Kharazmi University

Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Modified signed log-likelihood ratio test for the coefficient of variation of an inverse Gaussian population

Mohammad Reza Kazemi

Department of Statistics, Faculty of Science, Fasa University, Fasa, Iran.

E-mail: kazemi@fasau.ac.ir

Article Info	ABSTRACT

Article type:

Research Article

Article history:

Received:
1 June 2019
Revised form:
3 August 2020
Accepted:
9 August 2020
Published online:
14 May 2022

Keywords:

Coefficient of ariation;
Inverse Gaussian population;
Modified signed log-likelihood ratio method;
Maximum likelihood estimation.

Introduction

In many applications, such as demography, management science, hydrology, finance, modeling physical phenomena, etc., the data is often positive and skewed to the right. In the last four decades, the inverse Gaussian distribution (IG) has attracted a lot of attention. The inference about IG distribution is also rapidly increasing because IG distribution is an ideal candidate for modeling and analyzing positive and right skewed data. It can be said that the role of IG distribution in skewed data is the same as the role of normal distribution in symmetric data. One of the most important parameters of an IG distribution is known as coefficient of variation. It is known that this parameter does not depend on the unit of measurements. So, we can use it in measuring the consistency of results from different experiments with the same feature. the importance of the coefficient of variation parameter was first stated by Professor Neyman. After that, some researchers were interested in studying this parameter in the IG family of distributions. The likelihood ratio test (LRT) was applied for this parameter in the one-sided hypothesis testing. Also, for a special case of one-sided hypothesis testing for this parameter, a uniformly most powerful invariant test (UMPI) was presented. In our best of knowledge, there are not any efficient method for the problem of two-sided hypothesis testing about the coefficient of variation of an inverse Gaussian distribution. In this paper, we use the modified version of signed log-likelihood ratio (SLR) method known as modified signed log-likelihood ratio (MSLR) to handle this issue. MSLR method has received considerable attention in dealing with various

statistical inference problems because of its high accuracy in estimating the unknown parameter against the traditional methods.

Material and methods

In this paper, different methods of statistical hypothesis testing for the coefficient of variation parameter of an IG population are considered. These methods include the SLR test, MSLR test, and a test based on the asymptotic distribution of maximum likelihood estimators of the model parameters. All necessary formulas for obtaining MSLR statistic such as observed information matrix, nuisance information matrix, vector of pivotal quantities, and the vector of likelihood gradient are provided.

Results and discussion

The performances of MSLR method are compared with classical approaches, in terms of empirical type-I error rate and empirical test power. Simulation results show that the empirical type-I error rates of MSLR are close to the nominal type-I error rate, even for small sample sizes whereas the traditional approaches are reliable only for large sample sizes. Comparing the empirical power sizes shows that the power of MSLR method is superior to other considered methods in some settings, by regarding that the competing approaches cannot perform well in controlling the type-I error probability, because their empirical type-I error rates are far from the nominal type-I error rate.

Conclusion

In this paper, based on a modification of the traditional likelihood ratio method, a new test statistic called the modified signed log-likelihood ratio (MSLR) was presented to test the hypothesis about the coefficient of variation of an inverted Gaussian population. As observed, the new method even for small sample sizes has a type-I error rate close to the nominal error rate and in this regard, it controls the type-I error level well for the case of two-sided hypothesis testing. Also, it was observed that this method has an acceptable test power and in some situations its test power is equal to the power of competing methods. However, competing methods did not perform well in controlling the level of type-I error. It is therefore recommended that researchers use the MSLR method in practical works.

How to cite: Kazemi, M., (2022) Modified signed log-likelihood ratio test for the coefficient of variation of an inverse Gaussian population. *Mathematical Researches*, 8 (1), 88-103

 Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

دانشگاه خوارزمی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

آزمون نسبت درست‌نمایی علامت‌دار تعدیل‌یافته برای ضریب تغییرات یک جامعه گاوسی وارون

محمدرضا کاظمی ✉

نویسندهٔ مسئول، گروه آمار، دانشکده علوم، دانشگاه فسا، فسا، ایران. پست الکترونیکی: kazemi@fasau.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۳/۱۱
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۵/۱۳
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۵/۱۹
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۲/۲۴

واژه‌های کلیدی:
ضریب تغییرات،
جامعه گاوسی وارون،
روش نسبت درست‌نمایی
علامت‌دار تعدیل‌یافته،
برآورد ماکسیمم درست‌نمایی.

در این مقاله مسأله آزمون فرض‌های آماری دوطرفه برای پارامتر ضریب تغییرات از یک جامعهٔ گاوسی وارون، مورد بررسی می‌گیرد. روشی که در این‌جا استفاده می‌شود، روش نسبت درست‌نمایی علامت‌دار تعدیل‌یافته (MSLR) است که یک نسخه بهبود یافته از روش نسبت درست‌نمایی علامت‌دار کلاسیک می‌باشد. پژوهش‌های انجام گرفته نشان دهنده آن است که دقت این روش از مرتبه سوم است و این در حالی است که دقت روش کلاسیک از مرتبه یک می‌باشد. در حقیقت این گونه روش‌ها بر پایه تابع درست‌نمایی از مرتبه دقت بالاتر هستند. به علت این دقت بالا، این مقاله بر آن است که از این روش برای استنباط در مورد پارامتر ضریب تغییرات از یک جامعه گاوسی وارون استفاده نماید. فرمول‌ها و محاسبات لازم برای بدست آوردن آماره آزمون MSLR ارائه شده است. از نظر عددی، عملکرد روش MSLR در مقابل روش‌های کلاسیک از لحاظ نرخ خطای نوع اول تجربی و اندازه توان تجربی مورد مقایسه قرار گرفته است. نتایج مطالعات شبیه‌سازی نشان می‌دهند که نرخ خطای نوع اول تجربی روش MSLR حتی برای اندازه نمونه‌های کوچک هم به نرخ خطای نوع اول اسمی نزدیک می‌باشد در حالی که روش‌های کلاسیک تنها برای اندازه نمونه‌های بزرگ قابل اعتماد هستند. مقایسه توان‌های تجربی هم نشان می‌دهد که در بعضی از وضعیت‌ها، اندازه توان روش مذکور از سایر روش‌ها بهتر است، با توجه به این که روش‌های رقیب در کنترل خطای نوع اول عملکرد مناسبی ندارند به این معنی که نرخ خطای نوع اول آنها از نرخ خطای نوع اول اسمی دور است. در نهایت، محاسبات مربوط به تمام روش‌ها در یک مثال واقعی فراهم شده و سپس مقاله نتیجه‌گیری می‌شود.

استناد: کاظمی، محمدرضا؛ (۱۴۰۱). آزمون نسبت درستنمایی علامت‌دار تعدیل‌یافته برای ضریب تغییرات یک جامعه گاوسی وارون. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۱)، ۱۰۳-۸۸.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱. مقدمه

در بسیاری از زمینه‌های کاربردی، مانند جمعیت‌شناسی، علم مدیریت، هیدرولوژی، امور مالی، مدل‌بندی پدیده‌های فیزیکی و غیره، داده‌ها غالباً مثبت و چوله به راست هستند. در چهار دهه گذشته، توزیع گاوسی وارون (IG) توجه بسیاری را به خود جلب کرده است. استنتاج مربوط به توزیع IG نیز به سرعت افزایش یافته است زیرا توزیع IG یک کاندید ایده‌آل برای مدل سازی، تجزیه و تحلیل داده های مثبت و چوله به راست است. به عنوان مثال، [۱]، [۲] و [۳] برای توصیف مدت زمان چرخه ذرات موجود در خون، [۴] در توصیف داده های مدت زمان اعصاب و [۵] برای مدل‌بندی طول مدت زمان بستری در بیمارستان از توزیع IG استفاده نمودند. در واقع می‌توان گفت نقش توزیع IG در داده‌های چوله به راست مانند نقش توزیع نرمال در داده‌های متقارن است. اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی زیر باشد:

$$f(x;\mu,\lambda)=\left(\frac{\lambda}{2\pi x^3}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\right),\qquad x>0,\mu>0,\lambda>0 \tag{۱}$$

آن‌گاه گویند X دارای توزیع گاوسی وارون دو پارامتری است و آن را با نماد $X\sim \mathrm{IG}(\mu,\lambda)$ نمایش می‌دهند جایی که μ و λ به ترتیب پارامترهای میانگین و مقیاس هستند. در اصل این توزیع توسط [۶] در فرایندهای وینر (Weiner process) به عنوان زمان نخستین گذر (First passage time) مطرح شده است. بسیاری از خواص مهم آماری توزیع IG توسط [۷] و [۸] اثبات شده‌اند. برای بررسی گسترده و کاربردهای خانواده IG و سایر نتایج مرتبط، پژوهش‌گر می‌تواند به متون نوشته شده در این زمینه توسط [۹] و [۱۰] مراجعه نماید.

یکی از پارامترهای مهم دیگر توزیع IG پارامتر ضریب تغییرات آن است که به صورت $\rho=\sqrt{\mu/\lambda}$ تعریف می‌شود. مسائل استنباط مربوط به ρ را می‌توان بطور معادل بر حسب پارامتر $\vartheta=\mu/\lambda$ در نظر گرفت. با استفاده از پارامتر ϑ می‌توان در مورد شاخص‌های دیگری مانند ضریب چولگی $SK=3\sqrt{\vartheta}$ و ضریب برجستگی $K=3+15\vartheta$ نیز استنباط انجام داد. اطلاع از ضریب تغییرات، برآوردگرهای بهبود یافته را برای میانگین فراهم می‌آورد؛ مقالات منتشر شده توسط [۱۱]، [۱۲] و [۱۳] را ملاحظه نمائید. چنانچه مشاهده می‌گردد پارامتر ϑ به واحد اندازه‌گیری بستگی ندارد؛ بنابراین از آن می‌توان جهت ارزیابی سازگاری نتایج حاصل از آزمایش‌های مختلف که شامل ویژگی‌های یکسان هستند، استفاده نمود. با رجوع به پژوهش [۱۴] می‌توان دریافت نمود که از لحاظ تاریخی اهمیت پارامتر ضریب تغییرات ابتدا توسط پروفسور نیمن بیان شده است. همچنین کاربرد توزیع IG از نقطه نظر قابلیت اعتماد، ابتدا از پژوهش‌های [۱۵] شروع شده است. استنباط برای پارامتر ضریب تغییرات (یا معادل آن پارامتر ϑ) توزیع IG ابتدا توسط [۱۶] بر پایه یک سری تقریب‌ها انجام گرفت. [۱۷] با استفاده از آزمون نسبت درستنمایی این مسئله را دنبال نمود. همچنین برای یک حالت خاص از آزمون فرض‌های یک‌طرفه برای پارامتر ϑ، [۱۸] یک آزمون بطور یکنواخت پرتوان پایا (UMPI) ارائه کردند. تاکنون هیچ روش مناسبی برای آزمون فرض‌های دوطرفه آماری برای پارامتر ϑ ارائه نگردیده است. این مقاله با استفاده از روش نسبت درستنمایی علامت‌دار تعدیل‌یافته (MSLR) به استنباط در مورد این پارامتر برای آزمون فرض‌های دوطرفه می‌پردازد. این روش در واقع تعمیمی از روش کلاسیک نسبت درستنمایی علامت‌دار است (SLR) و دقت آن از مرتبهٔ $O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)$ است. [۱۹] در مقاله خود، پیشرفت‌ها و کاربردهای این روش را مورد مطالعه قرار داد.

این روش در خیلی از مسائل عملی و کاربردی دیگر مورد استفاده قرار گرفته است که همگی نتایج رضایت‌بخشی داشته‌اند. [۲۰] با استفاده از این روش، استنباط در مورد پارامتر میانگین یک جامعه لاگ-نرمال را در نظر گرفتند.[۲۱] جهت

یافتن فاصله اطمینان برای پارامترهای توزیع برن‌بام-سندرز از روش MSLR استفاده نمودند. به عنوان نمونه‌های دیگر از کاربردهای این روش می‌توان به پژوهش‌های [۲۲] برای استنباط در مورد نسبت میانگین‌های دو جامعه گاوسی وارون و [۲۳] جهت تشکیل فاصله اطمینان برای پارامتر ضریب همبستگی یک جامعه نرمال دو متغیره اشاره نمود. این مقاله قصد دارد از روش MSLR به علت دقت بالای آن، برای استنباط در مورد پارامتر ضریب تغییرات یک جامعه IG استفاده نماید. بر این اساس مقاله به صورت زیر تنظیم شده است: در بخش ۲، خواص و ویژگی‌های توزیع IG و نحوه کارکرد آزمون MSLR به طور اجمالی مرور می‌شود. در بخش ۳، روش MSLR جهت استنباط پارامتر ضریب تغییرات از یک جامعه گاوسی وارون مورد مطالعه قرار می‌گیرد و اجزای لازم برای بدست آوردن آماره آزمون مورد نظر ارائه می‌شود. همچنین در این بخش یک آزمون بر پایه توزیع مجانبی برآوردگر ماکسیمم درستنمایی برای پارامتر ϑ بدست آورده می‌شود. در بخش ۴، با استفاده از مطالعات شبیه‌سازی عملکرد روش پیشنهادی در مقایسه با روش‌های بیان‌شده دیگر مورد بررسی قرار می‌گیرد. یک مثال واقعی در بخش ۵ ارائه می‌شود و در نهایت مقاله نتیجه گیری خواهد شد.

۲. مروری بر ویژگی‌های توریع IG و کارکرد روش MSLR

این بخش شامل دو زیربخش است. در زیربخش اول برخی خواص و ویژگی‌های توزیع IG که این مقاله از آنها استفاده می‌کند، مرور می‌شود و در زیربخش دوم آزمون MSLR به صورت عمومی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲-۱ خواص و ویژگی‌های توزیع IG

برای یک نمونهٔ تصادفی n تایی $X_1, X_2, \dots, X_n$ از توزیع $\mathrm{IG}(\mu,\lambda)$ می‌توان نشان داد که آماره بسنده مینیمال برای (μ,λ) به صورت $\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} 1/X_i\right)$ می‌باشد و همچنین می‌توان نشان داد که آماره‌های $\bar{X}=\sum_{i=1}^{n} X_i/n$ و $V=\sum_{i=1}^{n}(1/X_i-1/\bar{X})$ از هم مستقل هستند به طوریکه $\bar{X}$ و λV هر یک به ترتیب دارای توزیع‌های گاوسی وارون $\mathrm{IG}(\mu, n\lambda)$ و خی‌دو $\chi^2_{(n-1)}$ می‌باشند. معرفی آماره‌های $\bar{X}$ و V از این لحاظ اهمیت دارد که از آنها در به دست آوردن برآوردهای ماکسیمم درستنمایی و استنباط آماری پارامترهای توزیع IG استفاده می‌شود. همچنین برای هرکدام از X_i می‌توان نوشت:

$$\frac{\lambda(X_i-\mu)^2}{\mu^2 X_i} \sim \chi^2_{(1)}, i=1,2,\dots,n. \qquad (۲)$$

در واقع فرمول شمارهٔ (۲) یک کمیت محوری ارائه می‌دهد که از آن در بخش‌های بعدی استفاده خواهد شد. برای اطلاعات بیشتر به [۹] و [۱۰] رجوع شود.

۲-۲ مروری بر آزمون MSLR

فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی از یک توزیع دلخواه باشد و $\ell(\boldsymbol{\theta})$ لگاریتم تابع درستنمایی آن باشد به طوری که پارامتر p بعدی $\boldsymbol{\theta}$ به صورت $\boldsymbol{\theta}=(\tau,\boldsymbol{\eta})$ باشد جایی که τ پارامتر موردنظر با بعد یک باشد. آماره آزمون SLR برای آزمون فرض دوطرفه $H_0: \tau=\tau_0$ در مقابل فرض مقابل $H_1: \tau \neq \tau_0$ عبارت است از:

$$r(\tau_0) = \sqrt{2}\mathrm{sgn}(\hat{\tau} - \tau_0)\left(\ell(\hat{\tau}, \widehat{\boldsymbol{\eta}}) - \ell\left(\tau_0, \widehat{\boldsymbol{\eta}}_{\tau_0}\right)\right)^{1/2}, \quad (۳)$$

که در آن تابع $\mathrm{sgn}(.)$ همان تابع علامت است. در رابطهٔ (۳)، $(\hat{\tau}, \widehat{\boldsymbol{\eta}})$ برآورد ماکسیمم درستنمایی (MLE) برای $(\tau, \boldsymbol{\eta})$ و $\widehat{\boldsymbol{\eta}}_{\tau_0}$ برآورد ماکسیمم درستنمایی محدود شده (CMLE) پارامتر $\boldsymbol{\eta}$ برای τ_0 داده‌شده، می‌باشند. [۲۴] نشان دادند که $r(\tau_0)$ دارای توزیع مجانبی نرمال استاندارد با دقت تقریبی مرتبه اول $O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$ است. بنابراین ناحیه بحرانی در سطح خطای نوع اول α برای آزمون فرض دوطرفه $H_0: \tau = \tau_0$ در مقابل فرض مقابل، عبارت است از:

$$|r(\tau_0)| > Z_{\alpha/2},$$

به طوری که Z_α چندک $100(1-\alpha)\%$ توزیع نرمال استاندارد است و p- مقدار متناظر با آن به صورت زیر است:

$$\text{مقدار} - \mathrm{p} = 2\min\{P\big(Z > r(\tau_0)\big), P\big(Z < r(\tau_0)\big)\}. \quad (۴)$$

[۲۵] نشان دادند که برای اندازهٔ نمونه‌های کوچک، این تقریب با دقت مرتبهٔ اول، قادر به کنترل سطح خطای نوع اول نمی‌باشد، بدین معنی که نرخ خطای نوع اول تجربی آن به نرخ خطای نوع اول اسمی نزدیک نمی‌باشد و تنها برای اندازهٔ نمونه‌های بزرگ قابل اعتماد است. راه‌های متعددی برای بهبود دقت این تقریب با اصلاح نمودن آماره آزمون SLR ارائه شده‌اند که به عنوان نمونه می‌توان به نتایج پژوهش‌ها در مقاله‌های [۲۶] و [۲۷]، [۲۸] و [۲۹] اشاره کرد. در این‌جا از روش ارائه شده توسط [۲۹] استفاده می‌شود. آماره آزمون MSLR توسط [۲۹] به صورت زیر است:

$$r^*(\tau_0) = r(\tau_0) - \frac{1}{r(\tau_0)}\log\left(\frac{r(\tau_0)}{Q(\tau_0)}\right), \quad (۵)$$

که در آن تابع $Q(\tau)$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$Q(\tau) = \frac{\left|\ell_{;\boldsymbol{T}}(\hat{\tau}, \widehat{\boldsymbol{\eta}}) - \ell_{;\boldsymbol{T}}\left(\tau, \widehat{\boldsymbol{\eta}}_\tau\right) \quad \ell_{\boldsymbol{\eta};\boldsymbol{T}}\left(\tau, \widehat{\boldsymbol{\eta}}_\tau\right)\right|}{\left|\ell_{(\boldsymbol{\eta},\tau);\boldsymbol{T}}(\hat{\tau}, \widehat{\boldsymbol{\eta}})\right|}\left\{\frac{|j(\hat{\tau}, \widehat{\boldsymbol{\eta}})|}{j_{\boldsymbol{\eta}}\left(\tau, \widehat{\boldsymbol{\eta}}_\tau\right)}\right\}^{1/2}, \quad (۶)$$

جایی‌که $j(\hat{\tau}, \widehat{\boldsymbol{\eta}})$ همان ماتریس اطلاع فیشر مشاهده شده، $j_{\boldsymbol{\eta}}\left(\tau, \widehat{\boldsymbol{\eta}}_\tau\right)$ اطلاع فیشر مشاهده شده برای پارامتر مزاحم $\boldsymbol{\eta}$ و $\ell_{;\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{\theta})$ گرادیان درستنمایی هستند و ماتریس $\boldsymbol{T}$ عبارت است از:

$$\boldsymbol{T} = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{X}}\right)^{-1}\left(\frac{\partial \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right)\Bigg|_{\boldsymbol{\theta}=\widehat{\boldsymbol{\theta}}}, \quad (۷)$$

که در آن $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\theta}) = \left(R_{11}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\theta}),\dots,R_{k,n_k}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\theta})\right)$ بردار کمیت‌های محوری می‌باشد. همچنین کمیت‌های $\ell_{(\boldsymbol{\eta},\tau);\boldsymbol{T}}(\hat{\theta})$ و $\ell_{\boldsymbol{\eta};\boldsymbol{T}}(\tau,\widehat{\boldsymbol{\eta}}_\tau)$ به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\ell_{(\boldsymbol{\eta},\tau);\boldsymbol{T}}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) = \left.\frac{\partial \ell_{;\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{\theta})}{\partial(\boldsymbol{\eta},\tau)}\right|_{\boldsymbol{\theta}=\widehat{\boldsymbol{\theta}}} \quad \text{و} \quad \ell_{\boldsymbol{\eta};\boldsymbol{T}}(\tau,\widehat{\boldsymbol{\eta}}_\tau) = \left.\frac{\partial \ell_{;\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\eta}}\right|_{\boldsymbol{\theta}=(\tau,\widehat{\boldsymbol{\eta}}_\tau)}. \tag{۸}$$

بنابراین ناحیهٔ بحرانی در سطح خطای نوع اول α برای آزمون فرض دوطرفه $H_0\colon \tau=\tau_0$ در مقابل فرض مقابل، عبارت است از $|r^*(\tau_0)| > Z_{\alpha/2}$ و p- مقدار متناظر با آن به صورت زیر است:

$$\text{مقدار} - \mathrm{p} = 2\min\{P(Z > r^*(\tau_0)), P(Z < r^*(\tau_0))\}. \tag{۹}$$

لازم به ذکر است که [۲۶] و [۲۷] نشان دادند که دقت آزمون $r^*(\tau_0)$ حتی برای اندازهٔ نمونه‌های کوچک هم از مرتبهٔ $O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)$ است؛ به عبارت دیگر دقت این روش از مرتبه سوم است در مقابل اینکه دقت آزمون مبتنی بر $r(\tau_0)$ از مرتبهٔ اول است.

۳ استنباط در مورد پارامتر ϑ

در این بخش روش‌های مختلف آزمون فرض‌های آماری برای پارامتر ضریب تغییرات ϑ از یک جامعه IG در نظر گرفته می‌شود. این روش‌ها عبارتند از: آزمون SLR، آزمون MSLR و یک آزمون بر پایه توزیع مجانبی برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی. برای محاسبات مربوط به آزمون‌های SLR و MSLR از فرمولهای مربوط به زیربخش ۲-۲ استفاده شده است.

۳-۱ روش MSLR برای پارامتر ϑ

فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $\mathrm{IG}(\mu,\lambda)$ است. در این قسمت آزمون فرض دوطرفه زیر برای پارامتر $\vartheta=\frac{\mu}{\lambda}$ در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{cases} H_0\colon & \vartheta=\vartheta_0 \\ H_1\colon & \vartheta\neq\vartheta_0 \end{cases} \tag{۱۰}$$

که در آن ϑ_0 مقداری است که از قبل تعیین شده است.

لگاریتم تابع درستنمایی برای کل مشاهدات به صورت زیر است:

$$\ell(\vartheta,\lambda) = -\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n}\log x_i + \frac{n}{2}\log\lambda - \frac{n\bar{x}}{2\vartheta^2\lambda} - \frac{n\lambda\bar{t}}{2} + \frac{n}{\vartheta}, \tag{۱۱}$$

جایی‌که $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ و $\bar{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$ می‌باشند. با تعریف $V = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i} - \frac{1}{\bar{X}}\right)$ برآوردهای MLE پارامترهای ϑ و λ به صورت زیر هستند:

$$\hat{\vartheta} = \frac{\bar{X}V}{n}, \quad \hat{\lambda} = \frac{n}{V} \tag{۱۲}$$

برای یک مقدار ثابت از ϑ برآورد MLE محدود شده λ عبارت است از

$$\hat{\lambda}_{\vartheta} = \frac{\vartheta^2 + \sqrt{\vartheta + 4\bar{X}\bar{T}}}{2\vartheta\bar{T}}. \tag{۱۳}$$

آماره‌های آزمون SLR و MSLR برای آزمون فرض (۱۰) عبارت‌اند از:

$$r(\vartheta_0) = \sqrt{2}\operatorname{sgn}(\hat{\vartheta} - \vartheta_0)\left(\ell(\hat{\vartheta}, \hat{\lambda}) - \ell(\vartheta_0, \hat{\lambda}_{\vartheta})\right)^{1/2}, \tag{۱۴}$$

$$r^*(\vartheta_0) = r(\vartheta_0) - \frac{1}{r(\vartheta_0)}\log\left(\frac{r(\vartheta_0)}{Q(\vartheta_0)}\right), \tag{۱۵}$$

که در رابطهٔ بالا تابع $Q(\vartheta)$ با استفاده از فرمول (۶) در زیربخش ۲-۲، از طریق رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$Q(\vartheta) = \frac{\left|\ell_{;\boldsymbol{T}}(\hat{\vartheta}, \hat{\lambda}) - \ell_{;\boldsymbol{T}}(\vartheta, \hat{\lambda}_{\vartheta}) \quad \ell_{\lambda;\boldsymbol{T}}(\vartheta, \hat{\lambda}_{\vartheta})\right|}{\left|\ell_{(\lambda,\vartheta);\boldsymbol{T}}(\hat{\vartheta}, \hat{\lambda})\right|}\left\{\frac{\left|j(\hat{\vartheta}, \hat{\lambda})\right|}{j_{\lambda}(\vartheta, \hat{\lambda}_{\vartheta})}\right\}^{1/2}. \tag{۱۶}$$

با کمک از رابطهٔ (۲)، بردار کمیت‌های محوری $R(\boldsymbol{x}; \vartheta, \lambda) = (R_1, R_2, \dots, R_n)$ را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$R_i = \frac{(x_i - \vartheta\lambda)^2}{\vartheta^2\lambda x_i}.$$

ماتریس $\boldsymbol{T}$ نیز از طریق رابطهٔ (۷)، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\boldsymbol{T} = -\left(\frac{\partial R(\boldsymbol{x}; \vartheta, \lambda)}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^{-1}\frac{\partial R(\boldsymbol{x}; \vartheta, \lambda)}{\partial(\lambda, \vartheta)}\Bigg|_{(\vartheta,\lambda)=(\hat{\vartheta},\hat{\lambda})},$$

که با استفاده از رابطهٔ بالا خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \frac{\nu x_1}{n} & \frac{2nx_1^2}{\bar{x}\nu(x_1 + \bar{x})} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\nu x_n}{n} & \frac{2nx_n^2}{\bar{x}\nu(x_n + \bar{x})} \end{bmatrix}.$$

همچنین بردار مشتق لگاریتم تابع درستنمایی نسبت به مشاهدات برابر است با

$$\frac{\partial \ell(\vartheta,\lambda)}{\partial \boldsymbol{x}}=\left(\frac{\lambda}{2x_1^2}-\frac{1}{2\vartheta^2\lambda}-\frac{3}{2x_1},\dots,\frac{\lambda}{2x_n^2}-\frac{1}{2\vartheta^2\lambda}-\frac{3}{2x_n}\right)',$$

و از روی آن کمیت گرادیان درستنمایی $\ell_{;\boldsymbol{T}}(\vartheta,\lambda)$ عبارت است از

$$\ell_{;\boldsymbol{T}}(\vartheta,\lambda)=\boldsymbol{T}'\frac{\partial \ell(\vartheta,\lambda)}{\partial \boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}\frac{\lambda\nu\bar{t}}{2}-\frac{\nu\bar{x}}{2\vartheta^2\lambda}-\frac{3\nu}{2}\\ \frac{n\lambda}{\bar{x}\nu}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i+\bar{x}}-\frac{n}{\vartheta^2\lambda\bar{x}\nu}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{x_i+\bar{x}}-\frac{3n}{2\bar{x}\nu}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_i+\bar{x}}\end{bmatrix}.$$

به وسیلهٔ $\ell_{;\boldsymbol{T}}(\vartheta,\lambda)$ می‌توان نوشت:

$$\ell_{(\lambda,\vartheta);\boldsymbol{T}}(\vartheta,\lambda)=\begin{bmatrix}\frac{\nu\bar{t}}{2}+\frac{\nu\bar{x}}{2\vartheta^2\lambda^2} & \frac{\nu\bar{x}}{\vartheta^3\lambda}\\ \frac{n}{\nu\bar{x}}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i+\bar{x}}+\frac{n}{\vartheta^2\lambda^2\nu\bar{x}}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{x_i+\bar{x}} & \frac{2n}{\vartheta^3\lambda\nu\bar{x}}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{x_i+\bar{x}}\end{bmatrix},$$

که از روی آن به راحتی می‌توان $\ell_{\lambda;\boldsymbol{T}}(\vartheta,\hat{\lambda})$، $\ell_{;\boldsymbol{T}}(\vartheta,\hat{\lambda})$، $\ell_{;\boldsymbol{T}}(\hat{\vartheta},\hat{\lambda})$ و $\ell_{(\lambda,\vartheta);\boldsymbol{T}}(\hat{\vartheta},\hat{\lambda})$ را محاسبه کرد.

همچنین ماتریس اطلاع مشاهده شده به قرار زیر است:

$$j(\vartheta,\lambda)=\begin{bmatrix}\frac{3\sum_{i=1}^{n}x_i}{\vartheta^4\lambda}-\frac{2n}{\vartheta^3} & \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\vartheta^3\lambda^2}\\ \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\vartheta^3\lambda^2} & \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{2\vartheta^2\lambda^3}+\frac{n}{2\lambda^2}\end{bmatrix}$$

که از روی آن $j_\lambda(\vartheta,\lambda)=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{2\vartheta^2\lambda^3}+\frac{n}{2\lambda^2}$ به دست می‌آید و در نهایت، با انجام تمام این محاسبات آماره آزمون $r^*(\vartheta_0)$ در رابطهٔ (۱۵) بدست خواهد آمد و به وسیلهٔ p- مقدار محاسبه شده در رابطهٔ (۹)، می‌توان در مورد رد یا عدم رد فرض H_0 توسط این روش قضاوت نمود.

۳-۲ آزمونی بر پایه توزیع مجانبی برآوردگر MLE

با توجه به تابع چگالی داده شده (۱) و بر اساس نمونهٔ تصادفی $X_1,X_2,\dots,X_n$، می‌توان نشان داد که برآوردگرهای MLE پارامترهای μ و λ به ترتیب $\hat{\mu}=\bar{X}$ و $\hat{\lambda}=n/V$ می‌باشند. با انجام یک سری محاسبات ساده، ماتریس اطلاع فیشر برای پارامترهای μ و λ به صورت

$$I(\mu,\lambda)=\begin{bmatrix}\frac{\lambda}{\mu^3} & 0\\ 0 & \frac{1}{2\lambda^2}\end{bmatrix}$$

به دست می‌آید. [۲۴] نشان دادند که بردار برآوردگرهای MLE دارای توزیع مجانبی نرمال چندمتغیره با بردار میانگین صفر و ماتریس واریانس-کواریانس برابر با عکس ماتریس اطلاع فیشر می‌باشد. بر پایهٔ این توزیع مجانبی، برای برآوردگرهای $\hat{\mu}$ و $\hat{\lambda}$ می‌توان نوشت:

$$\sqrt{n}\left[\begin{pmatrix}\hat{\mu}\\ \hat{\lambda}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\mu\\ \lambda\end{pmatrix}\right]\xrightarrow{d} N(\mathbf{0},\mathbf{\Sigma}),$$

که در آن $\xrightarrow{d}$ به معنی همگرایی در توزیع می‌باشد و ماتریس $\mathbf{\Sigma}$ به صورت زیر است:

$$\mathbf{\Sigma}=\begin{bmatrix}\frac{\mu^3}{\lambda} & 0\\ 0 & 2\lambda^2\end{bmatrix}.$$

حال با استفاده از تابع دومتغیرهٔ $f(\mu,\lambda)=\frac{\mu}{\lambda}=\vartheta$ و روش دلتا (Delta method) می‌توان نوشت:

$$\sqrt{n}\big(\hat{\vartheta}-\vartheta\big)\xrightarrow{d} N\big(0,\vartheta^2(2+\vartheta)\big). \qquad (۱۷)$$

برای اطلاعات بیشتر در مورد روش دلتا به [۳۰] رجوع شود.

همچنین با استفاده از یافته‌های [۲۴]، می‌توان به جای ماتریس $I(\mu,\lambda)$ از ماتریس $I(\hat{\mu},\hat{\lambda})$ استفاده کرد. به عبارت دیگر خواهیم داشت:

$$\frac{\sqrt{n}\big(\hat{\vartheta}-\vartheta\big)}{\hat{\vartheta}\sqrt{\big(2+\hat{\vartheta}\big)}}\xrightarrow{d} N(0,1). \qquad (۱۸)$$

حال با استفاده از رابطهٔ (۱۸)، یک آماره آزمون برای آزمون فرض (۱۰) عبارت است از:

$$Z_0=\frac{\sqrt{n}\big(\hat{\vartheta}-\vartheta_0\big)}{\hat{\sigma}}, \qquad (۱۹)$$

که در آن

$$\hat{\sigma}=\hat{\vartheta}\sqrt{\big(2+\hat{\vartheta}\big)}.$$

بنابراین ناحیهٔ بحرانی در سطح خطای نوع اول α و همچنین p- مقدار متناظر با آن به صورت زیر هستند:

$$|Z_0|>Z_{\alpha/2}, \qquad (۲۰)$$

$$\text{مقدار}-\mathrm{p}=2\min\{P(Z>Z_0),P(Z<Z_0)\}, \qquad (۲۱)$$

که در آن Z همان متغیر نرمال استاندارد است.

۴ مطالعات شبیه‌سازی

این قسمت به بررسی عملکرد اندازهٔ واقعی آزمون مربوط به روش MSLR تحت حالات مختلف از مقدارهای پارامترهای مدل می‌پردازد و این روش را با روش‌های SLR کلاسیک و Z_0 مورد مقایسه قرار می‌دهد، که در آن روش Z_0 همان آزمون مبتنی بر توزیع مجانبی برآوردگر درست‌نمایی در زیربخش ۳-۲ می‌باشد. برای مقایسه عملکرد روش‌ها از مفاهیم نرخ خطای نوع اول تجربی و اندازه توان تجربی استفاده می‌شود. به α اصطلاحا نرخ خطای نوع اول اسمی گویند که معمولاً آن را مقدار ۰/۰۵ قرار می‌دهند. در کنار مفهوم نرخ خطای نوع اول اسمی، مفهوم نرخ خطای نوع اول تجربی را در نظر می‌گیرند که برای محاسبهٔ آن، آزمایش را به تعداد زیاد مثلاً $B = 5000$ بار تکرار می‌کنند و سپس نسبت حالاتی که در آن‌ها فرض H_0 به نادرستی رد می‌شود را به عنوان نرخ خطای نوع اول تجربی در نظر می‌گیرند. حال آزمونی از بقیه بهتر است که نرخ خطای نوع اول تجربی آن به α نزدیک باشد و اصطلاحا این گونه گفته می‌شود که آزمون مورد نظر نرخ خطای نوع اول را به خوبی کنترل می‌کند. همچنین نسبت حالاتی که در آن فرض H_0 به درستی رد می‌شود را اندازه توان تجربی گویند. حال اگر دو آزمون نرخ خطای نوع اول را به خوبی کنترل کنند آن آزمونی بهینه‌تر خواهد بود که اندازه توان تجربی آن بیشتر باشد. در این قسمت با استفاده از این دو معیار به مقایسه عملکرد روش‌های ذکرشده پرداخته می‌شود.

در تمام مطالعات بخش شبیه‌سازی، تعداد تکرارها برابر $B = 5000$ با نرخ خطای نوع اول اسمی ۰/۰۵ در نظر گرفته شده است. همچنین اندازهٔ نمونهٔ n در این مطالعات شبیه‌سازی برابر با ۵، ۸، ۱۰، ۱۲، ۳۵ و ۷۰ می‌باشد. در جدول (۱)، برای زمانی که λ برابر ۰/۵، ۱/۰، ۱/۵ و ϑ_0 برابر با ۰/۱، ۰/۵، ۱/۰، ۱/۵باشد، مقدارهای مربوط به نرخ خطای نوع اول تجربی سه روش ذکرشده برای آزمون فرض $H_0 \colon \vartheta = \vartheta_0$ در مقابل فرض مقابل در (۱۰) آورده شده‌اند. از جدول (۱) می‌توان دریافت کرد که نرخ خطای نوع اول روش MSLR حتی برای اندازه نمونه‌های کوچک هم به ۰/۰۵ نزدیک است و این چنین می‌توان گفت که روش مذکور اندازه خطای نوع اول را به خوبی کنترل می‌کند و برعکس آن، روش‌های SLR و Z_0 از این لحاظ عملکرد مناسبی ندارند.

در جدول (۱)، برای اندازه نمونه‌های بزرگ یعنی $n = 35, 70$ مقدارهای مربوط به اندازه‌های خطای نوع اول آزمون‌های SLR کلاسیک و Z_0 قدری متعادل‌تر شده‌اند ولی هنوز تا مقدار نرخ خطای نوع اول اسمی ۰/۰۵ فاصله اغلب زیادی دارند. نتیجه‌ای که از این مطالعات شبیه‌سازی دریافت می‌شود این است که روش MSLR چه برای اندازهٔ نمونه‌های بزرگ و چه برای اندازهٔ نمونه‌های کوچک و برای تمام حالات ممکنه از مقدارهای پارامترهای مدل، دارای نرخ خطای نوع اول تجربی نزدیک به نرخ اسمی ۰/۰۵ است و از این لحاظ در کنترل خطای نوع اول به بهترین شیوه ممکن عمل می‌کند.

همچنین در جدول (۲)، اندازه‌های توان تجربی مربوط به این سه روش مورد مقایسه قرار گرفته‌اند، حتی با توجه به این که جدول (۱) نشان می‌دهد اندازه‌های آزمون روش‌های SLR و Z_0 در مقابل روش ارائه شده MSLR از لحاظ کنترل اندازه خطای نوع اول عملکرد خوبی ندارند. جهت محاسبهٔ توان در جدول (۲) نیز همان مقدارهای قبلی در جدول (۱) برای λ و ϑ_0 در نظر گرفته شده‌اند. از جدول (۲)، می‌توان دریافت که میزان توان روش MSLR در حد قابل قبول است و همچنین با افزایش اندازه نمونه، توان هم افزایش می‌یابد. بنابراین توصیه می‌شود جهت انجام آزمون فرض‌های دوطرفه برای پارامتر ضریب تغییرات یک جامعه گاوسی وارون از روش MSLR استفاده شود، بعلت اینکه حتی برای اندازه نمونه‌های کوچک هم از دقت خوبی برخوردار است. چنانچه از جدول (۲) مشاهده می‌گردد، با اینکه آزمون MSLR به خوبی اندازه خطای نوع اول را کنترل می‌کند و آزمون‌های SLR و Z_0 در این امر محلی از اعراب ندارند و مقایسه توان‌های این آزمون‌ها از این لحاظ معنی‌دار نمی‌باشد، ولی باز هم مواردی دیده می‌شود که توان آزمون MSLR از توان آزمون‌های

Z_0 و SLR بیشتر است. در واقع برای تمام مقدارهای $\vartheta < \vartheta_0$ در فرض H_1 توان روش MSLR نسبت به روش‌های Z_0 و SLR عملکرد بهتری داشته است. در کل می‌توان مشاهده کرد که ضعیف‌ترین روش در کنترل اندازه خطای اول و میزان توان روش Z_0 است و بهترین روش همان MSLR است. همچنین ملاحظه می‌گردد که با افزایش اندازه نمونه و کاهش هر چه بیشتر مقدار پارامتر ϑ وضعیت اندازه توان روش MSLR بهتر شده است.

جدول ۱: اندازه‌های خطای نوع اول سه روش MSLR، SLR و Z_0 برای آزمون فرض دو طرفه $H_0: \vartheta = \vartheta_0$ با $\alpha = 0.05$.

=۸n

		ϑ	۰/۱	۰/۵	۱/۰	۱/۵
λ	۰/۵	MSLR	۰/۰۵۱	۰/۰۴۸	۰/۰۵۴	۰/۰۴۹
		SLR	۰/۰۲۴	۰/۰۱۹	۰/۰۲۱	۰/۰۱۷
		Z_0	۰/۱۷۳	۰/۱۶۸	۰/۱۸۹	۰/۱۹۹
	۱/۰	MSLR	۰/۰۵۰	۰/۰۵۱	۰/۰۴۷	۰/۰۵۴
		SLR	۰/۰۲۰	۰/۰۱۹	۰/۰۱۶	۰/۰۱۸
		Z_0	۰/۱۵۹	۰/۱۷۸	۰/۱۹۰	۰/۲۱۴
	۱/۵	MSLR	۰/۰۵۱	۰/۰۴۹	۰/۰۴۸	۰/۰۴۸
		SLR	۰/۰۲۳	۰/۰۱۹	۰/۰۱۸	۰/۰۱۸
		Z_0	۰/۱۵۷	۰/۱۷۸	۰/۱۹۳	۰/۲۰۷

=۵n

		ϑ_0	۰/۱	۰/۵	۱/۰	۱/۵
λ	۰/۵	MSLR	۰/۰۴۷	۰/۰۴۷	۰/۰۵۱	۰/۰۴۹
		SLR	۰/۰۱۷	۰/۰۱۳	۰/۰۱۲	۰/۰۱۵
		Z_0	۰/۲۱۷	۰/۲۲۸	۰/۲۴۲	۰/۲۵۶
	۱/۰	MSLR	۰/۰۵۱	۰/۰۴۷	۰/۰۵۲	۰/۰۵۰
		SLR	۰/۰۱۴	۰/۰۱۲	۰/۰۱۵	۰/۰۰۹
		Z_0	۰/۲۰۹	۰/۲۲۹	۰/۲۴۰	۰/۲۶۱
	۱/۵	MSLR	۰/۰۴۷	۰/۰۵۲	۰/۰۵۴	۰/۰۵۱
		SLR	۰/۰۱۶	۰/۰۱۵	۰/۰۱۶	۰/۰۱۲
		Z_0	۰/۲۰۳	۰/۲۲۸	۰/۲۴۷	۰/۲۶۱

=۱۲n

		ϑ	۰/۱	۰/۵	۱/۰	۱/۵
λ	۰/۵	MSLR	۰/۰۵۰	۰/۰۴۸	۰/۰۴۷	۰/۰۵۱
		SLR	۰/۰۲۳	۰/۰۲۲	۰/۰۲۰	۰/۰۲۰
		Z_0	۰/۱۳۸	۰/۱۴۲	۰/۱۵۶	۰/۱۶۸
	۱/۰	MSLR	۰/۰۴۸	۰/۰۴۹	۰/۰۴۹	۰/۰۵۳
		SLR	۰/۰۲۳	۰/۰۲۴	۰/۰۲۲	۰/۰۱۹
		Z_0	۰/۱۲۹	۰/۱۴۲	۰/۱۵۲	۰/۱۶۴
	۱/۵	MSLR	۰/۰۴۸	۰/۰۵۰	۰/۰۵۲	۰/۰۵۲
		SLR	۰/۰۲۴	۰/۰۲۴	۰/۰۲۲	۰/۰۲۴
		Z_0	۰/۱۳۱	۰/۱۴۹	۰/۱۵۲	۰/۱۷۰

=۱۰n

		ϑ	۰/۱	۰/۵	۱/۰	۱/۵
λ	۰/۵	MSLR	۰/۰۵۱	۰/۰۵۲	۰/۰۵۰	۰/۰۵۱
		SLR	۰/۰۲۳	۰/۰۲۲	۰/۰۲۰	۰/۰۲۰
		Z_0	۰/۱۴۵	۰/۱۵۹	۰/۱۶۶	۰/۱۸۲
	۱/۰	MSLR	۰/۰۵۰	۰/۰۵۰	۰/۰۴۹	۰/۰۴۸
		SLR	۰/۰۲۴	۰/۰۲۱	۰/۰۲۰	۰/۰۱۸
		Z_0	۰/۱۳۸	۰/۱۵۶	۰/۱۷۲	۰/۱۸۴
	۱/۵	MSLR	۰/۰۴۹	۰/۰۴۹	۰/۰۵۰	۰/۰۵۱
		SLR	۰/۰۲۴	۰/۰۲۱	۰/۰۱۷	۰/۰۱۷
		Z_0	۰/۱۳۴	۰/۱۵۴	۰/۱۸۱	۰/۱۶۸

=۷۰n

		ϑ	۰/۱	۰/۵	۱/۰	۱/۵
λ	۰/۵	MSLR	۰05/0	۰05/0	۴۹0/0	۱05/0
		SLR	۷03/0	044/0	۵04/0	۴۰0/0
		Z_0	044/0	۷04/0	056/0	۵۷0/0
	۱/۰	MSLR	052/0	۴۹0/0	۰05/0	۴۸0/0
		SLR	۲04/0	۲04/0	۵04/0	۰04/0
		Z_0	۰/۰۹۶	۰/۰۸۶	087/0	۰08/0
	۱/۵	MSLR	۴۹0/0	۴۸0/0	۰05/0	۱05/0
		SLR	۶03/0	۶03/0	۷03/0	۸03/0
		Z_0	131/0	۱۰1/0	095/0	087/0

=۳۵n

		ϑ	۰/۱	۰/۵	۱/۰	۱/۵
λ	۰/۵	MSLR	047/0	052/0	۱05/0	۰/۰۴۷
		SLR	۰/۰۳۲	033/0	۰/۰۳۰	۰/۰۲۹
		Z_0	۱08/0	089/0	۰/۰۹۶	108/0
	۱/۰	MSLR	051/0	۰/۰۴۹	052/0	۰05/0
		SLR	۰/۰۳۵	۰/۰۳۰	۰/۰۳۲	033/0
		Z_0	128/0	133/0	126/0	142/0
	۱/۵	MSLR	۰/۰۴۹	۱05/0	052/0	۰/۰۴۹
		SLR	۵03/0	۷03/0	۵03/0	۳03/0
		Z_0	173/0	145/0	131/0	125/0

جدول ۲: مقایسه اندازه‌های توان سه روش MSLR ، SLR و Z_0 برای آزمون فرض دو طرفه $H_0{:}\,\vartheta = \vartheta_0$ با $\alpha = 0.05$.

=۸n

=۰/۵ϑ_0		ϑ	۰/۱	۰/۵	۱/۰	۱/۵
λ	۰/۵	MSLR	۰/۸۳۲	-	۰/۱۲۱	۰/۲۲۶
		SLR	۰/۷۷۰	-	۰/۲۷۴	۰/۴۶۸
		Z_0	۰/۰۰۱	-	۰/۵۳۵	۰/۷۷۴
	۱/۰	MSLR	۰/۸۲۵	-	۰/۱۲۶	۰/۲۳۵
		SLR	۰/۷۶۲	-	۰/۲۸۲	۰/۴۶۸
		Z_0	۰/۰۰۲	-	۰/۵۳۸	۰/۷۷۷
	۱/۵	MSLR	۰/۸۲۵	-	۰/۱۱۶	۰/۲۳۹
		SLR	۰/۷۶۸	-	۰/۲۷۹	۰/۴۶۵
		Z_0	۰/۰۰۲	-	۰/۵۴۴	۰/۷۷۹

=۵n

=۰/۱ϑ_0		ϑ	۰/۱	۰/۵	۱/۰	۱/۵
λ	۰/۵	MSLR	-	۰/۳۲۰	۰/۶۰۳	۰/۷۵۳
		SLR	-	۰/۶۸۸	۰/۹۲۲	۰/۹۷۹
		Z_0	-	۰/۹۱۶	۰/۹۹۶	۱
	۱/۰	MSLR	-	۰/۳۰۵	۰/۶۰۶	۰/۷۴۷
		SLR	-	۰/۶۸۳	۰/۹۳۲	۰/۹۸۳
		Z_0	-	۰/۹۰۷	۰/۹۹۵	۱
	۱/۵	MSLR	-	۰/۳۱۹	۰/۶۰۲	۰/۷۵۶
		SLR	-	۰/۶۹۳	۰/۹۲۱	۰/۹۷۹
		Z_0	-	۰/۹۰۹	۰/۹۹۶	۱

=۱۲n

=۱/۵ϑ_0		ϑ	۰/۱	۰/۵	۱/۰	۱/۵
λ	۰/۵	MSLR	۰/۹۹۸	۰/۶۲۷	۰/۱۵۶	-
		SLR	۰/۹۹۷	۰/۵۳۸	۰/۱۰۶	-
		Z_0	۰	۰/۰۰۵	۰/۰۶۳	-
	۱/۰	MSLR	۰/۹۹۸	۰/۶۳۰	۰/۱۶۰	-
		SLR	۰/۹۹۸	۰/۵۴۴	۰/۱۱۳	-
		Z_0	۰	۰/۰۰۵	۰/۰۵۶	-
	۱/۵	MSLR	۰/۹۹۹	۰/۶۳۲	۰/۱۴۸	-
		SLR	۰/۹۹۷	۰/۵۴۴	۰/۱۰۳	-
		Z_0	۰	۰/۰۰۶	۰/۰۶۳	-

=۱۰n

=۱/۰ϑ_0		ϑ	۰/۱	۰/۵	۱/۰	۱/۵
λ	۰/۵	MSLR	۰/۹۸۵	۰/۲۹۹	-	۰/۰۶۴
		SLR	۰/۹۷۶	۰/۲۱۹	-	۰/۱۵۷
		Z_0	۰	۰/۰۲۷	-	۰/۳۷۷
	۱/۰	MSLR	۰/۹۸۳	۰/۳۰۵	-	۰/۰۶۸
		SLR	۰/۹۷۵	۰/۲۲۳	-	۰/۱۶۲
		Z_0	۰	۰/۰۲۴	-	۰/۳۷۹
	۱/۵	MSLR	۰/۹۸۴	۰/۳۱۷	-	۰/۰۷۲
		SLR	۰/۹۷۵	۰/۲۳۰	-	۰/۱۶۳
		Z_0	۰	۰/۰۲۸	-	۰/۳۷۶

=۷۰n

=۱/۵ϑ_0		ϑ	۰/۱	۰/۵	۱/۰	۱/۵
λ	۰/۵	MSLR	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	642/0	-
		SLR	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	595/0	-
		Z_0	۱/۰۰۰	۰/۹۹۸	27/۲0	-
	۱/۰	MSLR	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	636/0	-
		SLR	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	584/0	-
		Z_0	۱/۰۰۰	۰/۹۹۸	156/0	-
	۱/۵	MSLR	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۳63/0	-
		SLR	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۵58/0	-
		Z_0	۱/۰۰۰	۰/۹۹۶	۳15/0	-

=۳۵n

=۱/۰ϑ_0		ϑ	۰/۱	۰/۵	۱/۰	۱/۵
λ	۰/۵	MSLR	۱/۰۰۰	*728/0*	-	197/0
		SLR	۱/۰۰۰	*667/0*	-	277/0
		Z_0	۱/۰۰۰	*176/0*	-	539/0
	۱/۰	MSLR	۱/۰۰۰	*723/0*	-	213/0
		SLR	۱/۰۰۰	*663/0*	-	296/0
		Z_0	۱/۰۰۰	۷۱*1/0*	-	*529/0*
	۱/۵	MSLR	۱/۰۰۰	*719/0*	-	۰/۲۰۱
		SLR	۱/۰۰۰	*661/0*	-	۰/۲۸۶
		Z_0	۱/۰۰۰	۶۹*1/0*	-	517/0

۵ مثال واقعی

در این بخش کاربرد روش‌های ارائه شده در یک مثال واقعی نشان داده می‌شود. یافته‌های این پژوهش از آزمایش‌هایی بدست آمده‌اند که در آن خودروهای مورد آزمایش با سرعت ۳۵ مایل بر ساعت به دیواری برخورد می‌کنند. در این آزمایش از آدمک‌هایی در مکان صندلی راننده و صندلی مسافر جلوی آن استفاده می‌شود. هدف محققان، آگاهی از میزان متغیرهای آسیب مانند میزان صدمات سر، فشار بر قفسه سینه و فشار بر استخوان ران چپ و راست روی آدمک‌ها می‌باشد. داده‌های بدست آمده در آدرس اینترنتی به نشانی http://lib.stat.cmu.edu/DASL/Datafiles/Crash.html

قابل دسترسی می‌باشند. در این مثال، تنها متغیر میزان فشار بر استخوان ران چپ برای خودروی ساخت شرکت داج (Dodge) در نظر گرفته می‌شود. مشاهدات به صورت زیر می‌باشند:

۶/۷۲ ۱۲/۳۴ ۱۰/۰۳ ۷/۲۹ ۵/۷۵ ۳/۲۴ ۱۴/۸۱ ۸/۴۴

مقدار آماره آزمون و p-مقدار آزمون کولموگروف-اسمیرنوف برای برازش توزیع گاوسی وارون به این داده‌ها به ترتیب ۰/۱۲۸۷ و ۰/۹۹۶۴ می‌باشند. پس می‌توان نتیجه گرفت که توزیع گاوسی وارون به این داده‌ها قابل برازش است. همچنین [۳۱] هم نشان داد که می‌توان توزیع گاوسی وارون را به این داده‌ها برازش نمود. در این مثال آزمون فرض دوطرفه $H_0{:}\,\vartheta = 0/85$ در مقابل $H_1{:}\,\vartheta \neq 0/85$ در سطح $\alpha = 0/05$ مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابتدا باید توجه داشت که برآوردهای MLE پارامترهای مدل گاوسی وارون عبارتند از: $\hat{\vartheta} = 0/22$ و $\hat{\lambda} = 39/48$. مقدار آماره‌های آزمون Z_0، SLR و MSLR به ترتیب برابر با 5/532-، ۲/۰۳۰- و ۱/۵۲۳- می‌باشند. همچنین p- مقدارها برای روش‌های Z_0، SLR و MSLR به ترتیب ۰/000، ۰/۰۴۲ و ۰/۱۲۷ می‌باشند. چنان‌چه ملاحظه می‌شود، فرض H_0 توسط Z_0 و SLR رد می‌شود ولی با استفاده از روش MSLR دلیلی بر رد فرض H_0 وجود ندارد. در بخش مطالعات شبیه‌سازی نشان داده شد که روش MSLR حتی برای اندازهٔ نمونه‌های کوچک هم اندازهٔ خطای نوع اول آزمون را به خوبی کنترل می‌کند، در صورتی که روش‌های Z_0 و SLR فاقد این ویژگی می‌باشند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت فرض H_0 در سطح خطای نوع اول ۰/۰۵ رد نمی‌شود.

۶ نتیجه‌گیری

در این مقاله بر اساس اصلاحی از روش نسبت درستنمایی علامت‌دار (SLR) یک آماره آزمون جدید به عنوان نسبت درستنمایی علامت‌دار تعدیل‌یافته (MSLR) برای آزمون فرض در مورد پارامتر ضریب تغییرات یک جامعه گاوسی وارون ارائه شد. چنانچه مشاهده شد روش جدید حتی برای اندازه نمونه‌های کوچک هم دارای نرخ خطای نوع اول تجربی نزدیک به نرخ خطای نوع اول اسمی است و از این لحاظ برای آزمون فرض‌های دوطرفه به خوبی سطح خطای نوع اول را کنترل می‌کند. همچنین ملاحظه شد که این روش دارای توان آزمون قابل قبولی است و در بعضی از موقعیت‌ها توان آزمون آن از توان روش‌های رقیب بیشتر است؛ گر چه روش‌های رقیب در کنترل سطح خطای نوع اول عملکرد خوبی نداشتند. بنابراین توصیه می‌شود که در کارهای عملی به جای استفاده از روش کلاسیک SLR از روش MSLR استفاده نمایند.

تشکر و قدردانی

نویسنده بر خود لازم می‌داند از سردبیر و هیأت تحریریهٔ محترم مجله پژوهش‌های ریاضی و همچنین از داوران گرامی که توصیه‌ها و پیشنهادهای ارزشمندشان باعث اصلاح و بهبود هر چه بیشتر این پژوهش شد، تشکر نماید.

References

1. Wise M.E., "Skew probability curves with negative powers of time and related to random walks in series", Statistica Neerlandica, 25(1971) 159–180.
2. Wise M.E., "Skew Distributions in Biomedicine Including Some with Negative Powers of Time in Statistical Distributions in Scientific Work", vol. 2, D. Reidel, Dordrecht, Holland, (1975).
3. Wise M.E., Osborn S.B., Anderson, J., Tomlinson R.W.S., "A stochastic model for turnover of radio-calcium based on the observed laws", Math. Biosci., 2(1968) 199–224.
4. Lancaster T., "stochastic model for the duration of a strike", J. Roy. Stat. Soc. A, 135(1972) 257–271.
5. Whitmore G.A., "The inverse Gaussian distribution as a model of hospital stay", Health Serv. R., 10(1975) 297–302.
6. Schrödinger E., "Zür theorie der fall- und steigversuche an teilchen rnit Brownchar bewegung", Physikalische Zeitschrijt, 16(1915) 289-295.
7. Tweedie M.C.K., "Statistical properties of inverse Gaussian distributions I", Ann. Math. Stat., 28(1957) 362-377.
8. Tweedie M.C.K., "Statistical properties of inverse Gaussian distributions II". Ann. Math. Stat., 28(1957) 696-705.
9. Chhikara R.S., Folks J.L., "The Inverse Gaussian distribution", Marcel Dekker, New York (1989).
10. Seshadri V., "The Inverse Gaussian distribution: Statistical Theory and Applications", Springer, New York (1998).
11. Searles D.T., "The utilization of a known coefficient of variation in the estimation procedure", J. Amer. Statist. Assoc., 59(1964) 1225–1226.
12. Srivastava V.K., "On the use of coefficient of variation in estimating normal mean", J. Indian Soc. Agricultural Statist., 26(1974) 33–36.
13. Chaubey Y.P., Sen D., "Estimator of mean in an inverse Gaussian population based on the coefficient of variation", J. Statist. Res., 42(2008) 1–16.
14. Reid N., "Neyman from Life", Springer, New York (1982).
15. Chhikara R.S., Folks J.L., "The inverse Gaussian distribution as a lifetime model", Technometrics, 19(1977) 461-468.

16. Chhikara R.S., "Statistical Inference Related to the Inverse Gaussian distribution", Ph.D. dissertation, The Oklahoma State University (1972).
17. Hsieh H.K., "Inferences on the coefficient of variation of an inverse Gaussian distribution", Communications in Statistics – Theory and Methods, 19(1990) 1589-1605.
18. Chaubey Y.P., Sen D., Saha K.K., "On testing the coefficient of variation in an inverse Gaussian population", Statistics and Probability Letters, 90(2014) 121–128.
19. Reid N., "Likelihood and higher-order approximations to tail areas: a review and annotated bibliography", Can. J. Statist., 24(1996) 141–166.
20. Wu J., Wong A.C.M., Jiang G., "Likelihood-based confidence interval for a log-normal mean", Stat. Med., 22(2003) 1849–1860.
21. Wu J., Wong A.C.M., "Improved interval estimation for the two-parameter Birnbaum-Saunders distribution", Compute. Stat. Data Anal., 47(2004) 809–821.
22. Tian L., Wilding G.E., "Confidence interval of the ratio of means of two independent inverse Gaussian distributions", J. Stat. Planning Inference, 133(2005) 381–386.
23. Sun Y., Wong A.C.M., "Interval estimation for the normal correlation coefficient", stat. Prob. Letters, 77(2007) 1652–1661.
24. Cox D.R., Hinkley D.V., "Theoretical Statistics", Chapman and Hall, London (1979).
25. Pierce D.A., Peters D., "Practical use of higher order asymptotic for multi-parameter exponential families", Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological), 54(1992) 701-737.
26. Barndorff-Nielsen O.E., "Inference on full or partial parameters based on the standardized signed log likelihood ratio", Biometrika, 73(1986) 307-322.
27. Barndorff-Nielsen O.E., "Modified signed log likelihood ratio", Biometrika, 78(1991) 557-563.
28. DiCiccio T.J., Martin M.A., Stern S.E., "Simple and accurate one-sided inference from signed roots of likelihood ratios", Canadian Journal of Statistics, 29(2001) 67-76.
29. Fraser D.A.S., Reid N., Wu J., "A simple general formula for tail probabilities for frequentist and Bayesian inference", Biometrika, 86(1999) 249–264.
30. Ferguson T.S., "A Course in Large Sample Theory", Chapman & Hall, New York (1996).
31. Tian L., "Testing equality of inverse Gaussian means under heterogeneity, based on generalized test variable", Comp. Stat. Data Anal., 51(2006) 1156–1162.