قابلیت اعتماد سیستم‌های k از n وزنی با مؤلفه‌های تصادفی شده از چندین دسته

مرضیه صالحی، زهره شیشه‌بر، سمیه زارع‌زاده*
دانشگاه شیراز، دانشکدهٔ ریاضی

دریافت ۹۸/۰۳/۲۳ پذیرش ۹۸/۰۹/۲۴

چکیده

سیستم‌های k از n وزنی (به اختصار k/n وزنی)، از مهم‌ترین نوع ساختارهای افزونگی هستند. در این مقاله سیستم k/n وزنی با مؤلفه‌های وابسته در نظر گرفته شده است که در آن مؤلفه‌های سیستم از p دسته متمایز با طول عمرهای مختلف انتخاب می‌شوند. فرض بر این است که انتخاب مؤلفه‌های سیستم بر اساس یک بردار تصادفی $\boldsymbol{M}$ با بعد $p-1$ از میان $p-1$ دسته باشد در حالی که مؤلفه‌های باقی‌مانده نیز از آخرین دسته انتخاب می‌شوند. علاوه بر این، فرض شده است که ساختار وابستگی مؤلفه‌ها توسط یک تابع مفصل تبادل‌پذیر مدل‌بندی می‌شود. تابع قابلیت اعتماد پویای سیستم در هر زمان به عنوان آمیخته‌ای از تابع قابلیت اعتماد سیستم‌های k/n وزنی با تعداد ثابتی از مؤلفه‌های p دسته، ضرب در تابع جرم احتمال بردار $\boldsymbol{M}$ بیان می‌شود. برخی از مقایسه‌های تصادفی بین طول عمرهای دو سیستم k/n وزنی صورت گرفته است و نشان داده شده است هرگاه روش تصادفی انتخاب مؤلفه‌ها در دو سیستم از منظر ترتیب تصادفی معمولی مرتب شوند آن‌گاه، تحت شرایطی، طول عمر دو سیستم نیز مرتب می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: قابلیت اعتماد، سیستم k/n وزنی، ترتیب تصادفی معمولی، تابع مفصل.

۱. مقدمه

سیستم‌های k از n (به اختصار k/n) از مهمترین نوع ساختارهای افزونگی هستند. سیستمی با n مؤلفه را k/n گویند اگر کارکرد حداقل k مؤلفهٔ سیستم برای کارکرد سیستم الزامی باشد. در این نوع سیستم، تمام مؤلفه‌ها سهم یکسانی در کارکرد سیستم دارند. بنابراین تعداد مؤلفه‌های در حال کار، وضعیت کارکرد سیستم را مشخص می‌کنند. خواص سالخوردگی و تصادفی این سیستم‌ها در منابع بسیاری مورد مطالعه قرار گرفته است از جمله می‌توان به کو و ژو [۱۷] و اریلماز [۹] اشاره نمود. اخیراً سیستم‌های k/n به سیستم‌های k/n وزنی تعمیم داده شده‌اند، به طوری که بار یا ظرفیت هر مؤلفهٔ سیستم به عنوان وزن آن مؤلفه در سیستم در نظر گرفته می‌شود. آن‌گاه وضعیت کارکرد سیستم k/n وزنی بر اساس مجموع وزن مؤلفه‌های در حال کار آن سیستم تعیین می‌شود. به عبارت دیگر، سیستم k/n وزنی شامل n مؤلفه است و هر مؤلفه، در وضعیت کارکرد، دارای وزن صحیح و مثبت است. اگر مجموع وزن مؤلفه‌های در

*نویسنده مسئول s.zarezadeh@shirazu.ac.ir

حال کار سیستم k/n وزنی حداقل برابر با مقدار از پیش تعیین‌شده k باشد آن‌گاه سیستم در وضعیت کارکرد قرار دارد. در این مدل، k معرف حداقل مجموع وزنی برای کارکرد سیستم است و به عنوان یک وزن می‌تواند یک مقدار صحیح بیشتر از n را نیز اختیار کند (وو و چن [۲۸]، [۲۹] را ببینید). براساس این تعمیم، سیستم k/n حالت خاصی از سیستم k/n وزنی است که در آن هر مؤلفه دارای وزن یک است. در واقع، وزن به معنای سهم مؤلفه در سیستم است. مؤلفه‌ای که دارای سهم بیشتری است، وزن بیشتری را به خود اختصاص می‌دهد. سیستم‌های k/n وزنی کاربردهای زیادی در صنعت دارند که در ادامه به دو مورد اشاره می‌شود، برای مثال‌های بیشتر به سامانیگو و شیکد [۲۵] مراجعه شود.

۱) یک سیستم تولید انرژی شامل واحدهای تولید انرژی بادی، انرژی برق سوختی، ایستگاه تولید انرژی آبی و واحد انرژی هسته‌ای می‌تواند توسط سیستم k/n وزنی مدل‌بندی شود. در این مدل ظرفیت تولید هر واحد به‌عنوان وزن آن واحد در نظرگرفته می‌شود و آستانهٔ k میزان تقاضای بازار برای انرژی است.

۲) یک سیستم انتقال نفت با سه لوله برای انتقال از یک نقطه به نقطه دیگر را در نظر بگیرید. کارکرد لوله‌ها براساس ظرفیت انتقال آن‌ها (تن در دقیقه) اندازه‌گیری می‌شود. فرض کنید لوله‌ها در هر لحظه در یکی از دو وضعیت کاملاً قابل‌استفاده یا کاملاً غیرقابل‌استفاده باشند. این سیستم می‌تواند توسط مدل k/n وزنی مدل‌بندی شود که در آن ظرفیت انتقال هر لوله به عنوان وزن این مؤلفه در سیستم در نظر گرفته می‌شود و آستانه k حداقل تقاضای انتقال است.

برخی از خواص این نوع از سیستم‌ها تحت فرض استقلال مؤلفه‌ها توسط چن و یانگ [۵]، سامانیگو و شیکد [۲۵] و اریلماز [۱۰] بررسی شده است. خواص سیستم‌های k/n وزنی با مؤلفه‌های وابسته در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است. توابع مفصل، از ابزارهای کاربردی مهم در مدل‌بندی وابستگی طول عمر مؤلفه‌های سیستم هستند. مطالعه‌ای جامع بر نظریه مفصل در نلسن [۲۲] صورت گرفته است. بررسی قابلیت اعتماد سیستم‌ها با استفاده از توابع مفصل توسط ناوارو و همکاران [۱۹]، [۲۱] و وانگ و فام [۲۷] صورت گرفته است.

برخی از نویسندگان، قابلیت اعتماد سیستم k/n وزنی را تحت فرض انتخاب مؤلفه‌های سیستم از حداقل دو دستهٔ متمایز بررسی کرده‌اند. خواص این گونه سیستم‌ها توسط کوچار و زو [۱۶]، کوی و زای [۶] و ناوارو و همکاران [۲۰] بررسی شده است. اریلماز و ساریکایا [۱۳] و اریلماز [۱۱] یک سیستم k/n وزنی را در نظر گرفته‌اند که آن سیستم شامل n مؤلفه است و این مؤلفه‌ها از دو دسته با طول عمرهای متفاوت انتخاب می‌شوند. توضیح آن‌که m مؤلفهٔ سیستم از دسته $\mathfrak{C}_X$ با اجزای هم‌توزیع و $n-m$ مؤلفه دیگر آن از دسته $\mathfrak{C}_Y$ با اجزای هم‌توزیع انتخاب می‌گردند. نویسندگان مذکور نتایجی در خواص سالخوردگی و تصادفی طول عمر سیستم مطرح شده بر اساس توابع مختلف مفصل به دست آورده‌اند. منابع بیشتر جهت مطالعهٔ این‌گونه سیستم‌ها اریلماز و همکاران [۱۲] و سامانیگو و ناوارو [۲۴] هستند.

اولین بار بحث انتخاب تصادفی در نظریه قابلیت اعتماد توسط دای‌کریسنزو [۷] مطرح شد. او نشان داد انتخاب تصادفی از میان دو دسته از مؤلفه‌ها زمانی‌که دسته‌ای نسبت به دسته دیگر قابلیت اعتماد بیشتری دارد، ممکن است گزینهٔ بهتری

باشد. در این باب می‌توان به دای‌کریسنزو و پلری [۸]، هزرا وناندا [۱۵] و ناوارو و همکاران [۲۰] اشاره نمود. نگرش انتخاب تصادفی در نظریه قابلیت اعتماد در عمل کاربرد دارد. به عنوان مثال فرض کنید یک تولیدکننده برای تولید محصول خود از ترکیبی از دو نوع واحد استفاده می‌کند که این دو نوع واحد به دلایلی مانند نوع مواد اولیه، دقت نیروی انسانی به‌کار گرفته شده و شرایط محیطی دارای قابلیت اعتمادهای متفاوت هستند. یکی دیگر از کاربردهای روش تصادفی در سیستم‌های فیزیکی از قبیل رزونانس تصادفی و چرخ‌دندهٔ براونی است (به بردیچفسکی و گیترمن [۲] و بیر [۴] مراجعه شود). در توجیه کاربرد روش تصادفی توسط ناوارو و همکاران [۲۰] ذکر شده است که «البته بهترین سیستم‌ها آن‌هایی هستند که بهترین مؤلفه‌ها را شامل می‌شوند. با این حال، باید بپذیریم این گزینه همواره امکان‌پذیر نیست، شاید به این دلیل که ما نمی‌دانیم بهترین مؤلفه‌ها کدام هستند و یا می‌خواهیم از هر دو نوع مؤلفه‌ها در سیستم استفاده نماییم. در این شرایط، روش‌های تصادفی می‌توانند به بهترین سیستم‌ها منجر شوند».

قابلیت اعتماد و خواص تصادفی سیستم‌های k/n وزنی شامل مؤلفه‌هایی که با تعداد تصادفی از دو دسته انتخاب می‌شوند توسط صالحی و همکاران [۲۳] بررسی شده است. در عمل با شرایطی مواجه می‌شویم که در آن نیاز به انتخاب مؤلفه‌های سیستم از بیش از دو دسته را ایجاب می‌کند. این موضوع انگیزه‌ای برای تعمیم نتایج صالحی و همکاران [۲۳] ایجاد می‌کند.

در این مقاله، ابتدا در بخش ۲، برخی تعاریف و مفاهیم مقدماتی مورد استفاده در مقاله ارائه می‌شوند. در بخش ۳، توصیفی دقیق از سیستم k/n وزنی مورد نظر در این مقاله و مدلی برای قابلیت اعتماد آن ارائه می‌شود. سپس در بخش ۴ به مقایسه طول عمر این‌گونه سیستم‌ها تحت شرایط متفاوت پرداخته می‌شود. در پایان، بخش ۵ به بحث و نتیجه گیری اختصاص می‌یابد.

۲. تعاریف و مفاهیم مورد نیاز

در این بخش برخی از تعاریف و مفاهیم مورد استفاده در مقاله معرفی می‌شوند. در این مقاله متغیرهای تصادفی طول عمر، متغیرهای پیوسته و نامنفی در نظر گرفته می‌شوند. همچنین منظور از تابع صعودی (نزولی) تابعی یک یا چندمتغیره با دامنه‌ای در $\mathbb{R}^n$ مانند ϕ است که هرگاه $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$ آن‌گاه $\phi(\boldsymbol{x}) \leq (\geq) \phi(\boldsymbol{y})$. به عبارت دیگر، یک تابع $\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ صعودی (نزولی) است اگر و تنها اگر برای هر $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ و $\varepsilon > ۰$،

$$\phi(\boldsymbol{x} + \varepsilon \boldsymbol{e}_i) - \phi(\boldsymbol{x}) \geq (\leq) ۰ \qquad i = ۱, \ldots, n,$$

به طوری‌که $\boldsymbol{e}_i = (۰, \ldots, ۰, ۱, ۰, \ldots, ۰)$ نمایشگر i -امین بردار یکه است.

اکنون تعریف ترتیب تصادفی چندمتغیره را مطرح می‌کنیم که در آن بردارهای تصادفی مثبت موردنظر هستند و مقادیر این بردارها در $\mathbb{R}_+^n = [۰, +\infty)$ قرار می‌گیرند. قبل از آن، باید ذکر شود که مجموعه $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}_+^n$ را مجموعه‌ای صعودی (نزولی) گوییم هرگاه $\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}$ و $\boldsymbol{x} \leq (\geq) \boldsymbol{y}$ آن‌گاه $\boldsymbol{y} \in \mathcal{U}$.

تعریف ۲ .۱ بردارهای تصادفی $\boldsymbol{X}$ و Y را در نظر بگیرید. بردار تصادفی $\boldsymbol{X}$ در ترتیب تصادفی معمولی از بردار تصادفی $\boldsymbol{Y}$ کوچک‌تر است و آن را با $\boldsymbol{X} \leq_{st} \boldsymbol{Y}$ نمایش می‌دهیم هرگاه به ازای هر مجموعهٔ صعودی $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}_+^n$

$$P(\boldsymbol{X} \in \mathcal{U}) \leq P(\boldsymbol{Y} \in \mathcal{U}).$$

قضیهٔ بعد، یکی از ویژگی‌های بسیار مهم ترتیب‌های تصادفی معمولی را در حالت چندمتغیره مطرح می‌کند.

قضیهٔ ۲ .۱ برای دو بردار تصادفی $\boldsymbol{X}$ و $\boldsymbol{Y}$، $\boldsymbol{X} \leq_{st} \boldsymbol{Y}$ اگر و تنها اگر برای هر تابع نزولی ϕ داشته باشیم

$$E(\phi(\boldsymbol{X})) \geq E(\phi(\boldsymbol{Y}))$$

مشروط بر آن که امیدهای ریاضی موجود در رابطهٔ فوق وجود داشته باشند.

برای جزئیات بیشتر درمورد خصوصیات و کاربرد ترتیب‌های تصادفی به بارلو و پرشان [۱]، شیکد و شانتیکومار [۲۶] و لی و لی [۱۸] مراجعه شود.

یکی از روش‌های مناسب جهت توصیف وابستگی بین متغیرهای تصادفی استفاده از تابع مفصل است. هر تابع توزیع توأم H مربوط به بردار تصادفی $(T_۱, \dots, T_n)$ با توابع توزیع کناری $F_۱, \dots, F_n$ بر اساس قضیهٔ اسکلار (نلسن، [۲۲])، می‌تواند بدین صورت نوشته شود

$$H(t_۱, \dots, t_n) = C_\alpha(F_۱(t_۱), \dots, F_n(t_n)), \tag{۱}$$

برای هر $t_i \in \mathbb{R}$، $i = ۱, \dots, n$. در این صورت تابع $n-$متغیرهٔ $C_\alpha: [۰,۱]^n \to [۰,۱]$ تابع مفصل نامیده می‌شود. مقدار α به‌عنوان پارامتر تابع مفصل، توصیف‌کننده وابستگی بین متغیرهای $T_۱, \dots, T_n$ است. همچنین تابع مفصل C_α با فرض پیوستگی توابع توزیع $F_۱, \dots, F_n$ منحصربه فرد است و این گونه به دست می‌آید:

$$C_\alpha(u_۱, \dots, u_n) = H(F_۱^{-۱}(u_۱), \dots, F_n^{-۱}(u_n))$$

که $F_i^{-۱}(u) = \inf\{t: F_i(t) \geq u\}$، $i = ۱, \dots, n$.برعکس، اگر توابع توزیع کناری $T_۱, \dots, T_n$ و تابع مفصل معلوم باشند، آن‌گاه تابع توزیع توأم بردار تصادفی $(T_۱, \dots, T_n)$ توسط معادلهٔ (۱) به دست می‌آید. برای جزئیات بیشتر دربارهٔ تابع مفصل و خواص آن به نلسن [۲۲] مراجعه شود.

خانواده‌های پارامتری تابع مفصل متعددی وجود دارند. در برخی موارد، رابطه‌ای یک به یک بین پارامتر مفصل و ضریب کندال τ وجود دارد که در این صورت فضای پارامتری به فضایی قابل تفسیر و راحت تبدیل می‌شود. برای تابع مفصل $C_\alpha(u_۱, \dots, u_n)$، ضریب کندال τ بدین صورت تعریف می‌شود

$$\tau_n(\alpha) = \frac{۱}{۲^{n-۱}-۱}\left[۲^n \int_۰^۱ \cdots \int_۰^۱ C_\alpha(u_۱, \dots, u_n) dC_\alpha(u_۱, \dots, u_n) - ۱\right],$$

گنست و همکاران [۱۴] را ببینید.

در بین مجموعهٔ توابع مفصل، یکی از مهمترین آن‌ها مجموعهٔ توابع مفصل ارشمیدسی است که به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$C(u_۱, \dots, u_n) = \varphi(\varphi^{-۱}(u_۱) + \cdots + \varphi^{-۱}(u_n)),$$

که در آن $\varphi: [۰, +\infty] \to [۰,۱]$ تابعی پیوسته و اکیداً نزولی است و $\varphi(+\infty)=۰$، $\varphi(۰) = ۱$ و تابع معکوس آن نیز $\varphi^{-۱}$ است. تابع φ مولد ارشمیدسی تابع مفصل C است. خانواده‌هایی از قبیل کلایتون، فرانک و گامبل در مجموعهٔ توابع مفصل ارشمیدسی قرار می‌گیرند. تابع مفصل ضربی، تابع مفصل در حالت استقلال، نیز از دیگر اعضای مهم مجموعه ارشمیدسی است و تابع مولد آن به صورت $\varphi(t) = -\ln t$ است.

اکنون، تعریف تابع مفصل تبادل‌پذیر ارائه می‌شود [۲۲].

تعریف ۲.۲ برای تابع مفصل $C(u_۱, \ldots, u_n)$، اگر به ازای تمام جایگشت‌های $\boldsymbol{\pi} = (\pi(۱), \ldots, \pi(n))$ از اعداد ۱,...,n و هر $u_i \in [۰,۱], i = ۱, \ldots, n$ داشته باشیم

$$C(u_۱, \ldots, u_n) = C(u_{\pi(۱)}, \ldots, u_{\pi(n)})$$

آن‌گاه $C(u_۱, \ldots, u_n)$ یک تابع مفصل تبادل‌پذیر است.

در نظریهٔ قابلیت اعتماد، ساختار وابستگی طول عمر مؤلفه‌ها معمولاً مثبت است و این نکته باید در انتخاب تابع مفصل مدنظر قرار گیرد. در این جا دو خانوادهٔ کلایتون و FGM که اولی ارشمیدسی است ولی دومی اینگونه نیست، مورد استفاده قرار گرفته‌اند. در ادامه فرمول دقیق این دو خانواده ارائه می‌شود.

۱) تابع مفصل کلایتون $n-$متغیره به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_\alpha(u_۱, \ldots, u_n) = (u_۱^{-\alpha} + \cdots + u_n^{-\alpha} - n + ۱)^{-۱/\alpha}, \qquad \alpha \in [\frac{-۱}{n-۱}, +\infty)\backslash\{0\}$$

تابع مولد این خانواده به صورت زیر است:

$$\varphi(t) = (max\{۱ + \alpha t, ۰\})^{-۱/\alpha}.$$

برای این خانوادهٔ مفصل، مقدار ضریب کندال بدین صورت است:

$$\tau_n(\alpha) = \frac{۱}{۲^{n-۱}-۱}\left[۲^n \prod_{i=۰}^{n-1}\left(\frac{۱+i\alpha}{۲+i\alpha}\right) - ۱\right].$$

خانواده تابع مفصل $n-$متغیرهٔ FGM به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_\theta(u_۱, \ldots, u_n) = (\prod_{i=۱}^n u_i)\{۱ + \theta \prod_{i=۱}^n (۱ - u_i)\}, \qquad \theta \in (-۱,۱).$$

در این حالت ضریب کندال بدین صورت است:

$$\tau_n(\theta) = \frac{\theta}{۳^n(۲^{n-۱}-۱)}\{۱ + (-۱)^n\}.$$

لازم به ذکر است که تابع مفصل FGM به ازای $\theta > 0$ ($\theta < 0$) وابستگی مثبت (منفی) را توصیف می‌نماید.

۳. قابلیت اعتماد سیستم k/n وزنی با مؤلفه‌های تصادفی‌شده از p دسته

سیستم k/n وزنی شامل n مؤلفه وابسته را در نظر بگیرید. مؤلفه‌ها از p دسته متمایز با توزیع‌های طول عمر مختلف انتخاب می‌شوند به طوری‌که طول عمر مؤلفه‌های انتخاب شده از دسته $j-$ام هم‌توزیع با تابع توزیع F_j باشد و مؤلفه‌های

این دسته در وضعیت فعال دارای وزن w_j باشند. اگر $X_{i,j}$، $i=۱,\dots,m_j$، $j=۱,\dots,p$، نشان‌دهنده طول عمر مؤلفه‌ی i–ام از دسته j–ام باشد آن‌گاه مجموع وزن مؤلفه‌های در حال کار سیستم در زمان t توسط فرآیند تصادفی $W_n(t)$ نمایش داده می‌شود که

$$W_n(t)=\sum_{i=۱}^{m_۱} w_۱ I\big(X_{i,۱}>t\big)+\sum_{i=۱}^{m_۲} w_۲ I(X_{i,۲}>t)+\cdots+\sum_{i=۱}^{n-m_۱-\cdots-m_{p-۱}} w_p I\big(X_{i,p}>t\big),$$

که در آن نماد $I(0)$ معرف متغیر تصادفی نشانگر است. طول عمر سیستم k/n وزنی که با متغیر تصادفی T نمایش داده می‌شود برابر است با

$$T=\inf\{t: W_n(t)<k\}.$$

بنابراین تابع قابلیت اعتماد سیستم، $R(t)$، برابر است با

$$R(t)=P(T>t)=P(W_n(t)\geq k),\qquad t\geq 0.$$

اگر وابستگی بین طول عمر مؤلفه‌های سیستم توسط تابع مفصل n–بعدی C مدل‌بندی شده باشد، در این صورت تابع توزیع توأم مؤلفه‌ها، H، به‌صورت زیر بیان می‌شود

$$H(t_۱,\dots,t_n)=C(F_۱(t_۱),\dots,F_۱(t_{m_۱}),\dots,F_p(t_{m_{p-۱}+۱}),\dots,F_p(t_n)).$$

خصوصیات قابلیت اعتماد سیستم k/n وزنی با دو نوع متفاوت از مؤلفه‌های وابسته، زمانی که وابستگی توسط یک تابع مفصل مدل‌بندی می‌شود، توسط اریلماز [۱۱] بررسی شده است. صالحی و همکاران [۲۳] قابلیت اعتماد و ترتیب‌های تصادفی در سیستمی با دو دسته از مؤلفه‌ها درحالی‌که تعداد مؤلفه‌های انتخاب‌شده از هر دسته، تصادفی باشد را مورد مطالعه قرار دادند. اکنون، تابع قابلیت اعتماد سیستمی با p $(p\geq ۳)$ دسته از مؤلفه‌ها در حالی که تعداد مؤلفه‌های انتخاب‌شده از هر دسته تصادفی باشد را ارائه می‌دهیم.

قضیهٔ ۳ .۱ یک سیستم k/n وزنی با طول عمر T در نظر بگیرید که مؤلفه‌های آن به تعداد تصادفی از p $(p\geq ۳)$ دسته $\mathfrak{C}_۱,\dots,\mathfrak{C}_p$، انتخاب می‌شوند. فرض کنید متغیر تصادفی M_j، $j=۱,\dots,p$، نشان‌دهنده تعداد مؤلفه‌های انتخابی برای سیستم با طول عمر T از دسته $\mathfrak{C}_j$ باشد. همچنین مؤلفه‌های موجود در دسته $\mathfrak{C}_j$، $j=۱,\dots,p$، دارای وزن w_j و طول عمر آن‌ها هم‌توزیع با تابع قابلیت اعتماد $\bar{F}_j$ هستند. به‌علاوه فرض کنید وابستگی مؤلفه‌های سیستم توسط یک تابع مفصل تبادل‌پذیر مدل‌بندی شود. اکنون، اگر $m_۱,\dots,m_{p-۱}$ به ترتیب، مقادیر مشاهده‌شدهٔ متغیرهای تصادفی $M_۱,\dots,M_{p-۱}$ باشند، آن‌گاه تابع قابلیت اعتماد سیستم برابر است با

$$R_T(t)=\sum_{\substack{m_۱=۰\\ ۰\leq m_۱+\cdots+m_{p-۱}\leq n}}^{n}\cdots\sum_{m_{p-۱}=۰}^{n} P(M_۱=m_۱,\dots,M_{p-۱}=m_{p-۱})R_{(m_۱,\dots,m_{p-۱})}(t),$$

که در آن

$$R_{(m_1,\dots,m_{p-1})}(t) = \sum_{\substack{w_1a_1+\cdots+w_pa_p\ge k\\ 0\le a_1\le m_1\\ \vdots\\ 0\le a_p\le n-m_1-\cdots-m_{p-1}}} \cdots \sum \binom{m_1}{a_1}\cdots\binom{n-m_1-\cdots-m_{p-1}}{a_p}$$
$$\times \sum_{i_1=0}^{a_1}\cdots\sum_{i_p=0}^{a_p}(-1)^{(i_1+\cdots+i_p)}\binom{a_1}{i_1}\cdots\binom{a_p}{i_p}$$
$$\times C(\underbrace{F_1(t),\dots,F_1(t)}_{\text{بار } m_1-a_1+i_1},\dots,\underbrace{F_p(t),\dots,F_p(t)}_{\text{بار } n-m_1-\cdots-m_{p-1}-a_1\cdots-a_{p-1}+i_1+\cdots+i_p}).$$

اثبات: طبق قانون احتمال کل، تابع قابلیت اعتماد سیستم به‌صورت زیر محاسبه می‌شود

$$R_T(t) =: \sum_{\substack{m_1=0\\ 0\le m_1+\cdots+m_{p-1}\le n}}^{n}\cdots\sum_{m_{p-1}=0}^{n} P\big(T>t \,\big|\, M_1=m_1,\dots,M_{p-1}=m_{p-1}\big)$$
$$\times P(M_1=m_1,\dots,M_{p-1}=m_{p-1})$$
$$= \sum_{\substack{m_1=0\\ 0\le m_1+\cdots+m_{p-1}\le n}}^{n}\cdots\sum_{m_{p-1}=0}^{n} P(M_1=m_1,\dots,M_{p-1}=m_{p-1})$$
$$\times P(w_1\sum_{i=1}^{m_1} I\big(X_{i,1}>t\big)+\cdots+w_p\sum_{i=1}^{n-m_1-\cdots-m_{p-1}} I\big(X_{i,p}>t\big)\ge k),$$
$$= \sum_{\substack{m_1=0\\ 0\le m_1+\cdots+m_{p-1}\le n}}^{n}\cdots\sum_{m_{p-1}=0}^{n} P(M_1=m_1,\dots,M_{p-1}=m_{p-1})R_{(m_1,\cdots,m_{p-1})}(t)$$

که در آن $R_{(m_1,\cdots,m_{p-1})}(t)$. با یک تعمیم ساده از رابطه تابع قابلیت اعتماد سیستم از صالحی و همکاران [۲۳] به شکلی که در صورت قضیه آمده حاصل می‌شود.■

به مثال زیر که بر اساس نمادهای معرفی‌شده در بالاست، توجه نمایید.

مثال ۳ .۱ دو سیستم ۴/۶ وزنی با $w_1 = 3$، $w_2 = 2$، $w_3 = 1$، $F_1(t) = 1 - e^{-0/1t}$، $F_2(t) = 1 - e^{-0/2t}$ و $F_3(t) = 1 - e^{-0/3t}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید ساختار وابستگی بین مؤلفه‌ها توسط تابع مفصل FGM مدل‌بندی شده باشد. همچنین فرض کنید بردارهای تصادفی $\boldsymbol{M} = (M_1, M_2)$ و $\boldsymbol{M'} = ({M'}_1, {M'}_2)$ تعداد مؤلفه‌های انتخاب شده از مجموعه‌های $\mathfrak{C}_1$ و $\mathfrak{C}_2$ به ترتیب در سیستم‌های اول و دوم باشند. اگر بردارهای تصادفی $\boldsymbol{M}$ و $\boldsymbol{M'}$ توزیع سه جمله‌ای با $n = 6$ و بردار احتمالات $\boldsymbol{p} = (0/3, 0/4)$ و $\boldsymbol{p'} = (0/4, 0/5)$ داشته باشند، آن‌گاه طبق قضیهٔ ۳ .۱ داریم

$$R_T(t)=\sum_{\substack{m_1=0\\ 0\le m_1+m_2\le 6}}^{6}\ \sum_{m_2=0}^{6} P(M_1=m_1,M_2=m_2)R_{(m_1,m_2)}(t),$$

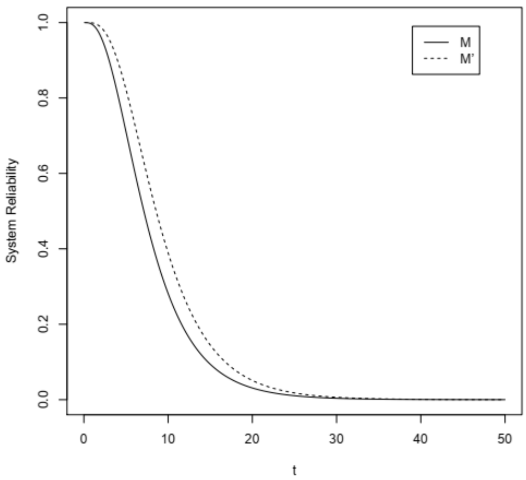
$$\times\sum_{\substack{3a_1+2a_2+a_3\ge 4\\ 0\le a_1\le m_1\\ 0\le a_2\le m_2\\ 0\le a_3\le 6-m_1-m_2}}\sum\sum\binom{m_1}{a_1}\binom{m_2}{a_2}\binom{6-m_1-m_2}{a_3}$$

$$\times\sum_{i_1=0}^{a_1}\sum_{i_2=0}^{a_2}\sum_{i_3=0}^{a_3}(-1)^{(i_1+i_2+i_3)}\binom{a_1}{i_1}\binom{a_2}{i_2}\binom{a_3}{i_3}$$

$$\times\left[(1-e^{-0/1t})^{m_1-a_1+i_1}(1-e^{-0/2t})^{m_2-a_2+i_2}(1-e^{-0/3t})^{6-m_1-m_2-a_3+i_3}\right.$$

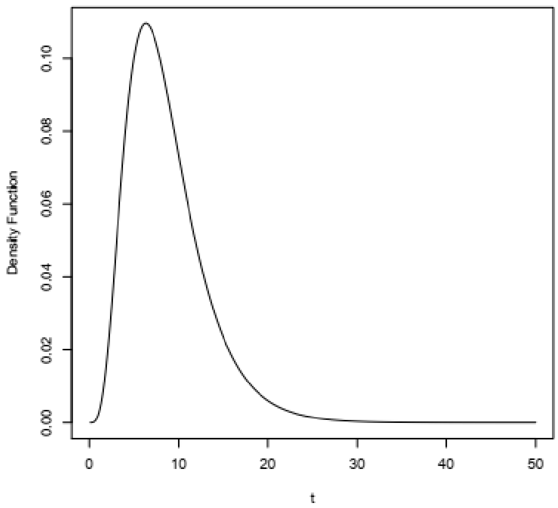
$$\left.\times\left(1+\theta(e^{-0/1t})^{m_1-a_1+i_1}(e^{-0/2t})^{m_2-a_2+i_2}(e^{-0/3t})^{6-m_1-m_2-a_3+i_3}\right)\right]$$

شکل ۱ نشان دهنده توابع قابلیت اعتماد این دو سیستم به ازای ضریب کندال $\tau=0/00001$ ($\theta=0/0112995$) است.

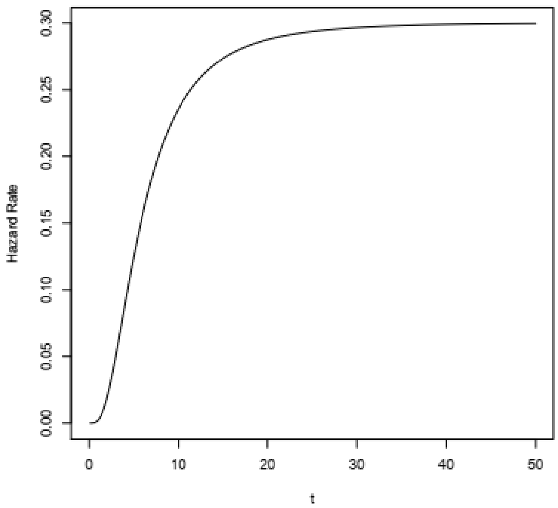


شکل ۱: توابع قابلیت اعتماد سیستم‌های مثال۳ .۱

مثال ۳ .۲ یک سیستم ۳/۷ وزنی با $w_1=1$، $w_2=2$، $w_3=3$، $F_1(t)=1-e^{-0/1t}$، $F_2(t)=1-e^{-0/2t}$ و $F_3(t)=1-e^{-0/3t}$ و مؤلفه‌های مستقل (تابع مفصل ضربی) را در نظر بگیرید. همچنین، فرض کنید بردار تصادفی $\boldsymbol{M}=(M_1,M_2)$ تعداد مؤلفه‌های انتخاب شده از مجموعه‌های $\mathfrak{C}_1$ و $\mathfrak{C}_2$ در سیستم دارای توزیع سه‌جمله‌ای با $n=7$ و بردار احتمالات $\boldsymbol{p}=(0/4,0/3)$ باشد. مقدار میانگین زمان شکست این سیستم برابر با ۸/۶۵ به دست می‌آید. شکل ۱ نشان‌دهندهٔ تابع چگالی و شکل ۲ نشان‌دهندهٔ تابع نرخ خطر این سیستم است.



شکل ۲: تابع چگالی سیستم مثال ۳ .۲



شکل ۳: تابع نرخ خطر سیستم مثال ۳ .۲

۴. مقایسهٔ تصادفی سیستم‌های k/n وزنی با مؤلفه‌های تصادفی‌شده از p دسته

در این بخش، دو سیستم k/n وزنی با طول عمرهای T و T' مقایسه می‌شوند. هدف، بررسی قابلیت اعتماد و خواص تصادفی سیستم‌های k/n وزنی با مؤلفه‌هایی است که به تعداد تصادفی از p $(p \geq ۳)$ دسته انتخاب می‌شوند. بدین منظور قبل از هر چیز لازم است لم‌های زیر مطرح و اثبات شوند.

لم زیر توسط صالحی و همکاران [۲۳] ارائه شده است و جهت ارجاع آسان در اینجا آورده می‌شود.

لم ۴ .۱ فرض کنید $X_۱, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی پیوسته باشند. تابع مفصل ارتباط‌دهندهٔ این متغیرها را با $C_{X_۱,\dots,X_n}$، توابع توزیع کناری را با $F_۱, \dots, F_n$ و تابع توزیع توأم آن‌ها را با $H_{X_۱,\dots,X_n}$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید $Z_i(t) = I(X_i > t)$، $i = ۱, \dots, n$. در این صورت یک انتخاب تبادل‌پذیر برای تابع مفصل $C_{Z_۱,\dots,Z_n}$ وجود دارد.

اکنون تعمیم لم ۲ از صالحی و همکاران [۲۳] در حالت p متغیره ارائه می‌شود.

لم ۲.۴ یک سیستم k/n وزنی را در نظر بگیرید که مؤلفه‌های آن از p $(p \geq ۳)$ دسته $\mathfrak{C}_۱, \ldots, \mathfrak{C}_p$ انتخاب می‌شوند و تعداد مؤلفه‌های انتخاب‌شده از دسته j−ام برابر با m_j است. طول عمر مؤلفه i−ام از دسته‌ی j−ام را با $X_{i,j}$، $i = ۱, \ldots, m_j$، $j = ۱, \ldots, p$، نمایش می‌دهیم. فرض کنید طول عمر مؤلفه‌های دسته j− ام هم‌توزیع با تابع قابلیت اعتماد $\bar{F}_j$ باشند و مؤلفه‌های این دسته در وضعیت فعال دارای وزن w_j باشند. فرض کنید وابستگی مؤلفه‌های سیستم توسط یک تابع مفصل تبادل‌پذیر مدل‌بندی شود. اگر

$$w_۱ \leq w_۲ \leq \cdots \leq w_p \tag{۲}$$

و برای هر t،

$$\bar{F}_۱(t) \leq \bar{F}_۲(t) \leq \cdots \leq \bar{F}_p(t) \tag{۳}$$

و $R_{(m_1,\ldots,m_{p-1})}(t)$، نشان‌دهنده تابع قابلیت اعتماد سیستم k/n وزنی باشد یا به بیان دقیق‌تر $R_{(m_1,\ldots,m_{p-1})}(t)$ برای هر t، طبق قضیه ۱.۳ بدین صورت تعریف شود

$$R_{(m_۱,\cdots,m_{p-۱})}(t) = P(w_۱ \sum_{i=۱}^{m_۱} I(X_{i,۱} > t) + w_۲ \sum_{i=۱}^{m_۲} I(X_{i,۲} > t) + \cdots + w_p \sum_{i=۱}^{n-m_۱-m_۲-\cdots-m_p} I\big(X_{i,p} > t\big) \geq k) \tag{۴}$$

که در آن k $(۱ \leq k \leq n)$ یک مقدار مشخص می‌باشد. آن‌گاه $R_{(m_۱,\cdots,m_{p-۱})}(t)$ به ازای هر t، نسبت به $(m_۱, \cdots, m_{p-۱})$ نزولی است، بدین معنی که

$$R_{(m_۱,\ldots,m_s+۱,\ldots,m_{p-۱})}(t) \leq R_{(m_۱,\ldots,m_s,\ldots,m_{p-۱})}(t), \qquad ۱ \leq s \leq p-۱.$$

اثبات: ابتدا توجه کنید که بر اساس فرض‌های (۲) و (۳) برای هر t، داریم

$$w_j I\big(X_{i,j} > t\big) \leq_{st} w_p I\big(X_{i,p} > t\big), \qquad i = ۱, \ldots, m_j,\ j = ۱, \ldots, p.$$

قرار دهید $Z_{i,j}(t) = w_j I\big(X_{i,j} > t\big)$. اگر

$$\boldsymbol{Z}^{(s)}(t) = (Z_{۱,۱}(t), \cdots, Z_{m_۱,۱}(t), \cdots, Z_{۱,s}(t), \cdots, Z_{m_s,s}(t), \cdots, Z_{۱,p}(t), \cdots, Z_{m_p,p}(t)),$$

و $Z^{(s+۱)}(t)$ با حذف یک عضو از دستهٔ p−ام و افزودن یک عضو به دسته s−ام به دست آید، به عبارت دیگر

$$\boldsymbol{Z}^{(s+۱)}(t) = (Z_{۱,۱}(t), \cdots, Z_{m_۱,۱}(t), \cdots, Z_{۱,s}(t), \cdots, Z_{m_s+۱,s}(t), \cdots, Z_{۱,p}(t), \cdots, Z_{m_p-۱,p}(t)).$$

از آن‌جا که برای یک تابع مفصل تبادل‌پذیر n−متغیرهٔ C، $(n \geq ۳)$ تمام توابع مفصل $(n-۱)$−بعدی نیز تبادل‌پذیر و برابر هستند، با استفاده از تعریف ۲.۲ و لم ۱.۴ نتیجه می‌شود

$$C_{\boldsymbol{Z}^{(s)}} = C_{\boldsymbol{Z}^{(s+۱)}}, \qquad s = ۱, \cdots, p-۱.$$

حال اگر قرار دهیم

$$W_{n,s}(t) = \sum_{i=۱}^{m_۱} Z_{i,۱}(t) + \cdots + \sum_{i=۱}^{m_s} Z_{i,s}(t) + \cdots + \sum_{i=۱}^{m_p} Z_{i,p}(t),$$

و

$$W_{n,s+۱}(t) = \sum_{i=۱}^{m_۱} Z_{i,۱}(t) + \cdots + \sum_{i=۱}^{m_s+۱} Z_{i,s}(t) + \cdots + \sum_{i=۱}^{m_p-۱} Z_{i,p}(t),$$

آن‌گاه با توجه به قضیهٔ ۶-B-۱۴ و قسمت (a) قضیهٔ ۶-B-۱۶ شیکد و شانتیکومار [۲۶]، داریم

$$W_{n,s+۱}(t) \leq_{st} W_{n,s}(t),$$

یعنی، برای هر مقدار از پیش تعیین شدهٔ k ($1 \leq k \leq n$) داریم

$$R_{(m_۱,\ldots,m_s+۱,\ldots,m_{p-۱})}(t) \leq R_{(m_۱,\ldots,m_s,\ldots,m_{p-۱})}(t), \qquad ۱ \leq s \leq p-۱,$$

و نتیجه موردنظر حاصل می‌شود.■

اکنون می‌توانیم به اثبات قضایای اصلی بپردازیم.

قضیهٔ ۱.۴ دو سیستم k/n وزنی با طول عمرهای T و T' در نظر بگیرید که مؤلفه‌های هریک از آن‌ها به تعداد تصادفی از p ($p \geq ۳$) دسته $\mathfrak{C}_۱, \ldots, \mathfrak{C}_p$، انتخاب می‌شوند. فرض کنید متغیر تصادفی M_j (M'_j)، $j = ۱, \ldots, p$، نشان‌دهندهٔ تعداد مؤلفه‌های انتخابی برای سیستم با طول عمر T (T') از دسته $\mathfrak{C}_j$ باشد. همچنین مؤلفه‌های موجود در دسته $\mathfrak{C}_j$، $j = ۱, \ldots, p$، دارای وزن w_j و طول عمر آن‌ها هم‌توزیع با تابع قابلیت اعتماد $\bar{F}_j$ هستند. به‌علاوه فرض کنید وابستگی مؤلفه‌های هر سیستم توسط یک تابع مفصل تبادل‌پذیر یکسان مدل‌بندی شود.

۱) اگر

$$(M_۱, \cdots, M_{p-۱}) \leq_{st} (M'_۱, \ldots, M'_{p-۱}),$$
$$w_۱ \leq w_۲ \leq \cdots \leq w_p,$$
$$\bar{F}_۱(t) \leq \bar{F}_۲(t) \leq \cdots \leq \bar{F}_p(t), \qquad \forall\, t > ۰.$$

آن‌گاه $T \geq_{st} T'$.

۲) اگر

$$(M_۱, \cdots, M_{p-۱}) \leq_{st} (M'_۱, \ldots, M'_{p-۱}),$$
$$w_۱ \geq w_۲ \geq \cdots \geq w_p,$$
$$\bar{F}_۱(t) \geq \bar{F}_۲ \geq (t) \cdots \geq \bar{F}_p(t), \qquad \forall\, t > ۰.$$

آن‌گاه $T \leq_{st} T'$.

اثبات: اثبات قسمت (۱) قضیه در اینجا ارائه می‌شود و قسمت (۲) به‌صورت مشابه اثبات می‌شود. بنابر قضیهٔ ۳.۱ می‌توان نوشت

$$R_T(t) = P(T > t)$$

$$= \sum_{\substack{m_1=0 \\ 0\le m_1+\cdots+m_{p-1}\le n}}^{n} \cdots \sum_{m_{p-1}=0}^{n} P(M_1=m_1,\dots,M_{p-1}=m_{p-1}) R_{(m_1,\cdots,m_{p-1})}(t)$$

$$= E(R_{(M_1,\cdots,M_{p-1})}(t)),$$

که در آن امید ریاضی نسبت به $(M_1,\dots,M_{p-1})$ است. از آنجاکه طبق لم ۲.۴ به ازای هر t، $R_{(m_1,\cdots,m_{p-1})}(t)$ نسبت به $(m_1,\dots,m_{p-1})$ نزولی است و طبق فرض

$$(M_1,\dots,M_{p-1}) \le_{st} (M'_1,\dots,M'_{p-1}),$$

پس بنابر قضیط ۱.۲ می‌توان نوشت

$$R_T(t) \ge R_{T'}(t), \qquad \forall\, t>0.$$

بنابراین قضیه برقرار است.■

قبل از ارائهٔ مثال، لازم به توضیح است که برای متغیرهای تصادفی $\boldsymbol{N}_j=(N_{1,j},\dots,N_{k,j})$، $j=1,2$، از توزیع چندجمله‌ای با احتمالات $\boldsymbol{p}_j=(p_{1,j},\dots,p_{k,j})$، $\boldsymbol{N}_1 \ge_{st} \boldsymbol{N}_2$ اگر و تنها اگر

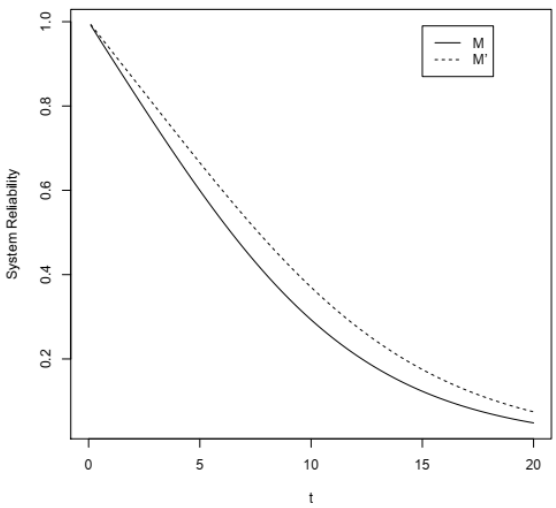
$$\sum_{i=s}^{k} p_{i,1} \ge \sum_{i=s}^{k} p_{i,2}, \qquad s=2,\cdots,k, \qquad\qquad \sum_{i=1}^{k} p_{i,1} = \sum_{i=1}^{k} p_{i,2} = 1.$$

(به باتاچاریا و ناندرام [۳] مراجعه شود).

مثال ۱.۴ دو سیستم ۴/۶ وزنی با $w_1=3$، $w_2=2$، $w_3=1$، $F_1(t)=1-e^{-0/1t}$، $F_2(t)=1-e^{-0/2t}$ و $F_3(t)=1-e^{-0/3t}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید ساختار وابستگی بین مؤلفه‌ها توسط تابع مفصل کلایتون مدل‌بندی شده باشد. همچنین فرض کنید بردارهای تصادفی $\boldsymbol{M}=(M_1,M_2)$ و $\boldsymbol{M}'=(M'_1,M'_2)$ نشان‌دهندهٔ تعداد مؤلفه‌های انتخاب شده از مجموعه‌های $\mathfrak{C}_1$ و $\mathfrak{C}_2$ به ترتیب در سیستم‌های اول و دوم باشند. اگر بردارهای تصادفی $\boldsymbol{M}$ و $\boldsymbol{M}'$ توزیع سه‌جمله‌ای با $n=6$ و بردار احتمالات $\boldsymbol{p}=(0/3,0/4)$ و $\boldsymbol{p}'=(0/4,0/5)$ داشته باشند. بنابراین شرایط قضیط ۱.۴ برقرار است و لذا تابع قابلیت اعتماد سیستم دوم بالاتر از سیستم اول قرار می‌گیرد. طبق قضیهٔ ۱.۳ تابع قابلیت اعتماد بدین صورت است

$$R_T(t) = \sum_{\substack{m_1=0 \\ 0\le m_1+m_2\le 6}}^{6} \sum_{m_2=0}^{6} P(M_1=m_1, M_2=m_2)$$
$$\times \sum_{\substack{3a_1+2a_2+a_3\ge 4 \\ 0\le a_1\le m_1 \\ 0\le a_2\le m_2 \\ 0\le a_3\le 6-m_1-m_2}} \sum\sum \binom{m_1}{a_1}\binom{m_2}{a_2}\binom{6-m_1-m_2}{a_3}$$
$$\times \sum_{i_1=0}^{a_1}\sum_{i_2=0}^{a_2}\sum_{i_3=0}^{a_3} (-1)^{(i_1+i_2+i_3)} \binom{a_1}{i_1}\binom{a_2}{i_2}\binom{a_3}{i_3}$$
$$\times \left[(m_1-a_1+i_1)(1-e^{-0/1})^{-\alpha} + (m_2-a_2+i_2)\left(1-e^{-0/2}\right)^{-\alpha}\right.$$
$$\left. +(6-m_1-m_2-a_3+i_3)(1-e^{-0/3t})^{-\alpha} - (n-a_1-a_2-a_3+i_1+i_2+i_3)+1\right]^{-1/\alpha}$$

شکل ۴ نشان دهنده تابع قابلیت اعتماد این سیستم به ازای ضریب کندال $\tau = ۰/۳$ (α=۱/۱۸۰۰۳۹) است.



شکل ۴: توابع قابلیت اعتماد سیستم‌های مثال ۴ .۱

در ادامه شرایطی را بررسی می‌کنیم که تحت آن‌ها ترتیب تصادفی بین مؤلفه‌های دو سیستم k/n وزنی، ترتیب تصادفی بین طول عمر سیستم‌ها را نتیجه می‌دهد.

قضیهٔ ۴ .۲ دو سیستم k/n وزنی با طول عمرهای T و T' در نظر بگیرید که مؤلفه‌های هریک از آن‌ها به تعداد تصادفی به ترتیب از p $(p \geq ۳)$ دسته $\mathfrak{C}_۱, \dots, \mathfrak{C}_p$ و $\mathfrak{C'}_۱, \dots, \mathfrak{C'}_p$ انتخاب می‌شوند. فرض کنید متغیر تصادفی $\boldsymbol{M}_j$، $j = ۱, \dots, p$، نشان‌دهنده تعداد مؤلفه‌های انتخابی از دسته $\mathfrak{C}_j$ و $\mathfrak{C'}_j$ برای سیستم‌های با طول عمر T و T' باشد. همچنین مؤلفه‌های موجود در دسته $\mathfrak{C}_j$، دارای وزن w_j و طول عمر با تابع قابلیت اعتماد $\bar{F}_j$ و مؤلفه‌های موجود در دسته $\mathfrak{C'}_j$، دارای وزن w_j و طول عمر با تابع قابلیت اعتماد $\bar{F}'_j$ هستند. به‌علاوه فرض کنید وابستگی مؤلفه‌های سیستم توسط یک تابع مفصل تبادل‌پذیر یکسان مدل‌بندی شود. اگر به ازای هر t، $\bar{F}_j(t) \geq \bar{F}'_j(t)$، $j = ۱, \dots, p$، آن‌گاه $T \geq_{st} T'$.

اثبات: اگر طول عمر مؤلفه‌ها در مجموعه $\mathfrak{C}_j$ و $\mathfrak{C'}_j$ را به ترتیب $X_{i,j}$ و $X'_{i,j}$، $j = ۱, \dots, p$، $i = ۱, \dots, m_j$، قرار دهیم، آن‌گاه کافی است نشان دهیم برای هر m_j،

$$w_۱ \sum_{i=۱}^{m_۱} I(X_{i,۱} > t) + \cdots + w_p \sum_{i=۱}^{m_p} I\left(X_{i,p} > t\right) \geq_{st} w_۱ \sum_{i=۱}^{m_۱} I(X'_{i,۱} > t) + \cdots + w_p \sum_{i=۱}^{m_p} I\left(X'_{i,p} > t\right)$$

بر اساس فرض داریم

$$X_{i,j} \geq_{st} X'_{i,j}, \qquad j = ۱, \dots, p,\ i = ۱, \dots, m_j,$$

و در نتیجه

$$w_j I\left(X_{i,j} > t\right) \geq_{st} w_j I\left(X'_{i,j} > t\right) \tag{۵}$$

از طرفی، لم ۴ .۱ نیز نتیجه می‌دهد که وابستگی مؤلفه‌های بردارهای تصادفی

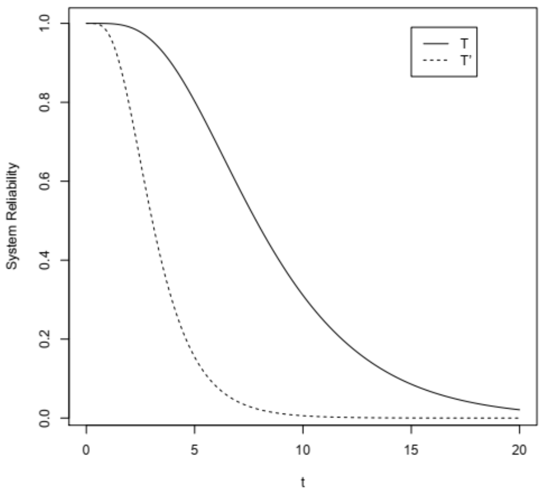
$$(I(X_{1,1} > t), \dots, I(X_{m_{1},1} > t), \dots, I(X_{1,p} > t), \dots, I(X_{m_p,p} > t))$$

و

$$(I(X'_{1,1} > t), \dots, I(X'_{m_{1},1} > t), \dots, I(X'_{1,p} > t), \dots, I(X'_{m_p,p} > t))$$

توسط یک تابع مفصل تبادل‌پذیر یکسان مدل‌بندی می‌شود. بنابراین از نامساوی (۵) و قضیظ ۶-B-۱۴ و قسمت (a) قضیهٔ ۶-B-۱۶ شیکد و شانتیکومار [۲۶] نتیجه حاصل می‌شود■.

مثال ۴ .۲ دو سیستم ۳/۷ وزنی با $w_1 = 1$، $w_2 = 2$، $w_3 = 3$، $F_1(t) = 1 - e^{-0/1t}$، $F_2(t) = 1 - e^{-0/2t}$، $F_3(t) = 1 - e^{-0/3t}$، $F'_1(t) = 1 - e^{-0/4t}$، $F'_2(t) = 1 - e^{-0/5t}$ و $F'_3(t) = 1 - e^{-0/6t}$ را در نظر بگیرید. به سادگی مشاهده می‌شود که شرایط قضیهٔ ۴ .۱ برقرار است. در اینجا فرض کنید مؤلفه‌ها مستقل هستند (تابع مفصل ضربی) و بردار تصادفی $\boldsymbol{M} = (M_1, M_2)$ تعداد مؤلفه‌های انتخاب‌شده از دسته‌های $\mathfrak{C}_j$ و $\mathfrak{C}'_j$، $j = 1,2$، در سیستم‌های اول و دوم، توزیع سه‌جمله‌ای با $n = 7$ و بردار احتمال $\boldsymbol{p} = (0/4,0/3)$ داشته باشد. شکل ۵ نشان‌دهندهٔ توابع قابلیت اعتماد این دو سیستم می‌باشد که همانطور که ملاحظه می‌شود در هر نقطهٔ t، مرتب شده‌اند.



شکل ۵: توابع قابلیت اعتماد سیستم‌های مثال ۴ .۲

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله، قابلیت اعتماد و خصوصیات تصادفی سیستم‌های k از n وزنی مورد مطالعه قرار گرفته است. مؤلفه‌های سیستم مورد مطالعه از p دسته متفاوت که بر اساس توابع قابلیت اعتماد مؤلفه‌ها دسته‌بندی شده‌اند انتخاب می‌شوند. فرض بر این است که تعداد تصادفی از مؤلفه‌ها، بردار تصادفی $\boldsymbol{M} = (M_1, \cdots, M_{p-1})$، از مجموعه‌های مورد نظر انتخاب می‌شوند. توابع مفصل متفاوتی نیز در مدل‌بندی ساختار وابستگی بین طول عمر مؤلفه‌های سیستم مورد استفاده قرار گرفته است. تابع قابلیت اعتماد سیستم به عنوان آمیخته‌ای از توابع قابلیت اعتماد سیستم‌های k از n وزنی با تعداد ثابتی از مؤلفه‌ها در هر دسته بیان شده که در آن آمیخته‌کننده جرم احتمال بردار تصادفی $\boldsymbol{M}$ است. زمانی که تعداد

تصادفی انتخاب شده از مؤلفه‌های یک سیستم k از n وزنی دارای ترتیب تصادفی باشند، آن‌گاه تحت شرایطی بر روی وزن و توزیع طول عمر مؤلفه‌ها، طول عمر دو سیستم نیز دارای ترتیب تصادفی هستند. همچنین برای نشان دادن نتایج به‌دست آمده، مثال‌هایی تحت شرایط متفاوت ارائه شده است.

References

1. Barlow, R. E., Proschan, F., "Statistical Theory of Reliability and Life Testing: Probability Models", Silver Spring, MD, (1981).

2. Berdichevsky, V., Gitterman, M., "Stochastic resonance and ratchets new manifestations", Physics A, 249 (1998) 88-95.

3. Bhattacharya, B., Nandram, B., "Bayesian inference for multinomial populations under stochastic ordering", Journal of Statistica1 Cornputation and Simulution, 54 (1996) 145-163.

4. Bier, M., "Brownian ratchets in physics and biology", Contemporary Physics, 38 (1997) 371-379.

5. Chen, Y., Yang, Q., "Reliability of two-stage weighted k-out-of-n systems with components in common", IEEE Transactions on Reliability, 54 (2005) 431-440.

6. Cui, L., Xie, M., "On a generalized k-out-of-n system and its reliability", International Journal of Systems Science, 36 (2005) 267-274.

7. Di Crescenzo, A., "A Parrondo paradox in reliability theory", The Mathematical Scientis, 32 (2007) 17-22.

8. Di Crescenzo, A., Pellerey, F., "Stochastic comparisons of series and parallel systems with randomized independent components", Operations Research Letters, 39 (2011) 380-384.

9. Eryilmaz, S., "Dynamic behavior of k-out-of-n:G systems", Operations Research Letters, 39 (2011) 155-159.

10. Eryilmaz, S., "Mean instantaneous performance of a system with weighted components that have arbitrarily distributed lifetimes.", Reliability Engineering and System Safety, 119 (2013) 290-293.

11. Eryilmaz, S., "Multivariate copula based dynamic reliability modeling with application to weighted-k-out-of-n systems of dependent components", Structural Safety, 51(2014) 23-28.

12. Eryilmaz, S., Coolen, F.P.A., Coolen-Maturi, T., "Marginal and joint reliability importance based on survival signature", Reliability Engineering and System Safety, 172 (2018) 118-128.

13. Eryilmaz, S., Sarikaya, K., "Modeling and analysis of weighted-k-out-of-n:G system consisting of two different types of components.", Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part O: Journal Risk and Reliabality, 201 (2013) 1-7.

14. Genest, C., Neslehova, J., Ghorbal, N.B., " Estimators based on Kendall's tau in multivariate copula models", Australian New Zealand Journal of Statistics, 53(2011) 157-177.

15. Hazra, N. K., Nanda, A. K., "Some results on series and parallel systems of randomized components", Operations Research Letters, 42 (2014) 132-136.

16. Kochar, S., Xu, M., "On residual lifetimes of k-out-of-n systems with nonidentical components", Probability in the Engineering and Informational Sciences, 24(2010) 109-127.

17. Kuo, W., Zuo, M.J., "Optimal Reliability Modeling: Principles and Applications", John Wiley and Sons, NewYork, (2003).

18. Li, H., Li, X., " Stochastic Orders in Reliability and Risk", Springer, New York, (2013).

19. Navarro, J., Del Aguila, Y., "Stochastic comparisons of distorted distributions, coherent systems and mixtures with ordered components", Metrika, 80 (2017) 627-648.

20. Navarro, J., Pellerey, F., Di Crescenzo, A., " Orderings of coherent systems with randomized dependent components", European Journal of Operational Research, 240 (2015) 127-139.

21. Navarro, J., Spizzichino, F., "Comparisons of series and parallel systems with components sharing the same copula", Applied Stochastic Models in Business and Industry, 26 (2010) 775-791.

22. Nelsen, R.B., "An Introduction To Copulas", Springer, NewYork, (2006).

23. Salehi, M., Shishebor, Z., Asadi, M., "On the reliability modeling of weighted k-out-of-n systems with randomly chosen components", Metrika, 82 (2018) 1-17.

24. Samaniego, F.J., Navarro, J., "On comparing coherent systems with heterogeneous components", Advances in Apllied Probability, 48(1) (2016) 88-111.

25. Samaniego, F.J., Shaked, M., "Systems with weighted components", Statistics and Probability Letters, 78 (2008) 815-823.

26. Shaked, M., Shanthikumar, J.G., "Stochastic Orders", Springer, Springer series in statistics, New York, (2007).

27. Wang, Y., Pham, H., "Modeling the dependent competing risks with multiple degradation processes and random shock using time-varying copulas", IEEE Transactions on Reliability, 61 (2012) 13-22.

28. Wu, J.S., Chen, R.J., "An algorithm for computing the reliability of a weighted-k-out-of-n system", IEEE Transactions on Reliability, 43 (1994a) 327-328.

29. Wu, J.S., Chen, R.J., "Efficient algorithms for k-out-of-n and consecutive weighted k-out-of-n: F system", IEEE Transactions on Reliability, 43 (1994b) 650-655.