



Kharazmi University

Codimension-2 bifurcations of a discrete-time predator-prey system

Raana Moghadasi Borujeni¹ , R. Khoshsiar Ghaziani² 

1. Faculty of Mathematical Sciences, Shahrekord University, Shahrekord, Iran.

✉E-mail: raana.moghadasi.brn@gmail.com

2. Faculty of Mathematical Sciences, Shahrekord University, Shahrekord, Iran.

E-mail: Khoshsiar38@sku.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:

Received:
10 June 2019
Revised form:
1 October 2020
Accepted:
9 November 2020
Published online:
21 May 2022

Keywords:

Predator-prey system;
Neimark-Sacker bifurcation;
Strange attractor;
Basin of attraction.

ABSTRACT

Introduction

In population dynamics, discrete-time dynamical systems have been used to describe interaction between ecological species. Comparing to continuous-time dynamical systems, discrete-time models are more suitable to describe populations with non overlapping generations. These models in general produce rich and complex dynamical behaviors.

Among various population interaction, predator-prey models play a fundamental rule in mathematical ecology. The dynamics of predator-prey system is greatly depend on the implementation of the functional response, the availability of prey for predation. In this paper we consider a planar system which describes a predator-prey model. In order to reveal comprehensive dynamics of the system, we employ theoretical tools such as center manifold theorem along with numerical tools based on numerical continuation method.

Material and methods

Our analysis is based on theoretical and numerical techniques. We first determine all fixed points of the system and conditions under which these points may undergo different bifurcations. To reveal more dynamics of the system, we also use numerical bifurcation methods and numerical simulations, which further examine the obtained analytical results.

Results and discussion

For the resented discrete-time predator-prey system, we compute several bifurcation curves, all possible codimension-1 and codimension-2 bifurcations on thses curves along with their corresponding normal form coefficients. By branch switching technique and employing software package MatcontM, we compute stability boundaries for several cycles up

to period 32. We also use numerical simulation, to compute basin of attraction and strange attractor emerging around a Neimark-Sacker bifurcation.

Conclusion

We can highlight the following results from this paper.

- Detection and location of all fixed points of a discrete-time predator pray system.
- Computing all possible codimension-1 and -2 bifurcation and their corresponding normal form coefficients which in turn reveal criticality of the bifurcation points and determine if extra bifurcation curves can emanate from each detected bifurcation.
- Computing orbits up to period 32 which determine stability thresholds for different cycles.
- Computing basin of attraction and strange of attractor which emerge around a Neimark-Sacker bifurcation by means of numerical simulation technique.

How to cite Moghadasi Borujeni, R., & Khoshsiar Ghaziani, R. (2022). Codimension-2 bifurcations of a discrete time predator-prey system *Mathematical Researches*, 8 (2), 1-26.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

انشعاب‌های هم‌بعد-۲ سیستم گسسته شکار و شکارچی

رعنا مقدسی بروجنی^۱✉، رضا خوش سیر قاضیانی^۲

۱. نویسنده مسئول، گروه ریاضیات، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهرکرد، ایران. پست الکترونیکی: raana.moghadasi.brn@gmail.com

۲. گروه ریاضیات، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهرکرد، ایران. پست الکترونیکی: Khoshsiar@sku.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

در این مقاله به بررسی رفتارهای دینامیکی یک سیستم گسسته شکار و شکارچی می‌پردازیم. وجود و پایداری نقاط ثابت سیستم را بررسی می‌کنیم و شرایط کافی برای وجود انشعاب فلیپ و نایمارک-ساگر را ارائه می‌دهیم. با استفاده از روش‌های عددی انشعاب و جعبه ابزار MatContM خم‌های انشعاب نقطه ثابت از قبیل خم انشعاب نایمارک-ساگر را به همراه نقاط انشعاب روی این خم‌ها به دست آورده و سیکل‌های تا تکرار ۳۲ را محاسبه می‌کنیم. تمام انشعاب‌های هم‌بعد-۱ و هم‌بعد-۲ و سوئیچ انشعاب‌های هم‌بعد ۲ را هم محاسبه می‌کنیم و در نهایت با استفاده از شبیه‌سازی عددی رفتار آشوبی سیستم را نمایش می‌دهیم.

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۳/۰۹

تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۷/۱۰

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۸/۱۹

تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۲/۳۱

واژه‌های کلیدی:

معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترا، معادلات کسری تأخیری، چندجمله‌ای‌های گنوجی، روش گالرکین، ماتریس عملیاتی، تحلیل خطا.

استناد: مقدسی بروجنی، رعنا؛ و خوش سیر قاضیانی، رضا (۱۴۰۱). انشعاب‌های هم‌بعد-۲ سیستم گسسته شکار و شکارچی. پژوهش‌های ریاضی، ۸ (۲)، ۱-۲۶.



© نویسندگان.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱. مقدمه

یک سیستم دینامیکی موقعیت هر نقطه را در فضای حالت آن سیستم با گذشت زمان شرح می‌دهد. آنچه حائز اهمیت است، درک رفتار کیفی سیستم‌های دینامیکی است. بنابراین در صورتی که مدل یک مسئله کاربردی به صورت یک سیستم دینامیکی باشد، با حل آن و دانستن وضعیت متحرک در یک لحظه‌ی خاص، می‌توان وضعیت آن را در لحظه‌های قبل و بعد پیش‌بینی کرد. هرگاه پارامترها در مدل‌های دینامیکی تغییر کنند، رفتار دینامیکی آن ممکن است دست‌خوش تغییر شود و اگر رفتار آن از لحاظ کیفی تغییر کند، در سیستم انشعاب رخ می‌دهد. آنالیز انشعاب، تغییرات دینامیکی یک سیستم دینامیکی را تحت تغییر پارامترهای سیستم تعیین می‌کند. هدف اصلی در مطالعه‌ی سیستم‌های دینامیکی یافتن یک مشخصه‌ی کامل از هندسه‌ی ساختار مدار و تغییر در ساختار مدار تحت تغییر پارامترها است. یک جنبه از این مطالعه تعیین وضعیت‌های پایدار و رفتارهای موضعی اطراف نقاط ثابت یک سیستم است. برای بررسی وقوع انشعاب، ماتریس ژاکوبین سیستم را محاسبه می‌کنیم و رفتار سیستم خطی و غیرخطی را در نزدیکی نقاط انشعاب مقایسه می‌کنیم. رفتارهای سیستم در یک نقطه‌ی انشعاب با استفاده از ضریبی به نام ضریب فرم نرمال مشخص می‌شود. ضرایب فرم نرمال رفتارهایی از قبیل جهت انشعاب‌ها و همچنین پایداری آن‌ها در نزدیکی نقاط انشعاب را تعیین می‌کند. [۱،۲] در واقع نقاط انشعاب به ازای تغییر پارامترهای سیستم ایجاد می‌شوند. این نقاط اگر تحت تغییر یک یا دو پارامتر ایجاد شوند به ترتیب انشعاب‌های هم‌بعد ۱ و ۲ نامیده می‌شوند. وقتی سیستم پارامترهایش هم‌زمان تغییر کند، معمولاً یک خم انشعاب تولید می‌کند که می‌توان آن را در صفحه‌ی دو پارامتری رسم کرد. این خم را، خم انشعاب‌های هم‌بعد-۱ می‌نامیم. این خم‌ها با امتداد سیستم از یک نقطه انشعاب هم‌بعد-۱ که شرط نقطه ثابت و یکتایی را دارا است محاسبه می‌شوند. خم همواری که از این نقاط شروع می‌شود را می‌توان با محاسبه بردار مماس در طول شاخه جدید امتداد داد. نقاط انشعاب هم‌بعد-۲ روی خم‌های مختلف انشعاب‌های هم‌بعد-۱ منشعب می‌شوند که این عمل را سوئیچ انشعاب‌ها می‌نامند. این سوئیچ‌ها تحت شرایط خاصی روی ضرایب فرم‌های نرمال آن‌ها رخ می‌دهند. بعد از تعیین کردن انشعاب‌های هم‌بعد-۱ قدم بعدی در نظر گرفتن تغییرات پارامتر دوم برای سیستم و بررسی رفتار دینامیکی در این حالت است. وقتی سیستم پارامترهایش هم‌زمان تغییر کنند، معمولاً یک خم انشعاب تولید می‌کند که می‌توان آن را در صفحه‌ی دو پارامتری رسم کرد. این خم را خم انشعاب‌های هم‌بعد-۱ می‌نامیم. نقاط انشعاب هم‌بعد-۲ روی خم‌های مختلف انشعاب‌های هم‌بعد-۱ پدیدار می‌شوند [۲].

بسته MatContM در محیط MATLAB جدیدترین و پیشرفته‌ترین نرم‌افزار شامل: الگوریتم‌هایی برای آنالیز انشعاب‌های نقاط ثابت، مدارهای نگاشت‌ها و اجرای آن‌ها است [۳، ۴، ۵، ۶]. این بسته شامل امتداد عددی نقاط ثابت با یک پارامتر آزاد، تعیین و مشخص کردن همه‌ی نقاط انشعاب هم‌بعد-۲ روی خم‌های متناظرشان است. همچنین محاسبه‌ی ضرایب فرم‌های نرمال برای همه‌ی انشعاب‌های هم‌بعد-۱ و ۲ امکان‌پذیر است. مدل گسسته‌ی شکار و شکارچی با معادلات تفاضلی زیر را در نظر می‌گیریم [۷]:

(۱)

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) - x_n y_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{b} x_n y_n \end{cases}$$

که در آن x_n و y_n به ترتیب بیانگر جمعیت شکار و شکارچی می‌باشند. a و b پارامترهای سیستم [۸] و x_0 و y_0 اعداد حقیقی مثبت هستند. هدف این مقاله، بررسی وجود و پایداری سیستم (۱) و همچنین بررسی تحلیلی و عددی رفتارهای دینامیکی آن است. برای کسب اطلاعات بیشتر در زمینه دینامیک سیستم‌های شکار و شکارچی به [۹] مراجعه کنید. در بخش اول مقاله وجود نقاط ثابت این سیستم و پایداری آن‌ها را بررسی می‌کنیم و سپس در بخش بعدی، ابتدا به صورت تحلیلی انشعاب‌های سیستم را بررسی و سپس به صورت عددی انشعاب‌های سیستم را نمایش می‌دهیم و با استفاده از شبیه‌سازی عددی، رفتار آشوبی سیستم را نمایش می‌دهیم. در بخش اول وجود و پایداری سیستم (۱) را بررسی می‌کنیم. ابتدا لم زیر را در نظر می‌گیریم:

۲. انشعاب‌های هم‌بعد-۱ و هم‌بعد-۲

۱.۲. نقاط انشعاب هم‌بعد-۱

تغییر ساختار خم نقاط ثابت تحت تغییر یک و دو پارامتر آزاد را به ترتیب نقاط انشعاب هم‌بعد ۱ و ۲ می‌نامند. این انشعاب‌ها با استفاده از محاسبه‌ی مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین تعیین می‌شوند. در بخش‌های زیر پس از تعیین نقاط انشعاب هم‌بعد-۱ شامل LP, PD و NS روی خم نقاط ثابت، به آنالیز این نقاط انشعاب که شامل محاسبه فرم‌های نرمال، ضرائب فرم‌های نرمال و رفتار دینامیکی سیستم حول این نقاط است می‌پردازیم. همچنین نرم افزار MatcontM قابلیت محاسبه این ضرائب و ارائه آن به کاربر را دارد.

۲.۲. انشعاب فلیپ

تعریف: انشعاب وابسته به وجود یک مقدار ویژه $\mu_1 = -1$ در حالی که هیچ مقدار ویژه دیگری روی دایره یکه نباشد را انشعاب فلیپ یا PD (دوره تناوب دو برابر کننده) می‌نامیم.

در یک نقطه انشعاب PD می‌توان سیستم را به منیفلد مرکزی به صورت زیر تحویل کرد

$$\omega \rightarrow -\omega + b\omega^3 + o(\omega^4),$$

فرم کلی از سیستم به شکل زیر است

$$\omega \rightarrow -\omega(1 + \alpha) + b\omega^3 + o(\omega^4), \quad \omega \in \mathbb{R}$$

که α یک ضریب است و حول مقدار بحرانی $\alpha = 0$ ، یک سیکل مرتبه دوم از نقطه ثابت منشعب می‌شود.

b ضریب فرم نرمال است و به صورت زیر محاسبه می‌شود

(۲)

$$b = \frac{1}{6} \langle p, C(q, q, q) + 3B(q, (I - A)^{-1}B(q, q)) \rangle,$$

که I یک ماتریس همانی $n \times n$ است، $Aq = -q$ ، $A^T p = -p$ و $\langle p, q \rangle = \langle q, q \rangle = 1$ اگر $b \neq 0$. آن‌گاه وقتی پارامتر کنترل از مقدار بحرانی (نقطه ای که در آن انشعاب رخ می‌دهد) عبور کند یک دور از تناوب ۲ در نقطه ثابت ایجاد می‌شود که با توجه به علامت b دو حالت زیر پیش می‌آید:

(۱) اگر $0 < b$ آن‌گاه انشعاب PD زیربحرانی است، یعنی در انشعاب PD یک سیکل از مرتبه $2k$; ($k = 1, 2, 3, \dots$) ایجاد می‌شود که پایا است و این سیکل در طرفی وجود دارد که نقطه ثابت سیستم ناپایا است. در ادامه محاسبه‌ی سیکل‌های مرتبه ۴ و ۱۶ و ۳۲ برگرفته از این موضوع است.

(۲) اگر $0 > b$ آن‌گاه انشعاب PD زیربحرانی است، یعنی در انشعاب PD یک سیکل از مرتبه $2k$ ایجاد می‌شود که ناپایا است و این سیکل در طرفی وجود دارد که نقطه ثابت سیستم پایا است.

۳.۲. انشعاب نایمارک-ساکر

تعریف. در یک انشعاب نایمارک-ساکر یا به اختصار NS، ماتریس ژاکوبین سیستم دارای یک جفت مقادیر ویژه $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$ ($0 < \theta_0 < \pi$) روی دایره یکه است، به طوری که هیچ مقدار ویژه دیگری روی دایره یکه وجود نداشته باشد. فرض می‌کنیم که $k = 1, 2, \dots$ ، $e^{ik\theta_0} \neq 1$ (این موارد را رزونانس می‌نامیم)، آن‌گاه برای مطالعه رفتار سیستم حول این نقطه می‌توان سیستم را به منیفلد مرکزی به صورت زیر تحویل کرد

$$\omega \rightarrow \omega e^{i\theta} (1 + d|\omega|^2 + o(|\omega|^4)),$$

که ω یک متغیر مختلط است و d را ضریب فرم نرمال می‌نامند که به صورت زیر داده شده است

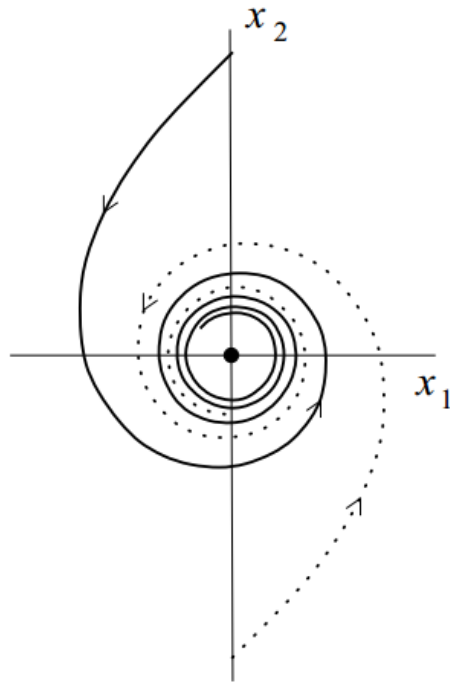
(۳)

$$d = \frac{1}{2} e^{i\theta_0} \langle p, C(q, q, \bar{q}) + 2B(q, h_{11}) + B(\bar{q}, h_{20}) \rangle,$$

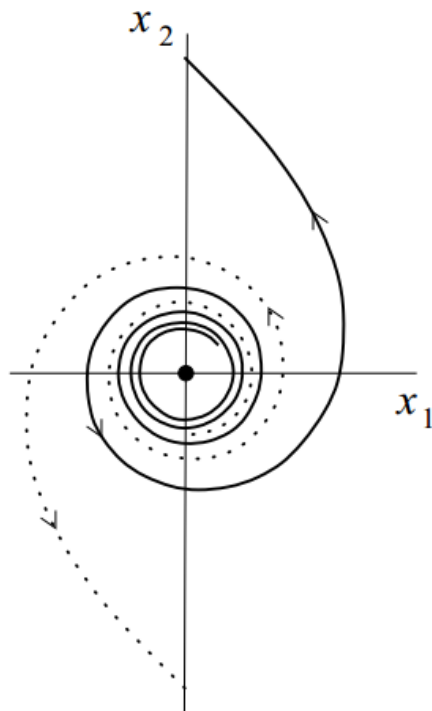
$$h_{11} = (I_n - A)^{-1} B(q, \bar{q}), \quad h_{20} = (e^{2i\theta_0} I_n - A)^{-1} B(q, q),$$

$$Aq = e^{i\theta_0} q, \quad A^T p = e^{-i\theta_0} p, \quad \langle q, q \rangle = \langle p, p \rangle = 1,$$

در یک همسایگی انشعاب NS یک خم پایای بسته ایجاد می‌شود که می‌تواند پایدار یا ناپایدار باشد. اگر $\text{Re}(d) < 0$ ، آن‌گاه انشعاب زیربحرانی است، یعنی خم بسته پایداری در قسمتی است که نقطه ثابت ناپایا است و اگر $\text{Re}(d) > 0$ ، آن‌گاه انشعاب زیربحرانی است، یعنی خم بسته ناپایداری در قسمتی واقع است که نقطه ثابت سیستم پایا است که شکل این انشعاب‌ها در شکل‌های (۱) و (۲) آورده شده است.



شکل ۱. انشعاب زبر بحرانی



شکل ۲. زبر بحرانی

۴.۲. آنالیز نقاط انشعاب هم‌بعد - ۲ نگاهت‌ها

وقتی یک سیستم دینامیکی گسسته تحت تغییر دو پارامتر قرار گیرد، ممکن است یکی از دوازده انشعاب‌های هم‌بعد-۲ از مدارهایی با دوره‌ی k ام در خانواده‌های کلی از نگاهت‌ها رخ دهد. این نقاط انشعاب روی خم‌های انشعاب‌های هم‌بعد-۱ قرار دارند. در واقع ماتریس ژاکوبین در این نقاط دارای بیش از یک مقدار ویژه روی دایره یکه است. در این قسمت همه انشعاب‌های هم‌بعد-۲ را معرفی می‌کنیم. محاسبه‌ی فرم‌های نرمال و ضرایب آن بسیار پیچیده است، برای جزئیات محاسبه این فرم‌ها و ضرایبشان به مراجع [5,10] مراجعه کنید. λ_1 و λ_2 نشان دهنده مقادیر ویژه هستند.

$$D_1 : \lambda_1 = 1, a = 0, \quad (\text{cusp, CP}),$$

$$D_2 : \lambda_2 = -1, b = 0, \quad (\text{Generalized flip, GPD})$$

$$D_3 : \lambda_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}, c = 0, \quad (\text{Chenciner bifurcation, CH}),$$

$$D_4 : \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad (1:1 \text{ Resonance, } R_1),$$

$$D_5 : \lambda_1 = \lambda_2 = -1, \quad (1:2 \text{ Resonance, } R_2),$$

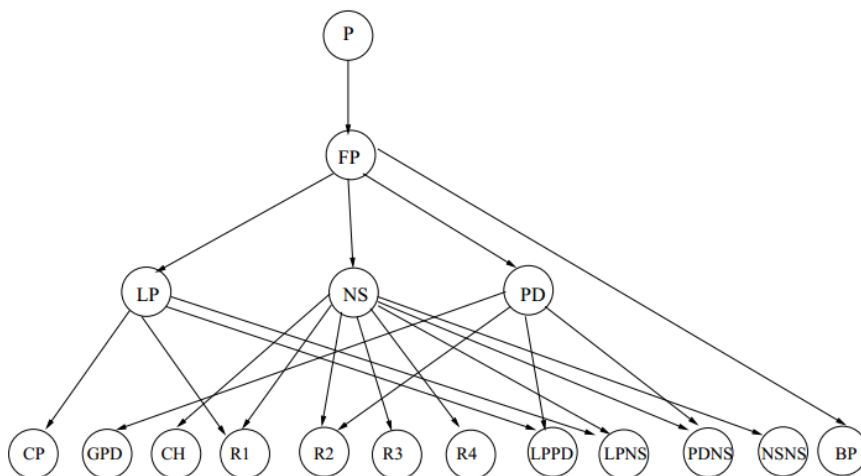
$$D_6 : \lambda_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}, \quad \theta_0 = \frac{2\pi}{3}, \quad (1:3 \text{ Resonance, } R_3),$$

$$D_7 : \lambda_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}, \theta_0 = \frac{\pi}{2}, \quad (1:4 \text{ Resonance, } R_4),$$

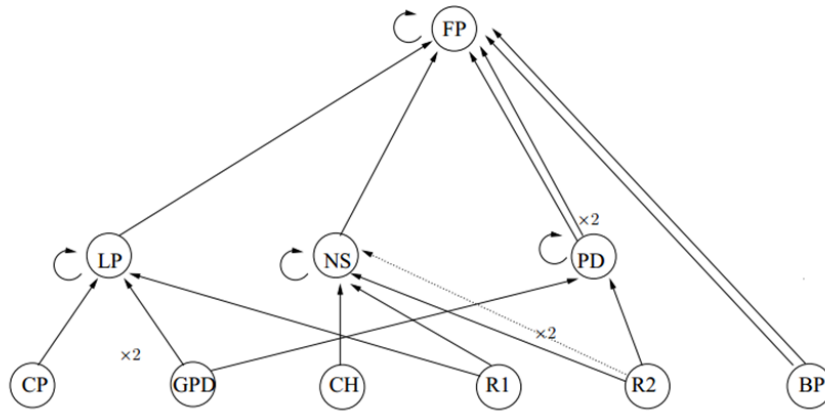
$$D_8 : \lambda_1 = \lambda_2 = -1, \quad (\text{Fold - Flip, LPPD})$$

۵.۲. گراف سوئیچ انشعاب‌ها

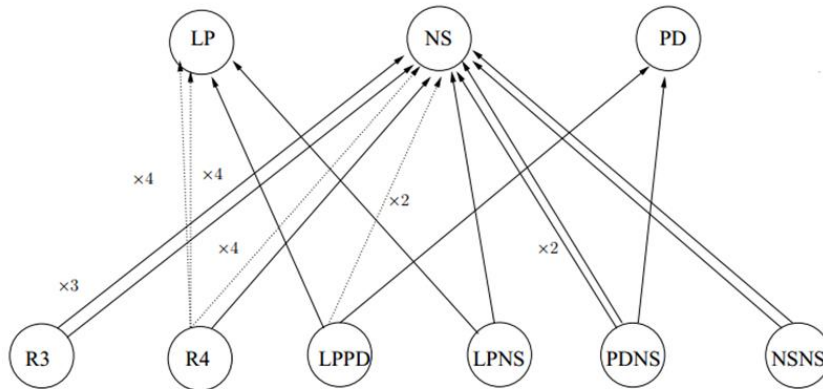
گراف‌های زیر تمامی سوئیچ‌های ممکن در نقاط انشعاب هم‌بعد ۱ و ۲ را نشان می‌دهند. پیکان‌های منشعب شده از یک نقطه انشعاب نشان‌دهنده امکان انشعاب در این نقطه است و پیکان پر رنگ به این معنا است که خم انشعاب نشان داده شده در حالت کلی وجود دارد. پیکانی که به صورت خط تیره است به این معنا است که وجود خم انشعاب جدید وابسته به شرایط نابرابری روی ضرایب فرم‌های نرمال است. نمادهای $\times 2$ ، $\times 3$ و $\times 4$ نشان‌دهنده دوره‌های خم‌های منشعب شده است. شکل‌های زیر سوئیچ گراف‌ها و تکرارهای ۲ و ۴ از انشعاب‌ها را نشان می‌دهند.



شکل ۳. مسیر گراف‌ها



شکل ۴. سوئیچ گراف اول



شکل ۵. سوئیچ گراف دوم

۳. وجود نقاط ثابت سیستم ، پایداری و آنالیز انشعاب‌های آنها

لم ۱. [11] اگر $F(\lambda) = \lambda^2 + P\lambda + Q$ معادله مشخصه ماتریس ژاکوبین سیستم (۱) در نقطه ثابت (x^*, y^*) باشد،

آن‌گاه نقطه (x^*, y^*)

(۱) چاه نامیده می‌شود، اگر $|\lambda_1| < 1$ و $|\lambda_2| < 1$ ، که چاه به طور عمومی مجانبی پایدار است.

(۲) منبع نامیده می‌شود، اگر $|\lambda_1| > 1$ و $|\lambda_2| > 1$ ، که به طور عمومی ناپایدار است.

(۳) زینی نامیده می‌شود، اگر $|\lambda_1| < 1$ و $|\lambda_2| > 1$ (یا $|\lambda_1| > 1$ و $|\lambda_2| < 1$)، که در این حالت هم ناپایدار است.

(۴) غیر هذلولوی است، اگر $|\lambda_1| = 1$ یا $|\lambda_2| = 1$.

گزارهٔ ۱.

(۱) سیستم (۱) دارای نقطه ثابت یکتای $E_1(0, 0)$ به ازای $a < \frac{1}{1-b}$ و $b < 1$ است.
 (۲) سیستم (۱) دارای نقطه ثابت یکتای $E_2(b, a(1-b) - 1)$ به ازای $a > \frac{1}{1-b}$ و $b < 1$ است.

برای مطالعه رفتار سیستم (۱) ابتدا ماتریس ژاکوبین آن را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\begin{pmatrix} a - 2ax - y & -x \\ \frac{1}{b}y & \frac{1}{b}x \end{pmatrix}$$

معادله مشخصه ماتریس ژاکوبین سیستم (۱) در نقطه ثابت E_2 به صورت زیر است

$$\lambda^2 + P\lambda + Q = 0$$

که در آن $P = 2 - ab$ و $Q = a - 2ab$ و مقادیر ویژه این معادله مشخصه هم به صورت زیر است

$$\lambda_{1,2} = -\frac{P \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$\Delta = P^2 - 4Q = (ab + 2)^2 - 4a$$

پایداری و انشعاب E_1

گزارهٔ ۲. نقطه ثابت $E_1(0, 0)$ مجانبی پایدار است اگر $a < 1$.

اثبات: $J(E_1) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. از شرط $|\lambda_1| < 1$ نتیجه می‌گیریم که $a < 1$.

گزارهٔ ۳. اگر $a = -1$ سیستم (۱) دارای انشعاب فلیپ در E_1 است و نقطه‌ی فلیپ ایجاد شده روی خم E_1 زیر بحرانی است.

اثبات: $J(E_1) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ اگر $a = -1$ ، $\lambda = -1$ ، انشعاب فلیپ را توضیح می‌دهد.

برای اثبات زیر بحرانی بودن نقطه‌ی فلیپ، کافی است ثابت کنیم که ضریب فرم نرمال b_1 مثبت است [۱۲، ۱۳].

$$b_1 = \frac{1}{6} < p, c(q, q, q) + 2B(q, (I - A)^{-1}B(q, q)) >$$

و $A^{(1)} = J(E_1)$ و $B(\cdot, \cdot)$ و $C(\cdot, \cdot, \cdot)$ به ترتیب فرم‌های خطی مرتبهٔ ۲ و ۳ و p و q به ترتیب بردارهای ویژه چپ و راست متناظر با مقادیر ویژهٔ ۱- هستند [۷]. بردارهای p و q به صورت زیر می‌باشند

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

فرم خطی $B(q, q)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$[B(q, q)]_1 = \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2(ax_n(1-x_n) - x_n y_n)}{\partial x_j \partial x_k} q_j q_k = -2aq_1 q_1 = -2a$$

$$[B(q, q)]_2 = \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2(\frac{1}{b}x_n y_n)}{\partial x_j \partial x_k} q_j q_k = 0$$

فرض کنید $\xi = (I - \lambda)^{-1}B(q, q)$ پس داریم

$$\xi = \begin{pmatrix} 2a \\ a - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[B(q, \xi)]_1 = \frac{-4a^2}{a - 1}, \quad [B(q, \xi)]_2 = 0, \quad C(q, q, q) = 0$$

و ضریب فرم نرمال b_1 به صورت

$$b_1 = \frac{1}{6} \langle p, c(q, q, q) + 2B(q, (I - A)^{-1}B(q, q)) \rangle \\ = -\frac{2a^2}{a-1} > 0$$

و به این ترتیب نتیجه حکم اثبات می‌شود.

گزاره ۴. نقطه ثابت E_1 پایداری‌اش را در یک نقطه گره زینی به ازای $a = 1$ از دست می‌دهد.

اثبات: جهت اثبات این گزاره باید ثابت کنیم که معادلات شاخه‌ای جبری (ABE) $[\lambda]$ مثبت است. ابتدا ماتریس

ژاکوبین $F_{x,y} = [T_{x,y} - I | T_a]$ در نقطه E_1 را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\begin{pmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ماتریس به ازای $a = 1$ رتبه کامل است.

در ادامه بردارهای ϕ_1, ϕ_2 و ψ را برای فضاهای پوچ $N([T_{x,y} - I | T_a])$ و $N([T_{x,y} - I | T_a]^*)$ به دست می‌آوریم که به صورت زیر هستند

$$\phi_1 = (0, 0, 1)^T, \quad \phi_2 = (1, 0, 1)^T, \quad \psi = (1, 0)^T$$

معادله ABE زیر را در نظر می‌گیریم

(۴)

$$C_{11}a^2 + 2C_{12}ab + c_{22}b^2 = 0$$

که در آن $C_{jk} = \langle \psi, F_{yy}^0 \phi_j \phi_k \rangle$ که $j, k = 1, 2$ و F_{yy}^0 یک تانسور $3 \times 3 \times 3$ و به صورت زیر است

$$F_{yy}^0(:, :, 1) = \begin{pmatrix} -2a & -1 & -2x \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix} \\ F_{yy}^0(:, :, 2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{b} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ F_{yy}^0(:, :, 3) = \begin{pmatrix} 1-2x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

که $C_{11} = 0$ و $C_{12} = 1 - 2x$ پس در نتیجه

$$C_{12}^2 - C_{11}C_{22} = (1 - 2x)^2 > 0$$

به طور وضوح مثبت است که به ازای $a = 1$ سیستم یک انشعاب گره زینی دارد.

پایداری و انشعاب E_2

گزاره ۵. نقطه ثابت $E_2(b, a(1-b) - 1)$ مجانبی پایدار است، اگر $0 < a < \frac{1}{1-2b}$ و $b < \frac{1}{2}$ که پایداری‌اش

را در شرایط زیر از دست می‌دهد.

- (۱) توسط یک نقطه‌ی شاخه‌ای، اگر $a = \frac{3}{3b-1}$
- (۲) توسط یک نقطه‌ی نایمارک-ساگر، اگر $a = \frac{1}{1-2b}$ و $a, b > 0$ و $b < \frac{1}{2}$
- (۳) توسط نقطه‌ی رزونانس 1:2، اگر $a = \frac{1}{1-b}$

اثبات:

مقادیر ویژه $J(E_2)$ به صورت زیر است

$$\lambda_{1,2} = \frac{P \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

که در آن $P = 2 - ab$ و $q = a - 2b$ و $J(E_2)$ به صورت زیر است

$$\begin{pmatrix} -ab + 1 & -b \\ \frac{a - ab - 1}{b} & 1 \end{pmatrix}$$

با استفاده از شرایط ژوری [۶]، اگر شرایط زیر برقرار باشد نقطه‌ی ثابت E_2 مجانبی پایدار است.

(۵)

- (i) $F(-1) = 1 + \text{Tr}(J(E_2)) + \text{Det}(J(E_2)) > 0$
- (ii) $F(1) = 1 - \text{Tr}(J(E_2)) + \text{Det}(J(E_2)) > 0$
- (iii) $\text{Det}(J(E_2)) > 0$

هرگاه $\text{Det}(J(E_2)) < 1$ ، $a < \frac{1}{1-2b}$ اثبات (i): اگر $a = \frac{3}{3b-1}$ ، مقدار ویژه $J(E_2)$ برابر با 1+ است؛ این به معنی وجود نقطه‌ی گره زینی است.اثبات (ii): اگر $a = \frac{1}{1-2b}$ ، $\text{Det}(J(E_2)) = 1$ ، یعنی دو مقدار ویژه با حاصل ضرب یک دارد و در نتیجه شرایط

وجود نقطه‌ی نایمارک-ساگر برقرار می‌شود.

اثبات (iii): اگر $a = \frac{1}{1-b}$ ، $\lambda_{1,2} = -1$ و در نتیجه اثبات کامل می‌شود.

۴. آنالیز انشعاب عددی E_2 و E_1

در این بخش انشعاب‌های عددی را با استفاده از جعبه ابزار MatContM در MATLAB انجام می‌دهیم. تمام انشعاب‌های هم‌بعد-۱ و هم‌بعد-۲ را به دست می‌آوریم. این انشعاب‌ها را هم به صورت نتایج عددی و هم نمودارهای انشعاب نمایش می‌دهیم. ناحیه‌ی پایداری E_1 را با $\Omega^S_{E_1}$ و ناحیه‌ی پایداری E_2 را با $\Omega^S_{E_2}$ نمایش می‌دهیم که در نمودارهای انشعاب مشاهده خواهیم کرد.

۱.۴ انشعاب عددی E_1

نقطه ثابت E_1 را با شروع از نقطه ثابت $(x,y) = (0,0)$ که به ازای پارامترهای $a=3$ و $b=0/01$ در ناحیه‌ی پایداری E_1 حاصل می‌شود تحت تغییر پارامتر آزاد a امتداد می‌دهیم، خروجی زیر را با نام Run۱ به دست می‌آوریم

Run 1: lable = BP, x=(0/000000, 0/000000, 1/000000)

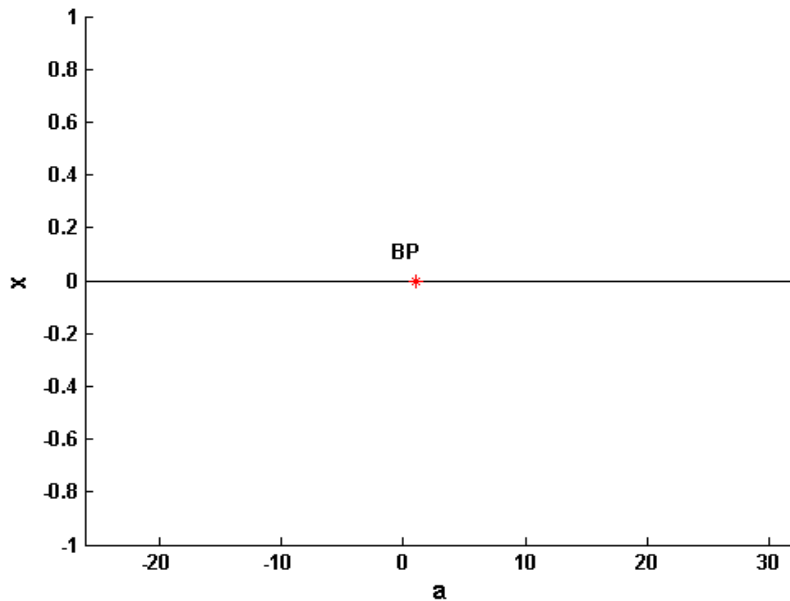
دو مولفه اول از x مقادیر مختصات نقطه ثابت E_1 هستند و مولفه آخر مقدار پارامتر آزاد a در نقطه انشعاب متناظر است، نقطه y^* یک انشعاب PB برای سیستم گسسته

(۶)

$$F = g(x, \alpha) - x = 0,$$

است، $F(y^*) = 0$ و حداقل دو خم هموار متمایز وجود داشته باشند، به طوری که در سیستم (۶) صدق کند و از نقطه y^* بگذرد.

شکل ۶ نشان‌دهنده این خم شدن نقاط ثابت و انشعاب حاصل است.



شکل ۶. منحنی نقطه شاخه‌ای ۲.

۲.۴. انشعاب عددی E_2

نقطه ثابت $E_2 = (0/33, 0/34)$ را با پارامترهای $a=2, b=0/33$ در ناحیه پایداری E_2 تحت تغییر پارامتر آزاد b امتداد می‌دهیم، خروجی زیر با نام Run۲ حاصل می‌شود

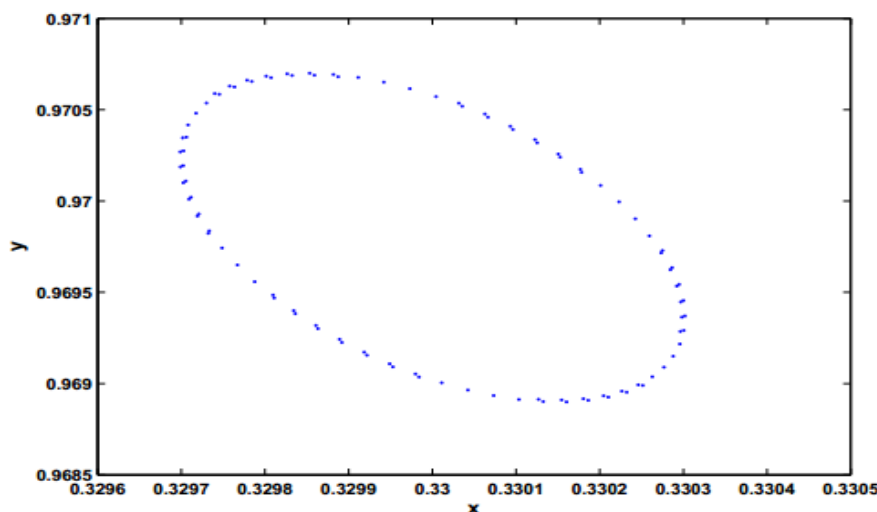
Run 2: lable = NS, $x = (0/250000, 0/500000, 0/250000)$

Normal form coefficient of NS = -8/888889e-01

تفسیر بیولوژیکی انشعاب: همان‌طور که می‌بینیم قسمت حقیقی ضریب فرم نرمال منفی است و به این معنی است که انشعاب زیر بحرانی است، یعنی خم بسته پایداری در قسمتی است که نقطه ثابت ناپایا است.

نقطه E_2 پایداری‌اش را به ازای $b = 0/250000$ در یک نقطه نایمارک-ساکر از دست می‌دهد که این نتیجه منطبق با نتیجه‌ی تحلیلی گزاره ۵ قسمت دوم است ($a = \frac{1}{1-2b}$).

در یک انشعاب نایمارک-ساگر یا به اختصار NS، ماتریس ژاکوبین سیستم دارای یک جفت مقادیر ویژه $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$ ($0 < \theta < \pi$) روی دایره یکه است، به طوری که هیچ مقدار ویژه دیگری روی دایره یکه وجود نداشته باشد. فرض می‌کنیم $k \neq 1$ ، که $1, 2, 3, 4$ $e^{\pm i\theta_0}$ (این موارد را رزونانس می‌نامیم) رزونانس‌های قوی ۱، ۲، ۳ و ۴ که به ترتیب به رزونانس قوی ۱:۱ (R_1)، رزونانس قوی ۱:۲ (R_2)، رزونانس قوی ۱:۳ (R_3) و رزونانس قوی ۱:۴ (R_4) نام‌گذاری می‌شوند. به ازای $b = 0/25999$ در همسایگی NS یک خم بسته‌ی پایا در اطراف نقطه ثابت ناپایا تشکیل می‌شود که در شکل ۷ نشان داده شده است.



شکل ۷. خم بسته‌ی پایا به ازای $a=2$, $b=0.25999$

در ادامه با شروع از نقطه انشعاب NS در Run ۲ و رسم یک منحنی از نقاط NS تحت تغییر پارامترهای آزاد a, b روی این خم، انشعاب‌های هم‌بعد-۲، R_2 , R_3 , R_4 رخ می‌دهد. خروجی با نام Run ۳ را در زیر مشاهده می‌کنیم که نمودار آن به شکل ۸ است.

Run 3: lable = R4, x= (0/400000, 2/000000, 5/000000, 0/000000)

normal form coefficient of R4: A=-1/240347e+00+6/201737e-01i

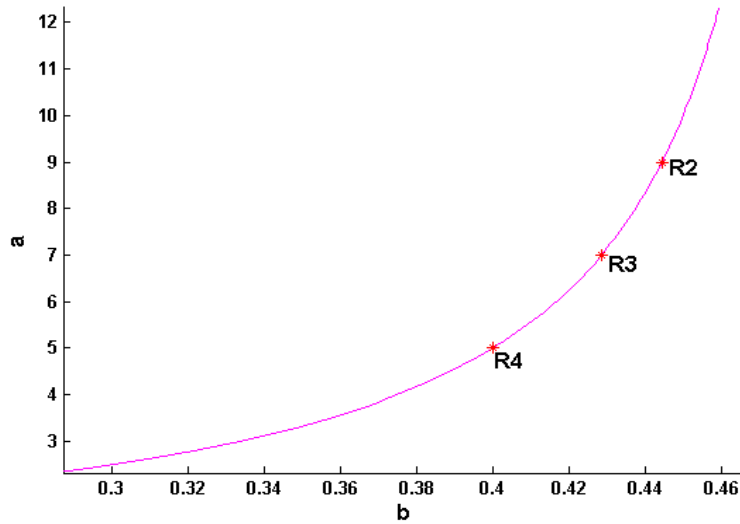
lable = R3, x= (0/428571, 3/000000, 7/000000, 0/428571, 0/500000)

normal form coefficient of R3: Re(c_1)=-5/000000e-01

lable = R2, x= (0/444444, 4/000000, 9/000000, 0/400000, -1/000000)

normal form coefficient of R2: [c,d]= 2/858854e -1/715244e+01

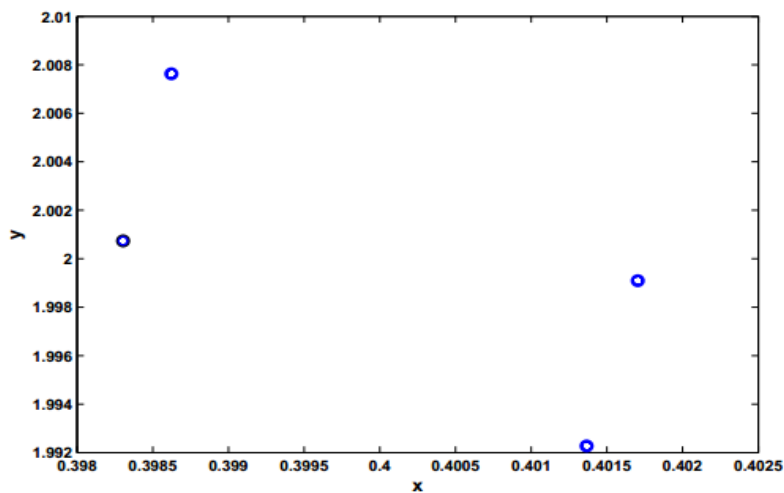
انشعاب‌های هم‌بعد-۲ محاسبه شده در طول منحنی نایمارک-ساگر، انشعاب‌های رزونانس ۱:۲، رزونانس ۱:۳ و رزونانس ۱:۴ هستند. نتایج عددی انشعاب رزونانس ۱:۲ متناظر با گزاره ۵ قسمت سوم می‌باشد.



شکل ۸. خم انشعاب نایمارک- ساکر، با شروع از نقطه انشعاب NS در Run ۲.

۳.۴. مدارهای تکرار ۴ و ۱۶ و ۳۲

از آن جا که ضریب A از R_4 در $|A| > 1$ صدق می‌کند [۱۳]، بنابراین دو سیکل از مرتبه ۴ از نگاشت منشعب می‌شود. یک -۴ سیکل پایا برای $b=0.39999642$, $a=4.9999069$ داده شده است. برای $C_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ این سیکل‌ها را در شکل ۹ می‌بینیم. همچنین چون $|A| < 1$ ، پس با شروع از نقطه R_4 دو نمودار فلد را رسم می‌کنیم که روی این دو خم فلد، انشعابات هم‌بعد-۲ را داریم که خروجی آن‌ها در زیر آورده شده، نام آن Run ۴ است و نمودار آن به شکل ۱۰ می‌باشد.



شکل ۹. یک -۴ سیکل پایا به ازای $a=4.9999069$, $b=0.39999642$.

Run 4: lable = LPPD, $x = (0/077546, 1/416831, 3/948550, 0/274951)$.

normal form coefficient of LPPD: $[a/e, b/e] = -1/638977e-01, -3/078210e+02$

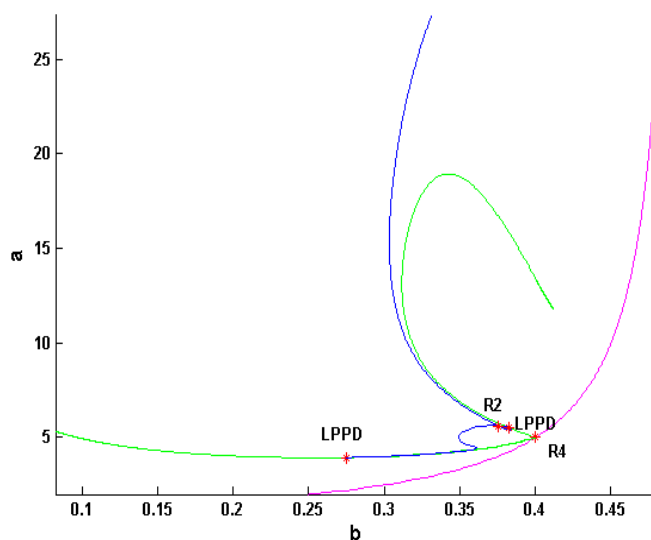
lable = LPPD, $x = (0/540029, 1/683814, 5/511767, 0/382405)$

normal form coefficient of LPPD:[a/e,be]= 7/735619e-01, -1/936842e+00

lable = CP, $x = (0/399998, 2/000006, 5/000001, 0/400000)$

normal form coefficient of CP:s= -4/546038e+00

زمانی انشعاب کاسپ-گوشه (CP) حاصل می‌شود که ماتریس ژاکوبین فقط دارای یک مقدار ویژه 1 روی دایره یک باشد. انشعاب فلد-گره زینی (LPPD) زمانی رخ می‌دهد که ماتریس ژاکوبین تنها دارای دو مقدار ویژه ساده یکی برابر با 1- و دیگری 1+ باشد و هیچ مقدار ویژه دیگری روی دایره یک وجود نداشته باشد.



شکل ۱۰. دو خم فلد LP^4 که از نقطه R_4 روی خم NS منشعب شده است.

امتداد خم فلیپ مرتبه ۴ که از نقطه LPPD در Run^4 به دست آمده، ادامه می‌یابد. خروجی آن را Run^5 می‌نامیم.

Run 5: lable = LPPD, $x = (0/459801, 2/377869, 5/511767, 0/382405)$

normal form coefficient of LPPD:[a/e,be]= 7/735689e-01, -3/212194e+01

lable = R2, $x = (0/513005, 2/276779, 5/65162, 0/375352)$

normal form coefficient of R2:[c,d]= 2/425172e+00, -1/386196e+02

شکل ۱۱ نشان دهنده این انشعاب‌ها می‌باشد. در ادامه یک خم نقطه ثابت از مرتبه ۴ را با شروع از ۴-سیکل (C_4) که در شکل ۵ دیده می‌شود محاسبه می‌کنیم. خروجی این امتداد را Run^6 می‌نامیم. خم به دست آمده در این اجرا در شکل ۱۲ دیده می‌شود.

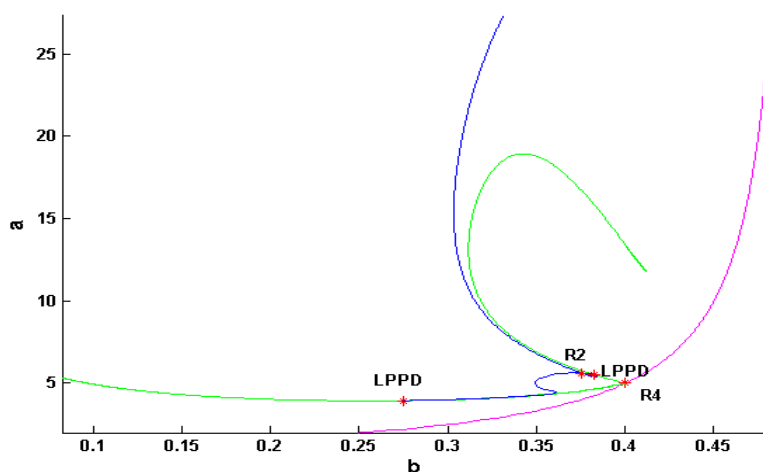
Run 6: lable = LP, x= (0/398623, 2/007628, 0/399996)

normal form coefficient of LP= 2/427508e-02

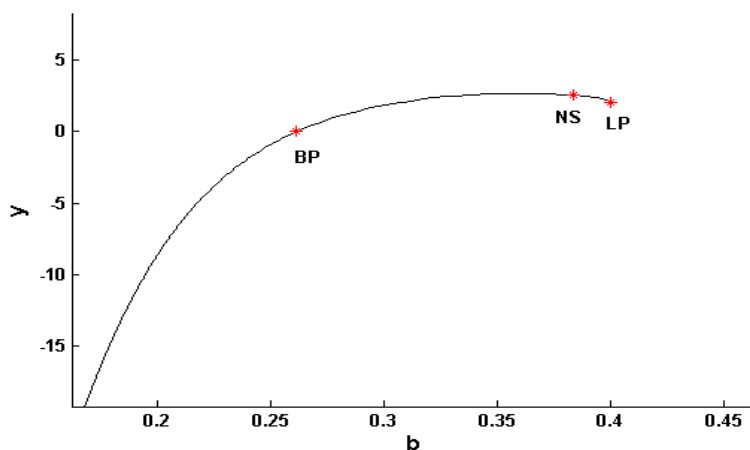
lable = NS, x= (0/249980, 2/581260, 0/383393)

normal form coefficient of NS = -1/496057e+02

lable = BP, x= (0/036654, 0/000000, 0/261399)



شکل ۱۱. دو خم گره زینی LP^4 که از نقطه‌ی R_4 روی خم NS منشعب شده است و منحنی فیلیپ مرتبه چهار (PD^4) با شروع از نقطه انشعاب $LPPD$.



شکل ۱۲. منحنی نقطه ثابت تکرار ۴ با شروع از C_4 .

سیکل مرتبه ۴ تا زمانی که $0.261399 < b < 0.399996$ باشد، پایا باقی می‌ماند. حال خم NS را که با شروع از نقطه انشعاب NS محاسبه شده، در Run۶ محاسبه کرده و آن را Run۷ می‌نامیم. این خم در شکل ۱۳ رسم شده است.

Run 7: lable = R4, x= (0/229885, 2/354194, 4/615965, 0/374982, 0/000000)

normal form coefficient of R4: A= -4/453277e+00+-1/491255e-00i

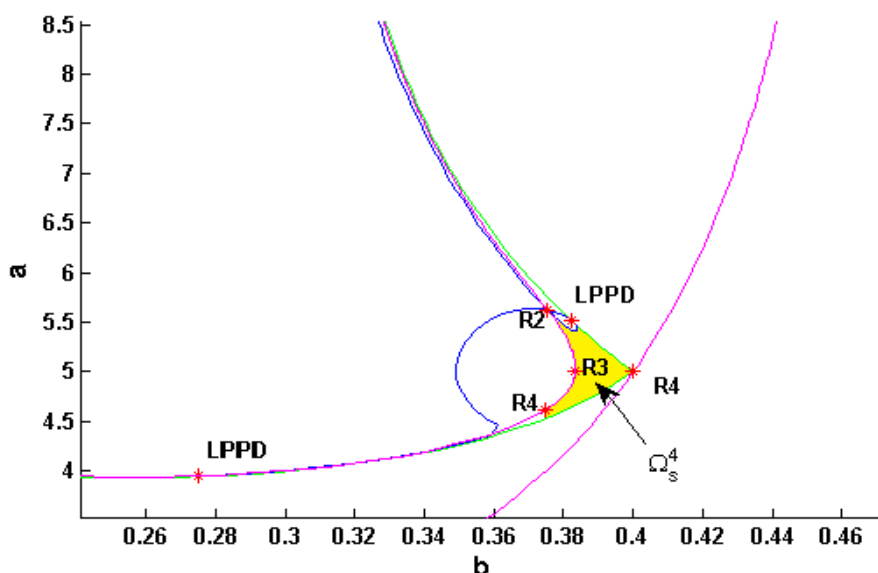
lable = R3, x= (0/249536, 2/747054, 5/218594, 0/382476, -0/500000)

normal form coefficient of R3:Re(c_1)= -6/065819e-00

lable = R2, x= (0/237339, 3/111749, 5/625162, 0/375352, -1/000000)

normal form coefficient of R2:[c,d]= 9/121279e+00 -5/172536e+02

مرز بین منحنی‌های NS^4 , PD^4 , LP^4 ناحیه پایداری C_4 است که آن را با نماد Ω_S^4 نشان داده؛ نمودارشان را در شکل ۱۳ می‌بینیم. همچنین چون $|A| > 1$ است، پس دو سیکل مرتبه ۱۶ از نگاشت تولید می‌شود این ۱۶ - سیکل صورت $\{x_1, \dots, x_{16}\}$ که $c_{16} = (0/22446117, 2/3675919)$ و $x_1 = (0/22446117, 2/3675919)$ و $a = 4/6195105$ و $b = 0/37gmai1487554$ است.



شکل ۱۳. ناحیه پایداری C_4 , (Ω_S^4) ، کران‌ها شامل خم‌های NS^4 , LP^4 , PD^4 است.

شکل این سیکل‌ها در ۱۴ آمده است. برای محاسبه ناحیه پایداری ۱۶ - سیکل، دو خم فلد از مرتبه ۱۶ را که از نقطه R_4 منشعب شده است محاسبه می‌کنیم. چون $|A| > 1$ است، پس این خم‌ها وجود دارند. خروجی این امتداد، Run۸، در زیر آمده است و شکل خم‌های آن در شکل ۱۵ آمده است.

Run 8: lable = CP, x= (0/229885, 2/354194, 4/615967, 0/374982)

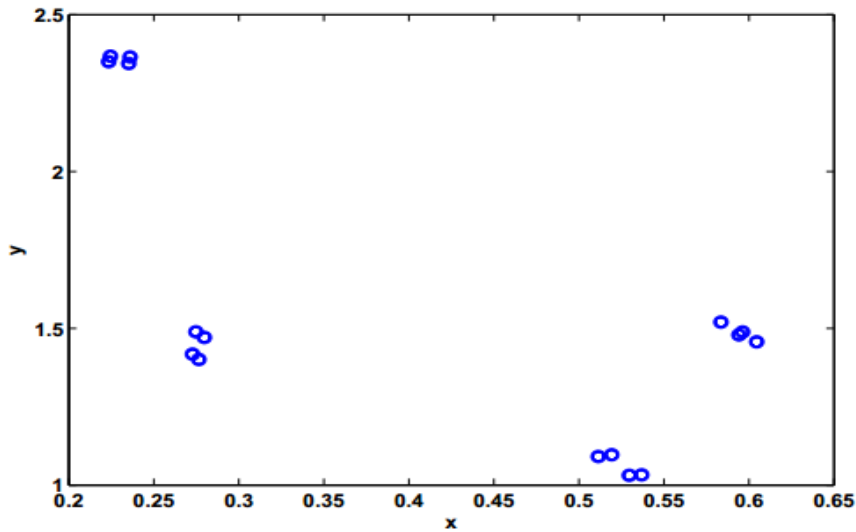
normal form coefficient of CP:s= 3/280258e+03

lable = LPPD, x= (0/245459, 2/335794, 4/651131, 0/374400)

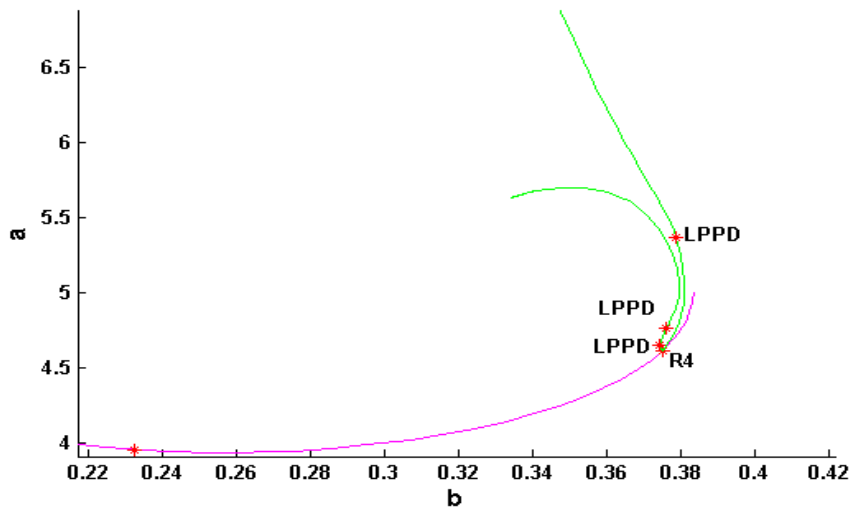
normal form coefficient of LPPD:[a/e,be]= 1/235611e+01, 3/690149e+01

lable = LPPD, x= (0/260418, 2/363215, 4/76566, 0/376169)

normal form coefficient of LPPD:[a/e,be]= e-01, -1/52023e+06



شکل ۱۴. سیکل مرتبه ۱۶.



شکل ۱۵- منحنی‌های فلد (LP^{16}) با شروع از نقطه‌ی R_4 روی منحنی NS^4 .

در ادامه یک خم نقطه ثابت از مرتبه ۱۶ را با شروع از ۱۶ - سیکل (C_{16}) که در شکل ۱۴ دیده می‌شود محاسبه می‌کنیم. خروجی این امتداد را Run ۹ می‌نامیم. خم بدست آمده در این اجرا در شکل ۱۶ نشان داده شده است. انشعاب وابسته

به وجود یک مقدار ویژه $\lambda = -1$ در حالی که هیچ مقدار ویژه دیگری روی دایره یکه نباشد را انشعاب فلیپ یا (دوره تناوب دو برابر کننده) می‌نامیم.

انشعاب وابسته به وجود یک مقدار ویژه $\lambda = 1$ در حالی که هیچ مقدار ویژه دیگری روی دایره یکه نباشد را انشعاب فلد یا (نقطه حدی) می‌نامیم.

Run 9: lable =PD, $x = (0/218246, 2/419802, 4/669990)$

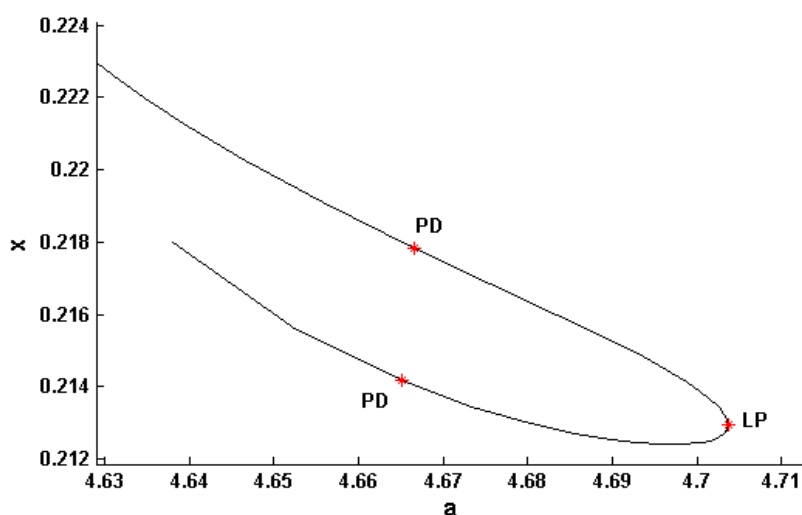
normal form coefficient of PD= $7/727454e+03$

lable = LP, $x = (0/213071, 2/455207, 4/709341)$

normal form coefficient of LP= $2/663055e+02$

lable =PD, $x = (0/214174, 2/417745, 4/668426)$

normal form coefficient of PD= $1/443275e+04$



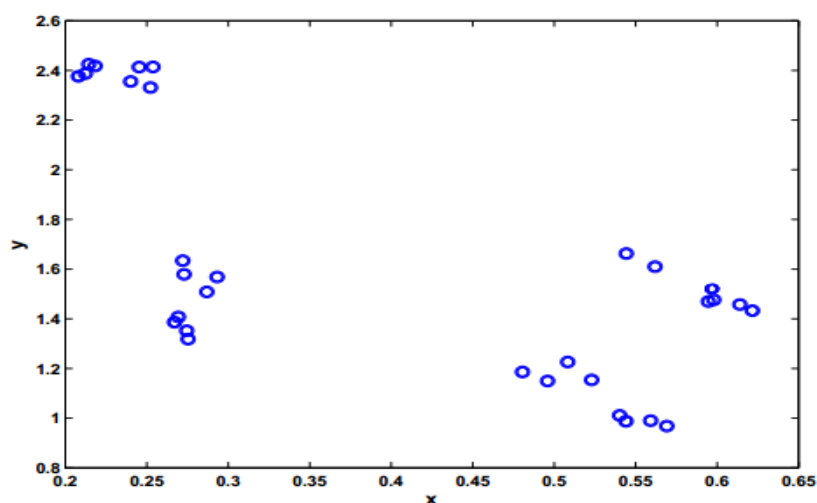
شکل ۱۶. منحنی نقطه ثابت تکرار ۱۶ با شروع از X_{16} .

سیکل مرتبه ۱۶ تا زمانی که $4.668426 < a < 4.709341$ باشد، پایا باقی می‌ماند. با شروع از نقطه‌ی PD در Run ۹

و رسم منحنی نقطه ثابت آن، یک ۳۲ - سیکل به صورت زیر ایجاد می‌شود.

می‌شود $c_{32} = \{x_1, \dots, x_{32}\}$ که $x_1 = (0/2143, 2/4248474)$ و $a = 4/671617$ و $b = 0/37487554$ است.

نمودار این سیکل‌ها در شکل ۱۷ نشان داده شده است.



شکل ۱۷. یک ۳۲-سیکل پایا به ازای $a=4.6716174$, $b=0.37487554$

حال با شروع از نقطه‌ی PD در Run ۹، منحنی PD را رسم کرده و خروجی آن را Run ۱۰ می‌نامیم. نمودار این خروجی در شکل ۱۸ نشان داده شده است.

Run 10: lable = LPPD, x= (0/669196, 0/334530, 5/540166, 0/269733)

normal form coefficient of LPPD:[a/e,be]= -7/949477e-01, -1/520023e+06

lable = LPPD, x= (0/684060, 0/344990, 6/168872, 0/270591)

normal form coefficient of LPPD:[a/e,be]= -5/038217e-01, -3/930133e+10

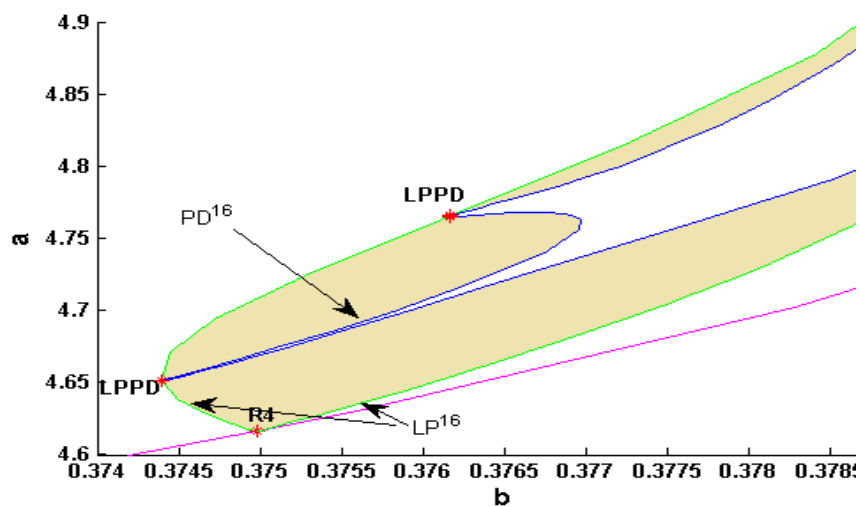
lable = R2, x= (0/6844730, 0/344914, 6/17629, 0/270646)

normal form coefficient of R2:[c,d]= 1/141891e+11, -2/856352e+11

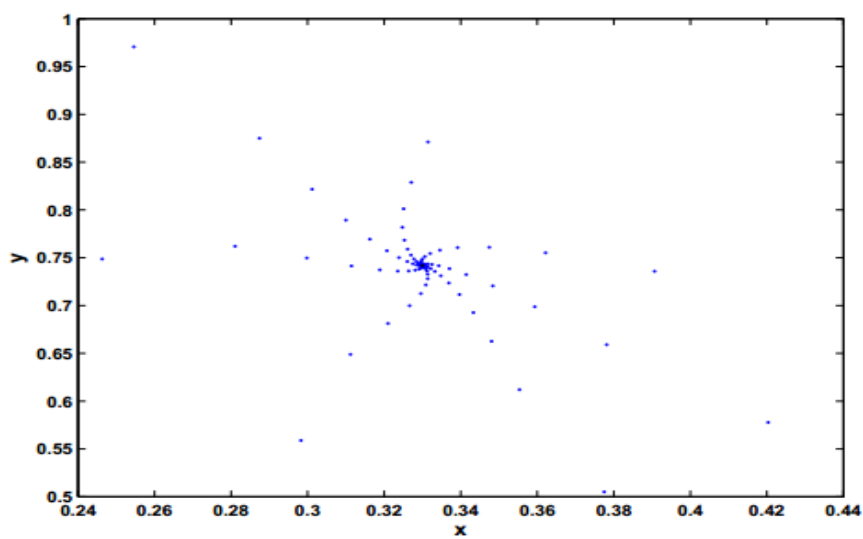
۵. شبیه سازی عددی

در این قسمت رفتار دینامیکی سیستم را در نزدیکی نقطه‌ی NS حاصل در Run ۲ بررسی می‌کنیم. فرض می‌کنیم $(x_0, y_0) = (0/250000, 0/500000)$ ، $a=2$ و b به عنوان پارامتر آزاد در نظر گرفته شود. شکل‌های ۱۹ و ۲۰ به ترتیب به ازای $b=2/6$ و $b=2/9$ حاصل می‌شود و رفتارهای نقطه ثابت E_2 را قبل از یک انشعاب NS نشان می‌دهد. شکل ۲۱ به ازای $b=3$ حاصل می‌شود و رفتارهای نقطه ثابت E_2 را بعد از انشعاب نایمارک-ساکر نشان می‌دهد و یک منحنی بسته تشکیل می‌دهد. شکل ۲۲ به ازای $b=3/5$ بدست می‌آید که نشان می‌دهد که پایداری با افزایش b به تدریج از بین می‌رود و منحنی بسته هم از هم فرو پاشیده می‌شود. شکل‌های ۲۳ به ترتیب به ازای $b=4/1$ اتفاق می‌افتد و این امر بیانگر این نکته است که هرچه مقدار b افزایش یابد سیستم ما ناپایدارتر خواهد شد.

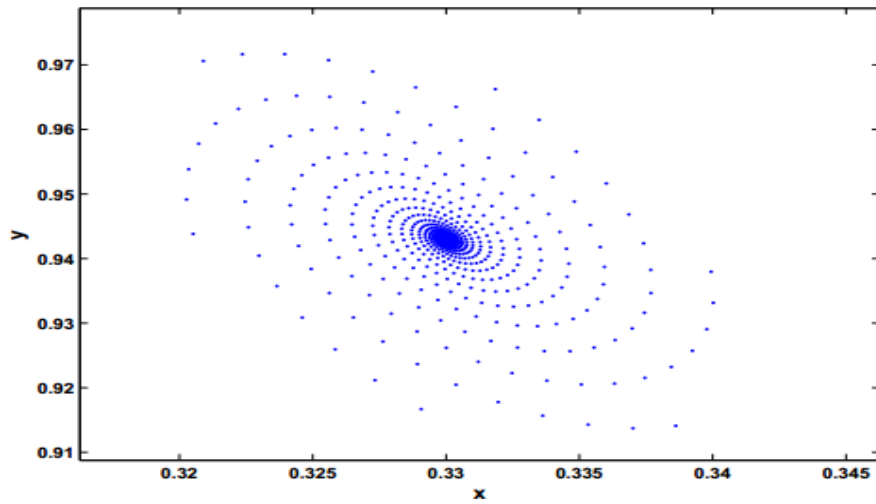
شکل ۲۴ هم به ازای $b = 4/3$ اتفاق می‌افتد و یک جاذب آشوبی را نشان می‌دهد، در این حالت شکل آشوبناک است و رفتار آن قابل کنترل نیست.



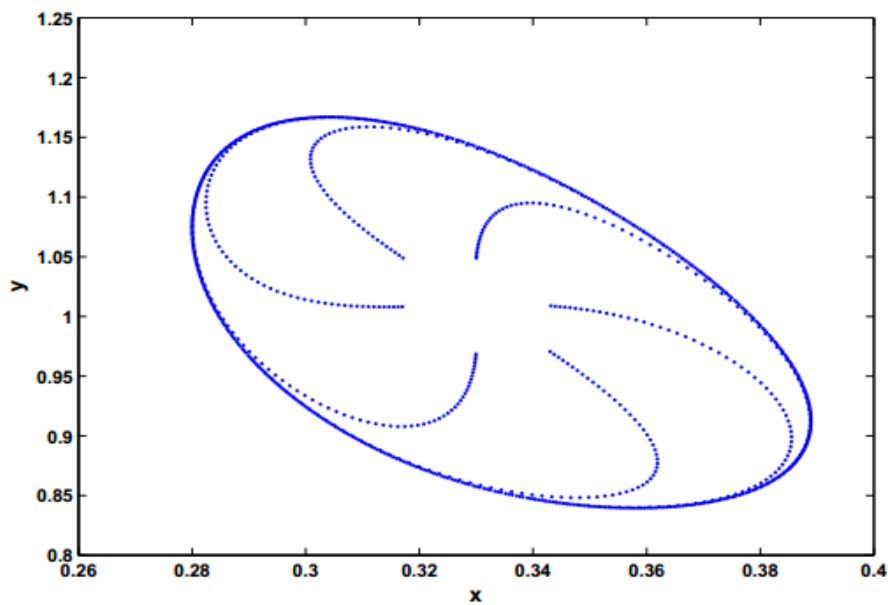
شکل ۱۸. ناحیه پایداری $C_{16}(\Omega_s^{16})$ ، یا همان مرز بین PD^{16} ، LP^{16} .



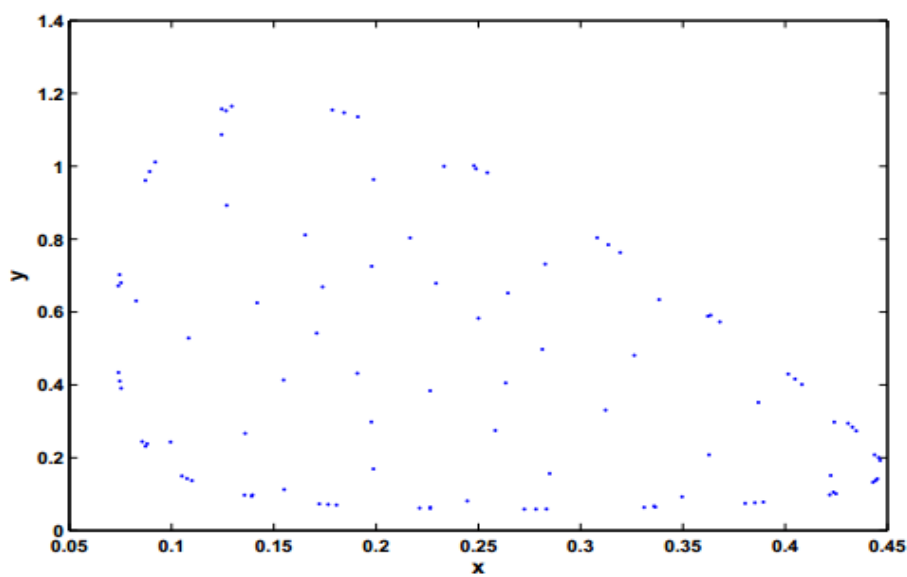
شکل ۱۹. نقطه ثابت پایدار به ازای $a=2$ ، $b=2/6$.



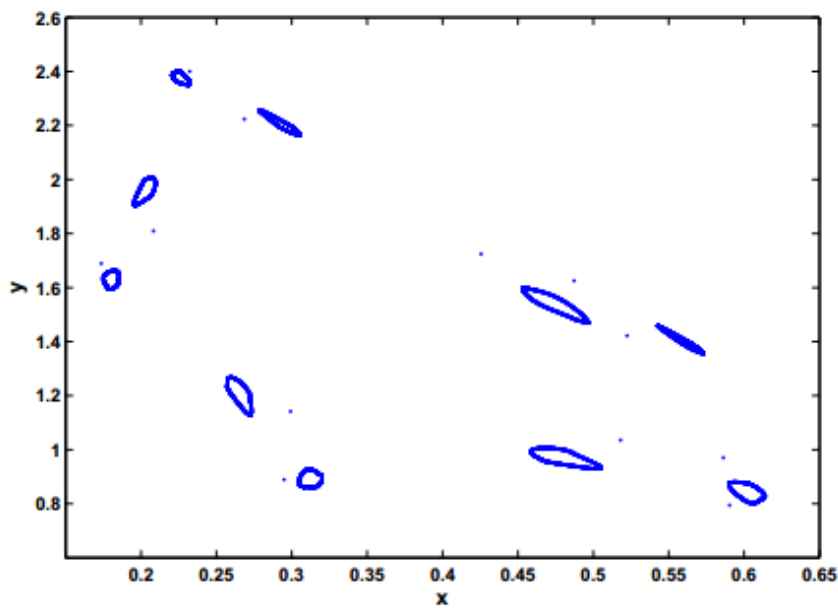
شکل ۲۰. رفتار نقطه ثابت E_2 قبل از انشعاب نایمارک-ساگر به ازای $a=2, b=2/9$.



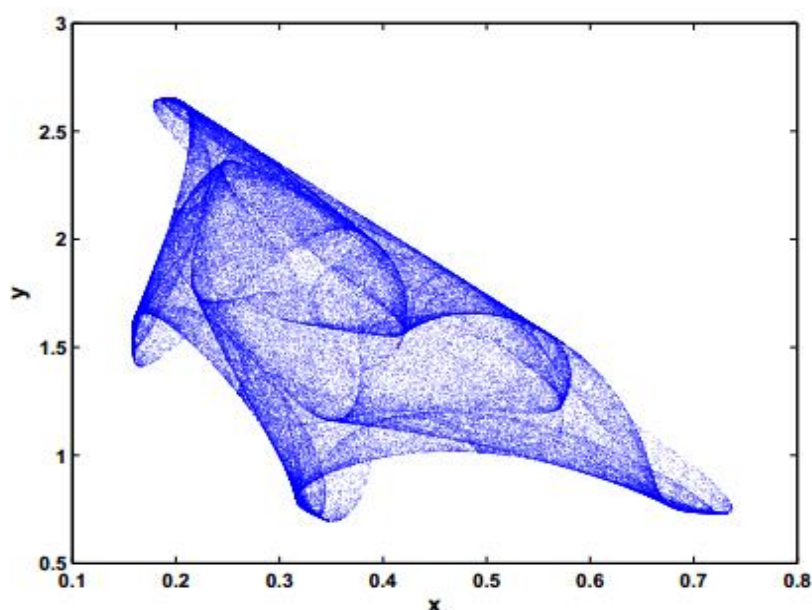
شکل ۲۱. رفتار نقطه ثابت E_2 بعد از انشعاب نایمارک-ساگر به ازای $a=2, b=3$.



شکل ۲۲. فروپاشیده شدن منحنی بسته سیستم به ازای $a=2$, $b=3/5$.



شکل ۲۳. وجود خم‌های بسته چندگانه به ازای $a=2$, $b=4/1$.



شکل ۲۴. جاذب آشوبی سیستم به ازای $a=2$, $b=4/3$.

۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله رفتار غیرخطی مدل گسسته‌ی شکار و شکارچی را بررسی کردیم. وجود انشعاب‌های فیلپ و نایمارک-ساگر را به صورت تحلیلی و با استفاده از تئوری انشعاب‌های هم‌بعد-۲ بدست آوردیم. نتایج عددی و نمودارهای انشعاب‌های عددی هم‌بعد ۱ و ۲ را به کمک جعبه ابزار MatContM به دست آورده؛ با انتخاب b به عنوان پارامتر انشعاب و ثابت در نظرگرفتن پارامتر a ، به ازای مقادیر مختلف b رفتار دینامیکی سیستم را رسم کردیم و در نهایت رفتار آشوبی آن را نمایش دادیم.

References

1. M. Danca, S. Codreanu and B. Bako, *Detailed analysis of a nonlinear prey-predator model*, Journal of Biological Physics, vol. 23, no. 1, pp. 11-20, 1997.
2. K. Murakami, *Stability and bifurcation in discrete-time predator-prey model*, Journal of Difference Equation and Applications, vol. 13, no. 10, pp. 911-925, 2007.

3. E. J. Doedel, R. A. Champeys, T. F. Farigrieve, Yu.A. Kuznestov, B. Standstede, and X. J. Wang, *AUTO 2000: Continuation and Bifurcation software for Ordinary Differential Equations (with HomCont)*, Users "Guide", Concordia University, Montreal, Canada, 1997-2000.
4. A. Dhooge, W. Govaerts, Yu. A. Kuznetov, W. Mestorm and A. Riet, *MATCONT: A Continuation toolbox in MATLAB in Proceeding of the 2 Symposium on Applied Computing*, Melbourne, FL, Association for Machinery, New York, pp. 161-166, 2003.
5. W. Govaerts, R. K. Ghaziani, Yu. A. Kunestov and H. GE. Meijer, *Numerical methods for two parameters local bifurcation analysis of maps*, SIAM Journal on Scientific Computing, no. 6, vol. 29, pp. 2644-2667, 2007.
6. *MATLAB, The Mathworks, Inc.* <http://www.mathworks.com>.
7. A. Q. Khan, *Neimark- Sacker bifurcation of a two-dimensional discrete-time predator-prey model*, SpringerPlus, 5:126 (2016).
8. J. Smith J, *Mathematical ideas in biology*, Cambridge Press, Cambridge, (1968).
9. Y. Xia, J. Cao, M.Lin, *Discrete-time analogues of predator-prey models with monotonic or nonmonotonic functional responses*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, RWA 8, no. 4, vol. 8, pp. 1079-1095, 2007.
10. H. W. Broer, K. Saleh, V. Naudot and R. Roussarie, *Dynamics of a predator-prey model with nonmonotonic response function*, Discrete and Continuous Dynamical System. Series A, no. 2&3 vol. 18, pp. 221-251, 2007.
11. Yu. A. Kuznetsov and H. G. E. Meijer, *Numerical normal forms for codim 2 bifurcations of fixed points with at most two critical eigenvalues*, SIAM Journal on Scientific Computing, no. 6, vol. 26, 2005.
12. C. L. J. Albert, *Regularity and complexity in dynamical systems*, New york: Springer, 2012.
13. W. Govaerts, R.K. Ghaziani, *Numerical bifurcation analysis of a nonlinear stage structure cannivlism population model*, Journal of Differential Equations, no. 10, vol. 12, pp. 1069-1085, 2006.
14. 14. W. Gavaerts, R. K. Ghaziani, Yu. A. Kunestov, H. Meijeir, *Bifurcation analysis of periodic orbits of map in Matlab*, prepoint, 2006.