)$، آن‌گاه $z_1^{d_2(g_i)} \dots z_{p-1}^{d_p(g_i)}\, lm_1(g_i) | z_1^{d_2(f)} \dots z_{p-1}^{d_p(f)}\, lm_1(f)$. بنابراین به ازای هر عضو غیر صفر $f \in N$ عضوی از G مانند g_i وجود دارد به طوری که $lm_1(g_i) | lm_1(f)$ و به ازای هر $2 \leq j \leq p$، $d_j(g_i) \leq d_j(f)$. حال با قرار دادن $\theta = \frac{lm_1(f)}{lm_1(g_i)}$ می‌توان نتیجه گرفت، به ازای هر عضو غیر صفر $f \in N$ عضوی از G مانند g_i وجود دارد به طوری که $lm_1(g_i) | lm_1(f)$ و به ازای هر $2 \leq j \leq p$، $ord_j(\theta lm_j(g_i)) \leq ord_j\left(lm_j(f)\right)$.

پس، اعضای ناصفر زیرمدول N نسبت به مجموعهٔ G، $(<_1, \dots, <_p)$– کاهش‌یافته نیستند. با استفاده از مطالب فوق، لم زیر به راحتی ثابت می‌شود.

لم ۴،۵. فرض کنید $G = \{g_1, \dots, g_r\}$ یک زیرمجموعه از اعضای غیرصفر $\mathcal{D}$- زیرمدول N باشد. در این صورت G یک پایهٔ گربنر نسبت به ترتیب $(<_1, \dots, <_p)$ برای N است اگر و تنها اگر برای هر عضو غیر صفر $f \in N$، عضوی از G مانند g_i موجود باشد به طوری که $lm_1(g_i) | lm_1(f)$ و برای هر $j = 2, \dots, p$ داشته باشیم

$$ord_j\left(\frac{lm_1(f)}{lm_1(g_i)} lm_j(g_i)\right) \leq ord_j\left(lm_j(f)\right).$$

تعریف ۴،۶. [۱۶] فرض کنید f و g دو عضو غیر صفر از $\mathcal{D}$- مدول آزاد E و k عضو دلخواهی از مجموعهٔ $\{1, \dots, p\}$ باشند، در این صورت عبارت

$$S_k(f,g) = \left(\frac{lcm(lm_k(f), lm_k(g))}{lm_k(f)}\, lc_k(f)\right)^{-1} \frac{lcm(lm_k(f), lm_k(g))}{lm_k(f)}\, f$$

$$- \left(\frac{lcm(lm_k(f), lm_k(g))}{lm_k(g)}\, lc_k(g)\right)^{-1} \frac{lcm(lm_k(f), lm_k(g))}{lm_k(g)}\, g$$

را k-امین S- چندجمله‌ای f و g می‌نامیم.

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.513]

۵. قضیهٔ بوخبرگر و الگوریتم محاسبهٔ پایهٔ گربنر نسبت به چند ترتیب

در این بخش ابتدا برای هر عضو E نوعی نمایش نسبت به یک زیرمجموعه از E و نسبت به چند ترتیب معرفی کرده، سپس بر اساس این نوع نمایش به اثبات قضیهٔ بوخبرگر نسبت به چند ترتیب در مدول‌های تفاضلی می‌پردازیم. پس از آن الگوریتم محاسبهٔ پایهٔ گربنر نسبت به چند ترتیب را ارائه می‌دهیم. اجرای این الگوریتم و زیرالگوریتم‌های مربوط به آن در [۲۸] قابل مشاهده است.

تعریف ۵,۱. فرض کنید $P = \{p_1, \ldots, p_r\}$ یک زیرمجموعهٔ متناهی از E و f یک عضو غیرصفر از E باشد. یک $(<_k, <_{i_1}, \ldots, <_{i_l})$- نمایش برای f نسبت به P عبارتست از : $f = \sum_{i=1}^{r} c_i w_i p_i$ به طوری‌که

$$max_{<_k}\{lm_k(w_i p_i) | 1 \leq i \leq r\} = lm_k(f) \quad \text{و}$$
$$ord_j\left(lm_j(w_i p_i)\right) \leq ord_j\left(lm_j(f)\right) \qquad (j = i_1, \ldots, i_l).$$

که در آن $c_1, \ldots, c_k \in K$ و $w_1, \ldots, w_r \in T$.

در قضیهٔ زیر رابطهٔ بین نمایش مذکور و پایهٔ گربنر نسبت به چند ترتیب برای یک زیرمدول تفاضلی را بیان می‌کنیم.

قضیه ۵,۲. فرض کنید N یک $\mathcal{D}$- زیر مدول از E باشد. همچنین فرض کنید G یک زیرمجموعهٔ متناهی از اعضای غیرصفر N باشد. در این صورت G یک پایهٔ گربنر نسبت به $(<_k, <_{i_1}, \ldots, <_{i_l})$ برای N است اگر و تنها اگر، هر عضو N یک $(<_k, <_{i_1}, \ldots, <_{i_l})$- نمایش نسبت به G داشته باشد.

اثبات.($\Leftarrow$) اگر G یک پایه‌ی گربنر نسبت به ترتیب $(<_k, <_{i_1}, \ldots, <_{i_l})$ باشد، آن‌گاه طبق قضیهٔ ۳,۳,۱۰ [۱۶]، f با ترتیب $(<_k, <_{i_1}, \ldots, <_{i_l})$ به صفر کاهش می‌یابد. پس f یک $(<_k, <_{i_1}, \ldots, <_{i_l})$- نمایش دارد.

($\Rightarrow$) فرض کنید $G = \{g_1, \ldots, g_r\}$. همچنین فرض کنید $f \in N$ یک $(<_k, <_{i_1}, \ldots, <_{i_l})$- نمایش نسبت به G داشته باشد. طبق تعریف اگر حداقل یک $1 \leq i \leq r$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\rho(g_i) | \rho(f)$، قضیهٔ ثابت می‌شود. بدون کاستن از کلیت مسأله فرض کنید $max_{<_k}\{lm_k(w_i p_i) | 1 \leq i \leq r\} = w_1 g_1$. پس $lm_k(g_1) | lm_k(f)$. چون f دارای یک $(<_k, <_{i_1}, \ldots, <_{i_l})$- نمایش است، پس

$$ord_j\left(lm_j(g_1)\right) \leq ord_j\left(lm_j(f)\right) \qquad (j = i_1, \ldots, i_l).$$

حال از لم ۴,۵. نتیجه می‌گیریم $\rho(g_i) | \rho(f)$.■

در ادامه، به تعمیم قضیهٔ بوخبرگر در جبرهای تفاضلی به منظور دستیابی به پایهٔ گربنر یک مدول تفاضلی نسبت به چند ترتیب می‌پردازیم. این قضیه توسط لوین در[۱۶] ثابت شده است. در این مقاله اثباتی متفاوت مبتنی بر استقراء و نمایش نسبت به چند ترتیب، که معرفی کردیم، ارائه می‌دهیم. اگرچه در اثبات لوین، هم از استقراء و هم از نمایش نسبت به چند ترتیب به طور ضمنی استفاده شده است، ولی در آن برای دست یافتن به این نمایش، از گزارهٔ ۳,۳,۱۲ [۱۶] بهره برده شده است، که دارای سه فرض اساسی می‌باشد که فراهم‌کردن آنها در فرایند اثبات به پیچیدگی آن می‌افزاید.

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.513]

قضیه۵٫۳. فرض کنید $G = \{g_1, \dots, g_r\}$ یک پایهٔ گربنر نسبت به هر یک از ترتیب‌های $<_p$، $(<_{p-1}, <_p)$ و … و $(<_{k+1}, \dots, <_p)$ $(1 \leq k \leq p-1)$ برای $\mathcal{D}$- زیرمدول N باشد. همچنین فرض کنید به ازای هر $g_i, g_j \in G$ ، $S_k(g_i, g_j)$ نسبت به ترتیب $(<_k, <_{k+1}, \dots, <_p)$ و مجموعهٔ G به صفر کاهش یابد. در این صورت G یک پایهٔ گربنر نسبت به ترتیب $(<_k, <_{k+1}, \dots, <_p)$ برای N است.

اثبات. کافی است نشان دهیم هر $0 \neq f \in N$ دارای یک $(<_k, <_{k+1}, \dots, <_p)$- نمایش نسبت به G است. طبق فرض، برای هر $k < p$، G پایهٔ گربنر $\mathcal{D}$-زیرمدول N نسبت به ترتیب $(<_{k+1}, \dots, <_p)$ است. طبق قضیهٔ ۵ .۲. هر $0 \neq f \in N$ یک $(<_{k+1}, \dots, <_p)$- نمایش نسبت به G دارد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$f = \sum_{i=1}^{r} c_i w_i g_i \tag{۱}$$

به طوری که

$$max_{<_{k+1}}\{lm_{k+1}(w_i g_i) | 1 \leq i \leq r\} = lm_{k+1}(f) \tag{۲}$$

و به ازای $j = k+2, \dots, p$

$$ord_j\left(lm_j(w_i g_i)\right) \leq ord_j\left(lm_j(f)\right) \tag{۳}$$

و

که $c_i \in K$ ، $w_i \in T$.

حال با توجه به رابطهٔ (۲) داریم $ord_{k+1}\left(lm_{k+1}(w_i g_i)\right) \leq ord_{k+1}\left(lm_{k+1}(f)\right)$. بنابراین نامساوی (۳) به ازای $j = k+1, \dots, p$ برقرار است. پس شرط دوم برای داشتن یک $(<_k, <_{k+1}, \dots, <_p)$- نمایش نسبت به G به دست می‌آید. برای رسیدن به شرط اول، قرار دهید $s = max_{<_k}\{lm_k(w_i g_i) | 1 \leq i \leq r\}$. باید ثابت کنیم $s = lm_k(f)$. در ادامه، یک نمایش برای f نسبت به G به‌دست می‌آوریم که با مینیمال بودن s در تناقض است. فرض کنید $lm_k(f) < s$. فرض کنید s در بین همهٔ نمایش‌های f به شکل (۱) با شرایط (۲) و (۳) مینیمال باشد. همچنین فرض کنید، فرض خلف فرض کنید n_s تعداد اندیس‌های i باشد به طوری‌که $lm_k(w_i g_i) = s$. با استقراء روی n_s ادامه می‌دهیم. از آن‌جایی که s حذف می‌شود، پس $n_s > 1$. حال قرار دهید $n_s = 2$. بدون کاستن از کلیت مسأله، فرض کنید و $lm_k(w_1 g_1) = lm_k(w_2 g_2)$ پس $w_1 lm_k(g_1) = w_2 lm_k(g_2) = s$.

بنابراین

$$LCM(lm_k(g_1), lm_k(g_2)) | s$$

پس

$$s = u\, LCM(lm_k(g_1), lm_k(g_2))$$

که $u \in T$. چون $n_s = 2$ پس $c_1 lc_k(w_1 g_1) = -\, c_2 lc_k(w_2 g_2)$ که در آن $c_1, c_2 \in K$. حال، با در نظر گرفتن

$$a = c_1\left(w_1 lc_k(g_1)\right) = -c_2\left(w_2 lc_k(g_2)\right)$$

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.513]

به راحتی دیده می‌شود که

$$c_1(w_1g_1) + c_2(w_2g_2) = auS_k(g_1, g_2). \tag{۴}$$

طبق فرض $S_k(g_1, g_2)$ نسبت به ترتیب $(<_k, <_{k+1}, \dots, <_p)$ و مجموعهٔ G به صفر کاهش می‌یابد. پس می‌توان نوشت

$$S_k(g_1, g_2) = \sum_{i=1}^{r'} c'_i w'_i g'_i \tag{۵}$$

که در آن $lm_k(w'_i g'_i) \leq_k lm_k(S_k(g_1, g_2))$ و همچنین

(۶)

$$ord_l\big(lm_l(w'_i g'_i)\big) \leq ord_l\Big(lm_l\big(S_k(g_1, g_2)\big)\Big) \qquad (l = k+1, \dots, p).$$

حال با جایگذاری رابطهٔ (۴) در f و با توجه به رابطهٔ (۵) داریم:

$$f = \sum_{i=3}^{r} c_i w_i g_i + au \sum_{i=1}^{r'} c'_i w'_i g'_i\,.$$

واضح است که در مجموع اول بزرگترین جمله نسبت به $<_k$ از s کوچکتر است. همچنین در دومین مجموع داریم

(۷)

$$u\, max_{<_k}\{lm_k(w'_i g'_i) | 1 \leq i \leq r'\} \leq u\, lm_k(S_k(g_1, g_2)) < LCM\Big(\big(lm_k(g_1), lm_k(g_2)\big)\Big) = s.$$

در ادامه باید نشان دهیم به ازای $i = 1, \dots, r'$ و $j = k+1, \dots, p$ داریم

$$ord_j\Big(lm_j(u\, w'_i g'_i)\Big) \leq ord_j\Big(lm_j(f)\Big).$$

با توجه به نامساوی (۶) می‌توان نوشت

$$ord_j\Big(lm_j(u\, w'_i g'_i)\Big) \leq ord_j\Big(u\, lm_j\big(S_k(g_1, g_2)\big)\Big) \leq$$

$$\max\{ord_j(u\frac{LCM\big((lm_k(g_1), lm_k(g_2))\big)}{lm_k(g_1)}\, lm_j(g_1)), ord_j(u\frac{LCM\big((lm_k(g_1), lm_k(g_2))\big)}{lm_k(g_2)}\, lm_j(g_2))\}$$

بدون کاستن از کلیت مسأله، فرض کنید ماکسیمم فوق برابر عبارت

$$ord_j\left(u\frac{LCM\big((lm_k(g_1), lm_k(g_2))\big)}{lm_k(g_1)}\, lm_j(g_1)\right)$$

باشد. بنابراین داریم

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.513]

(۸)

$$ord_j\left(lm_j(u\, w_i' g_i')\right) \le ord_j\left(\frac{s}{lm_k(g_1)}\, lm_j(g_1)\right) = ord_j\left(w_1\ \ lm_j(g_1)\right) \le ord_j\left(lm_j(f)\right).$$

با توجه به نامساوی‌های (۷) و (۸)، قضیه در حالت $n_s = 2$ ثابت می‌شود.

حال فرض کنید $n_s > 2$ و برای $i = 1, \dots, n_s$ داشته باشیم $lm_k(w_i g_i) = s$. می‌توان f را به صورت

$$f = \sum_{i=1}^{r} c_i w_i g_i = c_1 w_1 g_1 - \frac{c_1 lc_k(w_1 g_1)}{c_2 lc_k(w_2 g_2)}\, c_2 w_2 g_2 + \left(\frac{c_1 lc_k(w_1 g_1)}{c_2 lc_k(w_2 g_2)} + 1\right) c_2 w_2 g_2 + \sum_{i=3}^{r} c_i w_i g_i$$

نوشت. به سادگی می‌توان فرض استقراء را برای دو جملهٔ اول به کار برد. در جملات بعدی نیز حداکثر $n_s - 1$ بار جملهٔ s ظاهر می‌شود. پس در این‌جا نیز می‌توان فرض استقراء را به‌کار گرفت. بنابراین حکم قضیه ثابت می‌شود.■

فرض کنید G یک زیرمجموعهٔ متناهی از اعضای غیرصفر یک مدول تفاضلی باشد. با استفاده از قضیهٔ بالا، می‌خواهیم الگوریتمی برای تولید یک پایهٔ گربنر از اعضای G نسبت به چند ترتیب ارائه دهیم. تا حد شناخت ما، این الگوریتم، تنها روش مبتنی بر پایهٔ گربنر برای محاسبهٔ چندجمله‌ای بعد تفاضلی چندمتغیره است.

در ادامهٔ مقاله، منظور از $G^{(k)}_{(i_1,\dots,i_l)}$، پایهٔ گربنر مجموعهٔ G است که در الگوریتم محاسبهٔ آن از k-امین S- چندجمله‌ای و از کاهش نسبت به ترتیب $(<_{i_1}, \dots, <_{i_l})$ استفاده شده است.

قضیه ۵. ۴. فرض کنید $G = \{g_1, \dots, g_r\}$ یک زیرمجموعهٔ متناهی از اعضای غیرصفر N باشد. مجموعه‌های $G(1)$، $G(2)$ و ... و $G(p)$ را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$G(1) = G^{(p)}_{(<_p)};\ G(2) = G(1)^{(p-1)}_{(<_{p-1}, <_p)}; \dots; G(p) = G(p-1)^{(1)}_{(<_1, \dots, <_p)}$$

دراین‌صورت $G(p)$ پایه‌ی گربنر نسبت به $(<_1, \dots, <_p)$ برای N است.

اثبات. این قضیه یک الگوریتم جهت محاسبه‌ی پایه‌ی گربنر $\mathcal{D}$- زیر مدول N نسبت به ترتیب $(<_1, \dots, <_p)$ فراهم می‌کند. برای این منظور الگوریتم (۱) را ارائه می‌دهیم.

اثبات درستی الگوریتم: فرض کنید $G = \{g_1, \dots, g_r\}$ یک مجموعهٔ دلخواه به عنوان ورودی الگوریتم باشد. در مرحلهٔ اول الگوریتم، یک پایه گربنر برای G نسبت به ترتیب $<_p$ به‌نام $G(1)$ به دست می‌آید. در مرحلهٔ دوم $G(1)$ وارد حلقهٔ while می‌شود. اولین گام در حلقهٔ while یک پایهٔ گربنر برای $G(1)$ نسبت به $(<_{p-1}, <_p)$ با استفاده از S_{p-1} به عنوان S- چندجمله‌ای، به‌نام $G(2)$، تولید می‌کند. از قضیه ۳،۵. نتیجه می‌شود $G(2)$ یک پایهٔ گربنر برای G نسبت به ترتیب $(<_{p-1}, <_p)$ است. در گام آخر با قرار دادن $i = |T| - 1$، چون تعداد ترتیب‌ها برابر تعداد افرازها است، داریم:

$$G^{(p-i)}_{T[i+1]} = G^{(1)}_{(<_1, \dots, <_p)} = G(p)$$

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.513]

با استدلالی مشابه گام‌های قبلی، می‌توان نشان داد $G(p)$ پایهٔ گربنر مطلوب است.

الگوریتم ۱ الگوریتم محاسبهٔ پایهٔ گربنر نسبت به $(<_1, \ldots, <_p)$

Input: $g_1, \ldots, g_r$; a list of elements of E,
T; a list of polyorders $(<_p)$; $(<_{p-1}, <_p)$; …; $(<_1, \ldots, <_p)$,
P; a partition of the basic set σ.

Output: A Grobner basis for the submodule generated by $g_1, \ldots, g_r$ with respect to $(<_1, \ldots, <_p)$.

```
G:= {g_1, ..., g_r}^{(p)}_{<_p} with partition P;
i:= 1;
while i ≤ (|T| − 1) do
    G:= G^{(p−i)}_{T[i+1]} with partition P;
    i:= i+1;
end do;
return(G);
```

پایان‌پذیری الگوریتم به دو عامل بستگی دارد. نخست به متناهی بودن $|T|$ و سپس به پایان‌پذیر بودن الگوریتم محاسبهٔ هر کدام از $G(1)$، $G(2)$ و ... و $G(p)$. متناهی‌بودن تعداد افرازهای مجموعهٔ پایهٔ σ، متناهی‌بودن $|T|$ را نتیجه می‌دهد. به راحتی می‌توان نشان داد، کاهش نسبت به چند ترتیب یک کاهش نوتری است. با توجه به این نکته و طبق قضیه ۲،۷، پایان‌پذیر بودن الگوریتم محاسبهٔ $G(1)$، $G(2)$،...،$G(p)$ نیز ثابت می‌شود.■

۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله، اثباتی برای تعمیم قضیهٔ بوخبرگر در جبرهای تفاضلی به منظور دستیابی به پایهٔ گربنر یک مدول تفاضلی نسبت به چند ترتیب، ارائه شده است. برای رسیدن به این مهم، به معرفی یک نوع نمایش برای هر عضو از یک مدول تفاضلی متناهی مولد پرداخته‌ایم. سپس الگوریتم محاسبهٔ این پایهٔ گربنر را نیز بیان کرده‌ایم. اجرای این الگوریتم در نرم‌افزار میپل را می‌توان در [۲۸] یافت. آن‌چه که می‌توان در آینده بررسی کرد، ارائهٔ محک‌هایی جهت بهبود کارایی الگوریتم است. شبیه‌سازی محک‌های بوخبرگر برای این الگوریتم را می‌توان به‌عنوان اولین گام برای بهبود این الگوریتم بررسی کرد.

References

1. Buchberger B., “On finding a vector space basis of the residue class ring modulo a zero dimensional polynomial ideal (in German)”, PhD Thesis, Universitate Innsbruck, Innsbruck (1965).

2. Cohn R.M., “Difference Algebra”, In: Tracts in Mathematics, vol. **17**, Interscience, New York (1965).

3. Cox D., Little J., OShea D., “Ideals, Varieties and Algorithms. An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra”, 3rd edition, Springer, New York (2007).

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.513]

4. Dönch C., “Standard Bases in Finitely Generated Difference-Skew-Differential Modules and Their Application to Dimension Polynomials”, PhD thesis, Johannes Kepler University Linz, Research Institute for Symbolic Computation (RISC) (2012).
5. Dönch C., Winkler F., “Bivariate difference-differential dimension polynomials and their computation in Maple”, 8 th International Conference on Applied Informatics Eger, Hungary, January 27–30(2010).
6. Dzhavadov G.A., “Characteristic Hilbert polynomials for differential-difference modules”, VINITI, no. 1992–79 (1979) (in Russian).
7. Einstein A., “The Meaning of Relativity. Appendix II (Generalization of Gravitation Theory)”, 4th ed. Princeton, (1953) 133–165.
8. Gerdt V. P., “Groebner bases in perturbative calculations”, Nucl. Phys. 135 (Proc. Suppl.) 232 (2004).
9. Gerdt V.P., Robertz D., “Computation of Difference Grobner Bases”, Computer Science Journal of Moldova, vol.20, no.2(59) (2012).
۱۰. Johnson J., “Kahler differentials and differential algebra in arbitrary characteristic”, Trans. Amer. Math. Soc. 192, (1974)201–208.
11. Johnson J., Sit W., “On the differential transcendence polynomials of finitely generated differential field extensions”, Amer. J. Math. 101 (6) (1978) 1249–1263.
12. Kolchin E. R., “Differential Algebra and Algebraic Groups”, Academic Press, NewYork –London (1973).
13. Kolchin E. R., “The notion of dimension in the theory of algebraic difierential equations”, Bull. Am. Math. Soc.,70 (1964) 570-573.
14. Levin A. B., “Computation of the Strength of Systems of Difference Equations via Generalized Grobner Bases”, Grobner Bases in Symbolic Analysis, Walter de Gruyter, Berlin, (2007) 43-74.
15. Levin A. B., “Characteristic polynomials of filtered difference modules and of difference fleld extensions”, Russ. Math. Surv., 33 (1978) 165-166.
16. Levin A. B., “Difference Algebra”, Springer (2008).
17. Levin A. B., “Grobner bases with respect to several orderings and multivariable dimension polynomials”, Journal of Symbolic Computation ,42 (2007) 561–578.

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.513]

18. Levin A. B., “Difference dimension quasi-polynomials”, Advances in Applied Mathematics ,89 (2017) 1–17.

19. Levin A. B., “Multivariable Difference Dimension Polynomials”, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 131, No. 6 (2005).

20.Levin A. B., Fürst C., “Relative Reduction and Buchberger’s Algorithm in Filtered Free Modules”, Math.Comput.Sci., DOI: 10.1007/s11786-017-0317-1, (2017).

21. Martin, B., Levandovskyy V., “Symbolic Approach to Generation and Analysis of Finite Difierence Schemes of Partial Difierential Equations”, In: U. Langer, P. Paule (Eds.) Numerical and Symbolic Scientiflc Computing: Progress and Prospects, Springer, Wien, (2012) 123-156.

22. Mikhalev A. V., Levin A. B., Pankratiev E. V., Kondratieva M. V., “Differential and Difference Dimension Polynomials”, Mathematics and Its Applications, Kluwer, Dordrecht (1999).

23. Mikhalev A. V., PankratevKahler E. V. “Computer Algebra, Computations in Differential and Difference Algebra”, Moscow: Moscow State Univ Press (1989).

24. Mikhalev A.V., Pankratev E.V., “Differential dimension polynomial of a system of differential equations”, In: Algebra, Moscow State Univ. Press, Moscow, (1980) 57–67. Collection of papers (in Russian).

25. Ritt J. F., “Differential Algebra”, Dover Publications Inc., New York (1950).

26. Ritt J. F., “Differential equations from the algebraic standpoint”, volume **14** of American Mathematical Society Colloquium Publications, AMS., New York (1932).

27. Scala R.L., “Grobner bases and gradings for partial difference ideals”, Mathematics of computation, Vol. 84, No. 292 (2015) 959–985.

28. http://faculty.du.ac.ir/rahmani/wp-content/uploads/sites/71/2018/11/DiffGrob.txt.

29. Zhou M., Winkler F., “Computing difference-differential dimension polynomials by relative Grobner bases in difference-differential modules”, Journal of Symbolic Computation, no. 43 (2008) 726–745.

30. Zhou M., Winkler F., “Grobner bases in difference-differential modules and difference-differential dimension polynomials”, Science in China, Ser. A, Mathematics, 51/9 (2008) 1732-1752.

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.513]