شبکهٔ z-ایدآل‌های پایه‌ای

علی طاهری فر
دانشگاه یاسوج، دانشکدهٔ علوم پایه، گروه ریاضی

دریافت ۹۸/۰۳/۰۸ پذیرش ۹۸/۰۷/۲۳

چکیده

برای f-حلقهٔ R با خاصیت معکوس کران‌دار، ابتدا نشان می‌دهیم $BZ(R)$، مجموعهٔ z-ایدآل‌های پایه‌ای R، همرا با رابطهٔ جزئا مرتب شدهٔ شمول، شبکه کران‌دار و شرکت‌پذیر است. هم‌چنین وقتی f-حلقهٔ R یک حلقهٔ نیم‌اولیه است، $BZ^0(R)$، مجموعهٔ z^0-ایدآل‌های پایه‌ای R، همرا با رابطهٔ جزئا مرتب شدهٔ شمول، شبکه کران‌دار و شرکت‌پذیر است. سپس برای f-حلقهٔ R با خاصیت معکوس کران‌دار، ثابت کرده‌ایم $BZ(R)$ شبکهٔ متمم‌دار است و R حلقهٔ نیم‌اولیه است اگر و تنها اگر R حلقهٔ منظم باشد اگر و تنها اگر $BZ^0(R)$ شبکهٔ متمم‌دار و R حلقهٔ کاهش‌یافته باشد اگر و تنها اگر عناصر پایه‌ای برای مجموعه‌های بسته در فضای توپولوژی $Max(R)$ باز هستند و R حلقهٔ نیم‌اولیه است اگر و تنها اگر عناصر پایه‌ای برای مجموعه‌های بسته در فضای توپولوژی $Min(R)$ باز هستند و R حلقهٔ کاهش یافته است. به‌عنوان یک نتیجه، هنگامی‌که $R = C(X)$ (حلقهٔ توابع پیوسته) در نظر بگیریم. داریم، $BZ(C(X))$ شبکهٔ متمم‌دار است اگر و تنها اگر $BZ^0(C(X))$ شبکهٔ متمم‌دار است اگر و تنها اگر X یک P-فضا باشد.

واژه‌های کلیدی: f-حلقه، شبکه، زاریسکی توپولوژی، حلقهٔ نیم‌اولیه، حلقهٔ کاهش‌یافته.

مقدمه

در این مقاله همهٔ حلقه‌ها یکدار و جابه‌جایی هستند. حلقهٔ R همراه با رابطهٔ جزئا مرتب $\leq$ یک حلقهٔ جزئا مرتب گوییم، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱. برای هر $x \in R$ ، $a \geq b$ نتیجه دهد $a + x \geq b + x$.

۲. $0 \leq a$ و $b \geq 0$ نتیجه دهد $ab \geq 0$.

هرگاه R حلقهٔ جزئاً مرتب باشد و به‌ازای هر $a, b \in R$ کوچک‌ترین کران بالای $\{a, b\}$ در R $(a \vee b)$ وجود داشته باشد، می‌گوییم R حلقهٔ شبکهٔ جزئا مرتب است. در حلقهٔ شبکه‌ای جزئاً مرتب $|a|$ همان $a \vee (-a)$ است که همواره $|a| \geq 0$. حلقهٔ شبکه‌ای مرتب شده R را f-حلقه گوییم اگر برای هر $a, b \in R$ و هر $c \geq 0$ در R داشته باشیم، $(a \wedge b)c = (ac) \wedge (bc)$. f-حلقه دارای خاصیت معکوس کران‌دار است اگر هر $a \geq 1$ در R معکوس‌پذیر باشد (حلقهٔ توابع پیوسته، f-حلقه‌ای با خاصیت معکوس کران‌دار است). برای جزییات بیش‌تر در مورد این‌گونه حلقه‌ها به [۸] مراجعه کنید. اشتراک همهٔ ایدآل‌های ماکسیمال حلقهٔ R را با $J(R)$ نشان می‌دهیم. حلقهٔ R را نیم‌اولیه گوییم، هرگاه $J(R) = 0$. حلقهٔ R را کاهش‌یافته گوییم، هرگاه عضو پوچ‌توان غیر صفر نداشته باشد، به‌عبارت دیگر اشتراک همهٔ ایدآل‌های اول مینیمال صفر است $(N(R) = 0)$.

*نویسنده مسئول ataherifar@yu.ac.ir

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2026-07-03]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.14.0]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.127]

به‌طورکلی مجموعه ایدآل‌های ماکسیمال حلقهٔ R را با $Max(R)$ نشان می‌دهیم. $Max(R)$ را به‌عنوان فضای توپولوژی همراه با زاریسکی توپولوژی در نظر می‌گیریم. به‌ازای هر $a \in R$ و هر $A \subseteq R$ قرار می‌دهیم،

$$M(a) = \{M \in Max(R): a \in M\} \text{ و } M(A) = \{M \in Max(R): A \subseteq M\}.$$

در نتیجه داریم:

$$D(a) = \{M \in Max(R): a \notin M\} \text{ و } D(A) = \{M \in Max(R): M \nsubseteq A\}.$$

بنابراین داریم:

$$D(a) = Max(R) \setminus M(a) \text{ و } D(A) = Max(R) \setminus M(A).$$

خانوادهٔ $\{M(a): a \in R\}$، پایه‌ای برای مجموعه‌های بسته در زاریسکی توپولوژی روی $Max(R)$ است. هم‌چنین $Min(R)$ را با زاریسکی توپولوژی در نظر می‌گیریم. بدین‌صورت‌که به‌ازای هر $a \in R$ و هر $A \subseteq R$ قرار می‌دهیم،

$$P(a) = \{P \in Min(R): a \in P\} \text{ و } P(A) = \{P \in Min(R): A \subseteq P\}.$$

به‌سادگی دیده می‌شود خانوادهٔ $\{P(a): a \in R\}$، پایه‌ای برای مجموعه‌های بسته در زاریسکی توپولوژی روی $Min(R)$ است. ایدآل I از حلقهٔ R را z (z^0)-ایدآل گوییم هرگاه به‌ازای هر $a, b \in R$، اگر

$$M(a) = M(b) \ \ (P(a) = P(b))$$

و $a \in I$ نتیجه شود $b \in I$ یا به‌طور معادل به‌ازای هر $a \in I$ داشته باشیم $M_a \subseteq I$ $(P_a \subseteq I)$. در این‌جا M_a (P_a) اشتراک همهٔ ایدآل‌های ماکسیمال (همهٔ ایدآل‌های اول مینیمال) شامل a است. به‌طور بدیهی ما داریم $M_a \subseteq M_b$ $(P_a \subseteq P_b)$ اگر و تنها اگر $M(b) \subseteq M(a)$ $(P(b) \subseteq P(a))$. برای جزئیات بیش‌تر در مورد z-ایدآل‌ها [۴] و [۶] را می‌توانید ببینید.

شبکهٔ z-ایدآل‌های پایه‌ای در f-حلقه‌ها

در این بخش به نتایج اصلی مقاله اشاره می‌کنیم. ایدآل I از حلقه R را l-ایدآل گوییم، هرگاه به‌ازای هر $a, b \in R$ صادق در نامساوی $|a| \leq |b|$، $b \in I$ نتیجه دهد $a \in I$. در منبع [۸] نشان داده شد اگر R یک f-حلقه با خاصیت معکوس کران‌دار باشد آن‌گاه هر z-ایدآل در R یک l-ایدآل است. در واقع f-حلقه دارای خاصیت معکوس کران‌دار است اگر و تنها اگر هر z-ایدآل در R یک l-ایدآل باشد. بنابراین در این حالت از حلقهٔ R هر ایدآل ماکسیما ل، l-ایدآل است. هنگامی‌که $J(R) = 0$ آن‌گاه هر ایدآل اول مینیمال از R یک z-ایدآل است و بنابراین، l-ایدآل است.

قضیهٔ ۱. فرض کنیم R یک f-حلقه با خاصیت معکوس کران‌دار باشد. این موارد برقرارند:

۱. $BZ(R) = \{M_a: a \in R\}$ شبکهٔ کران‌دار شرکت‌پذیر با ترتیب جزئی شمول است.

۲. اگر R حلقهٔ نیم‌اولیه باشد، و هرگاه $BZ^0(R) = \{P_a: a \in R\}$، آن‌گاه $BZ^0(R)$ شبکهٔ کران‌دار شرکت‌پذیر با ترتیب جزئی شمول است.

اثبات ۱. برای شبکه بودن $BZ(R)$ نشان می‌دهیم به‌ازای هر $a, b \in R$، $M_a \vee M_b$ و $M_a \wedge M_b$ وجود دارند. ابتدا ادعا می‌کنیم $M_a \vee M_b = M_{(a^2+b^2)}$. چون همواره $0 \leq a^2 \leq a^2 + b^2$ و باتوجه به توضیحات قبل از قضیه، M یک l-ایدآل است، پس داریم:

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2026-07-03]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.14.0]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.127]

$$M_a = M_{a^2} \subseteq M_{(a^2+b^2)} \text{ و } M_b = M_{b^2} \subseteq M_{(a^2+b^2)}.$$

در نتیجه $M_{(a^2+b^2)}$ کران بالا برای مجموعهٔ $\{M_a, M_b\}$ است. اکنون فرض کنیم

$$M_a \subseteq M_c \text{ و } \mathrm{M_b} \subseteq M_c.$$

.

آن‌گاه $M(c) \subseteq M(a)$ و $M(c) \subseteq M(b)$. از آن‌جایی‌که هر ایدآل ماکسیمال، l-ایدآل است، بنابراین داریم:

$$M(a) \cap M(b) = M(a^2 + b^2).$$

در نتیجه $M(c) \subseteq M(a^2 + b^2)$. این نتیجه می‌دهد $M_{(a^2+b^2)} \subseteq M_c$.

اکنون به سادگی دیده می‌شود:

$$M_a \wedge M_b = M_a \cap M_b = M_{ab}.$$

تساوی مذکور در قسمت ۱ از لم ۳٫۱ از منبع [۳] نیز اثبات شد.

برای شرکت‌پذیری $BZ(R)$، $a, b, c \in R$ را در نظر می‌گیریم. آن‌گاه داریم:

$$M_a \vee (M_b \wedge M_c) = M_a \vee M_{bc} = M_{a^2+(bc)^2}. \quad (۱)$$

هم‌چنین داریم:

$$(M_a \vee M_b) \wedge (M_a \vee M_c) = M_{(a^2+b^2)} \wedge M_{(a^2+c^2)} = M_{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}. \quad (۲)$$

از طرف دیگر، چون همواره داریم، $a^2 \leq a^2 + (bc)^2$ و $(bc)^2 \leq (bc)^2 + a^2$.

پس ایدآل ماکسیمال M شامل $a^2 + (bc)^2$ است اگر و تنها اگر شامل b و a یا شامل c و a باشد اگر و تنها اگر شامل $(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)$ باشد. این نشان می‌دهد سمت راست تساوی‌های (۱) و (۲) برابرند. بنابراین شرکت‌پذیری $BZ(R)$ ثابت شده است.

عناصر $M_0 = J(R)$ و $M_1 = R$ به‌ترتیب کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عناصر $BZ(R)$ هستند. بنابراین $BZ(R)$ شبکهٔ کران‌دار است.

اثبات ۲. مشابه اثبات (۱) عمل می‌کنیم. زیرا R حلقهٔ نیم‌اولیه است، بنابراین هر z^0-ایدآل یک z-ایدآل است و در نتیجه با توجه به توضیحات قبل از قضیه، l-ایدآل است. بنابراین با استفاده از دو نامساوی،

$$0 \leq a^2 \leq a^2 + b^2 \text{ و } 0 \leq b^2 \leq a^2 + b^2,$$

به‌راحتی می‌توان نشان داد:

$$P_a = P_{a^2} \subseteq P_{(a^2+b^2)} \text{ و } P_b = P_{b^2} \subseteq P_{(a^2+b^2)}.$$

بنابراین $P_{(a^2+b^2)}$ کران بالا برای مجموعهٔ $\{P_a, P_b\}$ است. اکنون فرض کنیم $P_a \subseteq P_c$ و $\mathrm{P_b} \subseteq P_c$. آن‌گاه $P(c) \subseteq P(a)$ و $P(c) \subseteq P(b)$. از طرفی چون هر ایدآل اول مینیمال، z^0-ایدآل است، پس l-ایدآل است و داریم:

$$P(a) \cap P(b) = P(a^2 + b^2).$$

در نتیجه $P(c) \subseteq P(a^2 + b^2)$. این نتیجه می‌دهد $P_{(a^2+b^2)} \subseteq P_c$.

هم‌چنین به سادگی دیده می‌شود:

$$P_a \wedge P_b = P_a \cap P_b = P_{ab}.$$

بنابراین مشابه اثبات (۱)، با بکار بردن تساوی مذکور به‌ازای هر $a, b \in R$، می‌توان نشان داد:

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2026-07-03]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.14.0]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.127]

$$P_a \vee (P_b \wedge P_c) = (P_a \vee P_b) \wedge (P_a \vee P_c).$$

بنابراین $BZ^0(R)$ شبکهٔ شرکت‌پذیر است. همچنین $P_0 = N(R) = 0$ و $P_1 = R$ به ترتیب کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عناصر $BZ^0(R)$ هستند. بنابراین $BZ^0(R)$ شبکهٔ کران‌دار است. □

شبکهٔ L را متمم‌دار گوییم، هرگاه هر عضو آن دارای متمم باشد. به‌عبارت دیگر به ازای هر $a \in L$ یک $b \in L$ به قسمی وجود داشته باشد که $a \vee b = 1$ و $a \wedge b = 0$ که 1 و 0 به‌ترتیب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عناصر L هستند.

قضیهٔ ۲. برای f-حلقهٔ R با خاصیت معکوس کران‌دار این موارد معادلند:

۱. $BZ(R)$ شبکهٔ متمم‌دار و حلقهٔ R نیم‌اولیه است.

۲. R حلقهٔ منظم است.

۳. $BZ^0(R)$ شبکهٔ متمم‌دار است و حلقهٔ R کاهش‌یافته است.

۴. عناصر پایه‌ای برای مجموعه‌های بسته در فضای $Max(R)$ باز هستند و R نیم‌اولیه است.

۵. عناصر پایه‌ای برای مجموعه‌های بسته در فضای $Min(R)$ باز هستند و R کاهش‌یافته است.

اثبات: **(۱)** ⇐ **(۲)** فرض کنیم $a \in R$. با توجه به فرض وجود دارد $b \in R$ به‌طوری‌که $M_a \vee M_b = M_1 = R$ و $M_a \wedge M_b = M_0 = 0$. این دو تساوی نشان می‌دهند $M_{a^2+b^2} = R$ و $M_{ab} = 0$. بنابراین $a^2 + b^2$ عضو یکهٔ R است و $ab = 0$. بنابراین وجود دارد $c \in R$ به‌طوری‌که:

$$(a^2 + b^2)c = 1 \Rightarrow a = a^3c + ab^2c = a^2(ac).$$

این تساوی نشان می‌دهد R حلقهٔ منظم است.

(۲) ⇐ **(۱)** به‌طور بدیهی منظم بودن R نتیجه می‌دهد $J(R) = 0$. اکنون فرض کنیم $a \in R$. آن‌گاه با توجه به فرض منظم بودن R وجود دارد $b \in R$ به‌طوری‌که $a = a^2b$. بنابراین $a(1 - ab) = 0$. این نشان می‌دهد،

$$M_a \wedge M_{1-ab} = M_{a(1-ab)} = M_0 = 0. \quad (۱)$$

با توجه به این‌که R داری خاصیت معکوس کران‌دار است، هر ایدآل ماکسیمال آن یک l-ایدآل است پس هیچ ایدآل ماکسیمالی شامل $a^2 + (1 - ab)^2$ نیست. زیرا یک ایدآل ماکسیمال شامل $a^2 + (1 - ab)^2$ است اگر و تنها اگر شامل a و $(1 - ab)$ باشد که یک تناقض است.

بنابراین داریم:

$$M_a \vee M_{1-ab} = M_{a^2+(1-ab)^2} = M_1. \quad (۲)$$

تساوی‌های (۱) و (۲) نشان می‌دهند به‌ازای هر $a \in R$، M_a دارای متمم است. بنابراین $BZ(R)$ شبکهٔ متمم‌دار است.

(۲) ⇐ **(۳)** منظم بودن R نتیجه می‌دهد $J(R) = 0$. بنابراین R حلقهٔ کاهش‌یافته است. با استفاده از قضیهٔ ۱ داریم $BZ^0(R)$ یک شبکه است. اکنون شبیه اثبات (۲) ⇐ (۱) و با توجه این‌که $P_0 = 0$، به‌ازای هر $a \in R$ یک $b \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که،

$$P_a \vee P_{1-ab} = P_1 \text{ و } P_a \wedge P_{1-ab} = P_0.$$

این یعنی، $BZ^0(R)$ شبکهٔ متمم‌دار است.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2026-07-03]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.14.0]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.127]

(۳) ⇐ (۲) فرض کنیم $a \in R$. با توجه به فرض، $b \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که،

$$P_a \vee P_b = P_1,\ P_a \wedge P_b = P_0 = 0.$$

بنابراین $P_{ab} = 0$ و $P_{a^2+b^2} = R$. این دو تساوی نشان می‌دهند $a^2 + b^2$ عضو یکهٔ R است و $ab = 0$. بنابراین وجود دارد $c \in R$ به‌طوری‌که:

$$(a^2 + b^2)c = 1 \Rightarrow a = a^3c + ab^2c = a^2(ac).$$

این تساوی نشان می‌دهد R حلقهٔ منظم است.

(۲) ⇐ (۴) حلقهٔ R حلقهٔ منظم است، بنابراین $J(R) = 0$. با توجه به فرض به‌ازای هر $a \in R$ یک $b \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $a = a^2b$. بنابراین $a(1 - ab) = 0$. در نتیجه داریم:

$$M(a) \cup M(1 - ab) = Max(R) \text{ و } M(a) \cap M(1 - ab) = \emptyset.$$

بنابراین، $M(a) = Max(R) \setminus M(1 - ab)$ باز است.

(۴) ⇐ (۲) فرض کنیم $a \in R$. $M(a)$ یک مجموعهٔ باز-بسته در $Max(R)$ است و $J(R) = 0$. با توجه به قضیهٔ ۳,۸ از مرجع [۹] یک خودتوان $e \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $M(a) = D(e)$. در نتیجه داریم:

$$M(ae) = M(a) \cup M(e) = Max(R) \Rightarrow ae \in J(R) = 0.$$

از طرف دیگر داریم:

$$M(a^2 + e^2) = M(a) \cap M(e) = D(e) \cap M(e) = \emptyset.$$

این یعنی، $a^2 + e^2 = a^2 + e$ عضو یکهٔ حلقهٔ R است. بنابراین $c \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که:

$$c(a^2 + e) = 1 \Rightarrow ca^2 + ce = 1 \Rightarrow ca^3 + cea = a.$$

از آن‌جاکه $ae = 0$، داریم $a = a^2(ca)$. این یعنی، R حلقهٔ منظم است.

(۲) ⇔ (۵) اثبات، گام به گام شبیه اثبات **(۲) ⇔ (۴)** است.

با استفاده از قضیهٔ ۲ نتایج زیر به‌طور بدیهی حاصل می‌شوند.

نتیجهٔ ۱. فرض کنیم R یک f-حلقهٔ نیم‌اولیه با خاصیت معکوس کران‌دار باشد. آن‌گاه این موارد معادلند:

۱. $BZ(R)$ شبکهٔ متمم‌دار است.

۲. R حلقهٔ منظم است.

۳. $BZ^0(R)$ شبکهٔ متمم‌دار است.

۴. عضوهای پایه‌ای برای مجموعه‌های بسته در $Max(R)$ باز هستند.

۵. عضوهای پایه‌ای برای مجموعه‌های بسته در $Min(R)$ باز هستند.

یادآوری می‌کنیم، $C(X)$ حلقهٔ توابع پیوسته روی فضای کاملاً منظم و هاسدورف X است. با توجه به منبع [۶]، $C(X)$، f- حلقهٔ نیم‌اولیه است. هم‌چنین $C(X)$ حلقهٔ منظم است اگر و تنها اگر X یک P-فضا باشد.

بنابراین با توجه به نتیجهٔ ۱ نتیجهٔ ۲ حاصل می‌شود.

نتیجهٔ ۲. برای فضای کاملاً منظم و هاسدورف X این موارد معادلند:

۱. $BZ(C(X))$ شبکهٔ متمم‌دار است.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2026-07-03]

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.14.0]

[DOI: 10.52547/mmr.7.1.127]

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2026-07-03]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.14.0]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.127]

۲. $BZ^0(C(X))$ شبکهٔ متمم‌دار است.

۳. X یک P-فضا است.

فرض می‌کنیم L یک قاب کاملاً منظم است. حلقهٔ توابع پیوسته حقیقی مقدار روی قاب L را با $\mathcal{R}L$ نشان می‌دهیم. این حلقه به‌عنوان نسخه توپولوژی بدون نقطه از حلقهٔ $C(X)$ معرفی شده است (برای جزئیات بیش‌تر، [۱]، [۲] ملاحظه شود). در منبع [۲] ثابت شده، حلقهٔ $\mathcal{R}L$، f-حلقه‌ی‌کاهش‌یافته و دارای خاصیت معکوس کران‌دار است. در گزارهٔ ۹٫۳ از منبع [۵] ثابت شده است که قاب L یک P-قاب است اگر و تنها اگر $\mathcal{R}L$ یک حلقهٔ منظم باشد. بنابراین مشابه نتیجه قبلی را با استفاده از نتیجهٔ ۱ برای حلقهٔ توابع پیوسته حقیقی مقدار روی قاب L بدین‌صورت داریم.

نتیجهٔ ۳. برای قاب کاملاً منظم L این موارد معادلند:

۱. $BZ(\mathcal{R}L)$ شبکهٔ متمم‌دار است.

۲. $BZ^0(\mathcal{R}L)$ شبکهٔ متمم‌دار است.

۳. L یک P-قاب است.

قدردانی

از داوران عزیز که با راهنمایی‌های ایشان و اصلاحاتی که فرمودند باعث بهتر شدن این مقاله شدند کمال تشکر را داریم. لازم به ذکر است که **نتیجهٔ ۳** مربوط به راهنمایی داوران محترم است.

منابع

1. Ball R. N, "Walters-Wayland, J., C- and C∗-quotients in pointfree topology", Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 412 (2002) 1-62.
2. Banaschewski B., "The real numbers in pointfree topology", Textos de Mathem´atica (S´eries B) No. 12, Departamento de Mathem´atica da Universidade de Coimbra, Coimbra (1997).
3. Dube T., "A note on lattice of z-ideals of f-rings", New York J. Math, 22 (2016) 351-361.
4. Dube T., Ighedo O., "On z-ideals of point free function rings", Bull. Iran. Math. Soc, 40 (2014) 655-673.
5. Dube T., "Concerning P-frames, essential P-frames and strongly zerodimensional frames", Algebra Universalis, 69 (2009) 115-138.
6. Gillman L., Jerison M., "Ring of Continuous Functions", Springer (1976).
7. Mason G., "z-ideals and prime ideals", J. Algebra, 26 (1973) 280-297.
8. Suzanne L., "A characterization of f-rings in which the sum of semiprime ideals is semiprime and its consequences", Comm. Algebra, 23 (1995) 5461-5481.
9. Varadarajan K., "Clean, almost clean, potent commutative rings", J. Algebra Appl, 6 (2007) 671-685.