نقاط ثابت دو نوع انقباض غیر دوری و ارتباط آنها با بهترین نقاط تقریبی انقباض‌های دوری متناظر

اکرم صفری هفشجانی*
گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

دریافت ۹۸/۰۳/۲۳ پذیرش ۹۸/۰۹/۲۴

چکیده

فرض کنید A و B دو زیرمجموعهٔ غیر تهی از فضای متریک (X,d) باشند. در این مقاله ابتدا دو نوع انقباض غیر دوری روی مجموعه $A\cup B$ معرفی می‌کنیم. سپس به بررسی وجود و یکتایی زوج بهینه از نقاط ثابت برای چنین نگاشت‌هایی در فضاهای متریک با در نظر گرفتن خاصیت UC می‌پردازیم. نتایج اصلی به دست آمده تعمیمی از قضایای بهترین نقاط تقریبی موجود برای انقباض‌های دوری متناظر مربوط به دی‌باری-سوزوکی-وترو و فلیسیت-الدرد هستند.

واژه‌های کلیدی: نقطهٔ ثابت، بهترین نقطهٔ تقریبی، نگاشت‌های غیر دوری و دوری، انقباض میر-کیلر، خاصیت UC.

۱. مقدمه

فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد. نقطهٔ $z\in X$ یک نقطهٔ ثابت خودنگاشت $T:X\to X$ نامیده می‌شود هرگاه $Tz=z$. همچنین اگر A و B دو زیرمجموعهٔ غیر تهی فضای X باشند، در این صورت خودنگاشت $T:A\cup B\to A\cup B$ غیر دوری [۳] نامیده می‌شود هرگاه $T(A)\subseteq A$ و $T(B)\subseteq B$، و نگاشتی دوری [۴] گفته می‌شود هرگاه $T(A)\subseteq B$ و $T(B)\subseteq A$. با فرض $d(A,B):=\inf\{d(x,y):\ x\in A,\ y\in B\}$، دوتایی مرتب $(z,u)\in A\times B$ را یک زوج بهینه از نقاط ثابت نگاشت غیر دوری T می‌نامیم هرگاه z و u نقاط ثابتی از T باشند که $d(z,u)=d(A,B)$. نقطهٔ $z\in A\cup B$ را بهترین نقطهٔ تقریبی نگاشت دوری T گوییم چنان‌چه $d(z,Tz)=d(A,B)$. در سال‌های اخیر یافتن شرایطی برای تضمین وجود، یکتایی و همگرایی نقاط ثابت و بهترین نقاط تقریبی کلاس‌های متفاوتی از خودنگاشت‌های انقباضی دوری و غیر دوری به منظور به دست آورن تعمیم‌هایی برای اصل انقباض باناخ، مورد توجه بسیاری از نویسندگان قرار گرفته است [۱، ۲، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۱۱، ۱۳]. اما در این بین بحث وجود نقاط ثابت برای نگاشت‌های غیر دوری کمتر بررسی شده است. در [۴]، الدرد و ویرامانی تعمیم زیر از اصل انقباض باناخ را برای یک نگاشت انقباض دوری به دست آوردند.

*نویسنده مسئول asafari@pnu.ac.ir

قضیه ۱. [۲] فرض کنید A و B زیرمجموعه‌هایی ناتهی و محدب از یک فضای باناخ به طور یکنواخت، محدب باشند. در این صورت چنان‌چه نگاشت $T: A\cup B \to A\cup B$ یک انقباض دوری باشد، یعنی عدد $c\in(0,1)$ موجود باشد به گونه‌ای که برای هر $(x,y)\in A\times B$ داشته باشیم:

$$d(Tx,Ty)\le cd(x,y)+(1-c)d(A,B),$$

آن‌گاه T دارای بهترین نقطهٔ تقریبی یکتایی در A مانند z است که به ازای هر نقطهٔ $x_0\in A$ دنباله $\{T^{2n}x_0\}$ همگرا به آن می‌باشد.

از طرفی میر و کیلر [۱۰]، با تعریف یک انقباض جدید به صورت زیر، تعمیم دیگری از اصل انقباض باناخ ارائه کردند.

تعریف ۱. [۱۰] خودنگاشت $T: X\to X$ یک انقباض میر-کیلر نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $\varepsilon>0$، عددی مانند $\delta>0$ موجود باشد به گونه‌ای که برای هر $x,y\in X$ داشته باشیم:

$$\varepsilon\le d(x,y)<\varepsilon+\delta \;\Rightarrow\; d(Tx,Ty)<\varepsilon.$$

بعد از آن بسیاری از نویسندگان از ایدهٔ میر و کیلر استفاده کرده و تعمیم‌های دیگری از اصل انقباض باناخ به دست آورده و قضایای نقطهٔ ثابت جدیدی را ارائه نمودند [۲، ۹، ۱۲]. از جمله در سال ۲۰۰۸ دی‌باری، سوزوکی و وترو [۲] به معرفی مفهوم نگاشت‌های انقباض دوری میر-کیلر پرداخته و تعمیمی از قضیهٔ ۱ را برای این کلاس از توابع به دست آوردند. اما یک نکتهٔ ساده و قابل توجه این است که چنان‌چه T یک خودنگاشت دوری باشد خودنگاشت T^2 غیر دوری خواهد بود. با توجه به این ارتباط ساده این سوال مطرح می‌شود که آیا می‌توان با تعریف یک انقباض غیر دوری میر-کیلر، قضیهٔ دی‌باری-سوزوکی-وترو را به این کلاس از خودنگاشت‌ها تعمیم داد؟ جواب ما به این سوال مثبت است. در بخشی از این مقاله به معرفی انقباض‌های غیر دوری میر-کیلر پرداخته، سپس به بررسی شرایط وجود و یکتایی نقاط ثابت برای این کلاس از توابع در یک فضای متریک با استفاده از خاصیت UC می‌پردازیم. نتیجه‌ای که به دست خواهیم آورد تعمیمی از قضیهٔ دی‌باری- سوزوکی- وترو خواهد بود.

تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را در نقطهٔ x_0 نیمه پیوسته پایینی می‌نامیم هرگاه به ازای هر $\lambda<f(x_0)$ عدد حقیقی $\eta>0$ موجود باشد به گونه‌ای که برای هر $x\in(x_0-\eta,x_0+\eta)$ داشته باشیم $\lambda\le f(x)$. همچنین تابع f را نیمه پیوسته بالایی می‌گوییم هرگاه $-f$ نیمه پیوسته پایینی باشد. ثابت می‌شود تابع f در نقطهٔ x_0 نیمه پیوسته پایینی است اگر و تنها اگر $f(x_0)\le\liminf_{t\to x_0} f(t)$ و لذا در نقطهٔ x_0 نیمه پیوسته بالایی است اگر و تنها اگر $\limsup_{t\to x_0} f(t)\le f(x_0)$. به طور مشابه مفهوم نیمه پیوسته بالایی از راست برای تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تعریف شده و نتیجه می‌شود که تابع f در نقطهٔ x_0 نیمه پیوسته بالایی است اگر و تنها اگر $\limsup_{t\to x_0^+} f(t)\le f(x_0)$. با این توضیحات فرض کنیم $\psi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ یک تابع نیمه پیوسته بالایی از راست باشد به این معنا که به ازای هر $s\in[0,+\infty)$ داشته باشیم:

$$\limsup_{t\to s^+}\psi(t)\le\psi(s).$$

همچنین فرض کنید به ازای هر $t>0$ داریم: $0\le\psi(t)<t$. در سال ۲۰۱۵، فلیسیت و الدرد [۶] تعمیمی از قضیهٔ ۱ برای اثبات وجود و یکتایی بهترین نقطهٔ تقریبی برای انواعی از خودنگاشت‌های p-دوری $T:\bigcup_{i=1}^{p}A_i\to\bigcup_{i=1}^{p}A_i$ که برای هر $1\le i\le p$ و هر $(x,y)\in A_i\times A_{i+1}$ در شرط زیر صادق باشند:

$$d(Tx,Ty)-d(A,B)\le\psi(d(x,y)-d(A,B)),$$

را به دست آوردند. از آنجا که برای یک نگاشت p-دوری نگاشت T^p روی $A_i\cup A_{i+1}$ برای هر $1\le i\le p$ غیر دوری است، لذا در بخش دیگری از این مقاله به بررسی شرایط وجود و یکتایی نقاط ثابت برای نگاشت‌های غیر دوری $T:A\cup B\to A\cup B$ با شرط انقباض مشابه می‌پردازیم. خواهیم دید که قضیهٔ فلیسیت-الدرد نتیجه‌ای از قضیهٔ اصلی این قسمت است.

۲. تعاریف و پیش نیازها

این بخش را با تعریف یک L-تابع که برای توصیف انقباض‌های میر-کیلر مفید خواهد بود آغاز می‌کنیم.

تعریف ۲. تابع $\varphi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ یک L-تابع نامیده می‌شود هرگاه در سه شرط زیر صدق کند:

۱) $\varphi(0)=0$،

۲) به ازای هر $s\in(0,+\infty)$ داشته باشیم $\varphi(s)>0$،

۳) به ازای هر $s\in(0,+\infty)$ عددی مانند $\delta>0$ موجود باشد به‌گونه‌ای که برای هر $t\in[s,s+\delta]$ داشته باشیم $\varphi(t)\le s$.

لم ۱. [۱۲] L-تابع φ و دنبالهٔ صعودی $\{s_n\}$ از اعداد حقیقی غیر منفی را در نظر بگیرید. فرض کنید به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ که $s_n>0$ داشته باشیم: $s_{n+1}\le\varphi(s_n)$. در این صورت $\lim_{n\to\infty}s_n=0$.

لم ۲. [۹] فرض کنید f و g توابعی از مجموعه ناتهی Y به $[0,+\infty)$ باشند. در این صورت گزاره‌های زیر معادل هستند:

۱) برای هر $\varepsilon>0$، عددی مانند $\delta>0$ موجود است به گونه‌ای که

$$x\in Y\ ,\ f(x)<\varepsilon+\delta\ \Rightarrow\ g(x)<\varepsilon.$$

۲) یک L-تابع(صعودی و پیوسته) φ موجود است به گونه‌ای که

$$x\in Y\ ,\ f(x)>0\ \Rightarrow\ g(x)<\varphi(f(x)),$$
$$x\in Y\ ,\ f(x)=0\ \Rightarrow\ g(x)=0.$$

در ادامه بدون هیچ تغییر محسوسی یک انقباض غیر دوری میر-کیلر را مشابه با یک انقباض دوری میر کیلر [۲] تعریف می‌کنیم. برای پرهیز از تکرار، از تعریف یک انقباض دوری میر-کیلر صرف نظر می‌نماییم.

تعریف ۳. فرض کنید A و B دو زیرمجموعهٔ غیر تهی فضای متریک (X,d) باشند. در این صورت نگاشت غیر دوری $T: A\cup B \to A\cup B$ یک انقباض غیر دوری میر-کیلر نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $\varepsilon>0$، عددی مانند $\delta>0$ موجود باشد به گونه‌ای که برای هر $(x,y)\in A\times B$ که $d(x,y)<d(A,B)+\varepsilon+\delta$ داشته باشیم:

$$d(Tx,Ty)<d(A,B)+\varepsilon.$$

گزارهٔ زیر ارتباط بین یک L-تابع و یک انقباض غیر دوری میر-کیلر را بیان می‌کند.

گزارهٔ ۱. زیرمجموعه‌های ناتهی A و B از فضای متریک (X,d) را در نظر بگیرید. نگاشت $T: A\cup B \to A\cup B$ یک انقباض غیر دوری میر-کیلر است اگر و تنها اگر یک L-تابع φ (صعودی و پیوسته) موجود باشد به گونه‌ای که به ازای هر $(x,y)\in A\times B$ که $d(x,y)-d(A,B)>0$ داشته باشیم:

$$d(Tx,Ty)-d(A,B)<\varphi(d(x,y)-d(A,B)),$$

و برای هر $(x,y)\in A\times B$ که $d(x,y)-d(A,B)=0$ داشته باشیم: $d(Tx,Ty)-d(A,B)=0$.

اثبات. کافی است در لم ۲ قرار دهیم $Y=A\times B$ و توابع f و g از Y به $[0,+\infty)$ را با ضوابط زیر تعریف کنیم:

$$f(x,y)=d(x,y)-d(A,B),$$
$$g(x,y)=d(Tx,Ty)-d(A,B).$$

در این صورت چون T یک انقباض غیر دوری میر-کیلر است، درستی احکام از لم ۲ نتیجه می‌شوند. □

لم سادهٔ زیر در اثبات نتایج اصلی مفید می‌باشد.

لم ۳. فرض کنید A و B دو زیرمجموعهٔ غیر تهی فضای متریک (X,d) باشند. برای انقباض غیر دوری میر-کیلر $T: A\cup B \to A\cup B$، L-تابع φ را مانند گزارهٔ قبل در نظر بگیرید. در این صورت برای هر $(x,y)\in A\times B$ همواره داریم:

$$d(Tx,Ty)\le d(x,y),$$
$$d(Tx,Ty)-d(A,B)\le \varphi(d(x,y)-d(A,B)).$$

اثبات. از گزارهٔ ۱ برای هر $(x,y)\in A\times B$ که $d(x,y)-d(A,B)=0$ داریم:

$$d(Tx,Ty)-d(A,B)=0=\varphi(0)=\varphi(d(x,y)-d(A,B))\le d(x,y)-d(A,B). \qquad (۱)$$

با استفاده مجدد گزارط ۱ برای هر $(x,y)\in A\times B$ که $d(x,y)-d(A,B)>0$ داریم:

$$d(Tx,Ty)-d(A,B)<\varphi(d(x,y)-d(A,B))\le d(x,y)-d(A,B). \qquad (۲)$$

اکنون احکام مورد نظر از روابط (۱۵) و (۱۵) نتیجه می‌شوند. □

شایان ذکر است که خاصیت ایده‌آل فضای به طور یکنواخت محدب X، نقش مهمی در اثبات قضیهٔ ۱ ایفا می‌کند. لذا در ادامه به تعریف سوزوکی، کیکاوا و وترو [۱۳] از خاصیت هندسی UC، برگرفته شده از خاصیت فضاهای به طور یکنواخت محدب باناخ می‌پردازیم.

تعریف ۴. [۱۳] فرض کنید A و B دو زیرمجموعهٔ غیر تهی فضای متریک (X,d) باشند. در این صورت می‌گوییم زوج (A,B) دارای خاصیت UC است هرگاه اگر $\{x_n\}$ و $\{x'_n\}$ دنباله‌هایی در مجموعه A و $\{y_n\}$ دنباله‌ای در مجموعه B باشد به گونه ای که

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty} d(x'_n,y_n)=d(A,B),$$

آنگاه داشته باشیم $\lim_{n\to\infty}(x_n,x'_n)=0$.

به عنوان مثال چنان‌چه A و B دو زیرمجموعهٔ غیر تهی فضای متریک (X,d) باشند که $d(A,B)=0$؛ یا اگر A و B دو زیرمجموعهٔ غیر تهی یک فضای باناخ به طور یکنواخت محدب X باشند چنان‌که A محدب باشد، آنگاه زوج (A,B) دارای خاصیت UC است. مثال‌های دیگری از زوج مجموعه‌هایی که دارای خاصیت UC باشند را می‌توان در **[۱۳]** مشاهده کرد.

این بخش را با دو لم زیر که از اهمیت ویژه‌ای در این مقاله برخوردار می‌باشند به پایان می‌رسانیم.

لم ۴. [۱۳] فرض کنید (A,B) یک زوج از زیرمجموعه‌های غیر تهی فضای متریک (X,d) باشد که دارای خاصیت UC است. در این صورت چنان‌چه $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دنباله‌هایی به ترتیب در مجموعه‌های A و B باشند به گونه‌ای که یکی از تساویهای

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{n\geq m} d(x_m,y_n)=d(A,B),\ \ \lim_{n\to\infty}\sup_{m\geq n} d(x_m,y_n)=d(A,B),$$

برقرار باشند، آنگاه دنبالهٔ $\{x_n\}$ کشی است.

لم ۵. [۱۳] فرض کنید (A,B) یک زوج از زیرمجموعه‌های غیر تهی فضای متریک (X,d) باشد که دارای خاصیت UC است. همچنین فرض کنید $T: A\cup B\to A\cup B$ یک نگاشت دوری باشد چنان‌که به ازای هر $x\in A\cup B$

$$d(T^2x,Tx)\leq d(x,Tx),$$

و به ازای هر $x\in A\cup B$ که $d(x,Tx)>d(A,B)$،

$$d(T^2x,Tx)<d(x,Tx).$$

در این صورت $z\in A$ یک بهترین نقطهٔ تقریبی T است اگر و تنها اگر یک نقطه ثابت T^2 باشد.

۳. نتایج و بحث اصلی

لم ۶. فرض کنید A و B دو زیرمجموعهٔ غیر تهی فضای متریک (X,d) باشند. انقباض غیر دوری میر-کیلر $T:A\cup B\to A\cup B$، را در نظر بگیرید و فرض کنید $x_0\in A$ و $y_0\in B$. دنباله‌های $\{x_n\}$ در A و $\{y_n\}$ در B را به صورت $x_n:=Tx_{n-1}$ و $y_n:=Ty_{n-1}$ در نظر بگیرید. در این صورت داریم:

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=d(A,B).$$

اثبات. دنباله $\{s_n\}\subseteq[0,+\infty)$ را به صورت $s_n:=d(x_n,y_n)-d(A,B)$ تعریف کنید. L-تابع φ را مانند گزارهٔ ۱ در نظر بگیرید. در این صورت از تعریف یک انقباض غیر دوری میر-کیلر بدیهی است که $s_n>0$ ایجاب می‌کند $s_{n+1}<\varphi(s_n)$ لذا بنابر لم ۲ داریم: $\lim_{n\to\infty} s_n=0$. □

لم ۷. فرض کنید (X,d)، A، B، T و $\{x_n\}$ مانند لم ۶ تعریف شوند. به علاوه فرض کنید (A,B) دارای خاصیت UC باشد. در این صورت اگر دنباله $\{x_n\}$ همگرا به نقطهٔ $z\in A$ باشد، آنگاه z یک نقطهٔ ثابت از نگاشت T است. همچنین T دارای حداکثر یک نقطهٔ ثابت در مجموعه Aاست.

اثبات. فرض کنیم $y_0\in B$ و دنباله $\{y_n\}$ را به صورت $y_n:=Ty_{n-1}$ تعریف کنید. در این صورت چون

$$d(z,y_n)\le d(z,x_n)+d(x_n,y_n),\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

لذا بنابر لم ۶ داریم: $\lim_{n\to\infty} d(z,y_n)=d(A,B)$. از طرفی بنابر لم ۳ داریم:

$$d(Tz,y_n)-d(A,B)\le\varphi(d(z,y_{n-1})-d(A,B))\le d(z,y_{n-1})-d(A,B),$$

و در نتیجه $\lim_{n\to\infty} d(Tz,y_n)=d(A,B)$. اکنون از آنجا که زوج (A,B) دارای خاصیت UC است داریم: $Tz=z$. فرض کنیم $\bar{z}\in A$ نقطهٔ ثابت دیگری از نگاشت T باشد دراین صورت با استفاده از لم ۶ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} d(z,y_n)=\lim_{n\to\infty} d(T^n z,y_n)=d(A,B)=\lim_{n\to\infty} d(T^n\bar{z},y_n)=\lim_{n\to\infty} d(\bar{z},y_n),$$

اکنون از آنجا که زوج (A,B) دارای خاصیت UC است داریم$z=\bar{z}$. □

لم ۸. فرض کنید (A,B) یک زوج از زیرمجموعه‌های غیر تهی فضای متریک (X,d) باشد که دارای خاصیت UC است. همچنین فرض کنید $T:A\cup B\to A\cup B$ یک انقباض غیر دوری میر-کیلر باشد. به ازای $x_0\in A$ و $y_0\in A$ دنباله‌های $\{x_n\}$ در A و $\{y_n\}$ در B را به صورت $x_n:=Tx_{n-1}$ و $y_n:=Ty_{n-1}$ تعریف کنید. در این صورت داریم:

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{n\ge m} d(x_m,y_n)=d(A,B).$$

اثبات. بنابر لم ۶ داریم: $\lim_{m\to\infty} d(x_m, y_m) = d(A,B)$ و $\lim_{m\to\infty} d(x_{m+1}, y_m) = d(A,B)$. لذا چون (A,B) دارای خاصیت UC است $\lim_{m\to\infty} d(x_m, x_{m+1}) = 0$.

$\varepsilon > 0$ را دلخواه ولی ثابت در نظر بگیرید، بنابر تعریف L-تابع φ می‌توان $\delta \in (0,\varepsilon)$ را به گونه‌ای انتخاب کرد که $\varphi(\varepsilon+\delta) \le \varepsilon$. اکنون از لم ۶، $L \in \mathbb{N}$ را به گونه‌ای انتخاب کنید که برای هر $m \ge L$ داشته باشیم:

$$d(x_m, y_m) - d(A,B) < \varepsilon \tag{۳}$$

و

$$d(x_m, x_{m+1}) < \delta. \tag{۴}$$

عدد $m \in \mathbb{N}$ که $m \ge L$ را ثابت در نظر بگیرید، با روش استقراء ثابت می‌کنیم برای هر $n \ge m$ داریم:

$$d(x_m, y_n) - d(A,B) < \varepsilon + \delta < 2\varepsilon. \tag{۵}$$

اگر $n = m$ که رابطهٔ (۵) بنابر رابطهٔ (۳) برقرار است. فرض کنیم رابطهٔ (۵) برای یک $n \ge m$ برقرار باشد، در این صورت رابطهٔ (۵) را برای $n+1$ به دست می‌آوریم. بنا بر فرض استقراء و صعودی بودن φ داریم:

$$d(x_{m+1}, y_{n+1}) - d(A,B) \le \varphi(d(x_m, y_n) - d(A,B)) \le \varphi(\varepsilon+\delta) \le \varepsilon. \tag{۶}$$

اکنون از روابط (۴) و (۶) نتیجه می‌گیریم

$$d(x_m, y_{n+1}) - d(A,B) \le d(x_m, x_{m+1}) + \mathrm{d}(x_{m+1}, y_{n+1}) - d(A,B) \le \delta + \varepsilon < 2\varepsilon,$$

لذا رابطهٔ (۵) برای $n+1$ نیز برقرار است. □

قضیه ۲. فرض کنید A و B دو زیرمجموعه غیر تهی فضای متریک (X,d) باشند که (A,B) دارای خاصیت UC و A کامل باشد. فرض کنیم $T: A\cup B \to A\cup B$ یک انقباض غیر دوری میر-کیلر باشد. در این صورت T دارای نقطهٔ ثابت یکتایی مانند $z \in A$ است که به ازای هر $x_0 \in A$ دنبالهٔ $\{T^n x_0\}$ همگرا به آن می‌باشد. به علاوه اگر (B,A) دارای خاصیت UC و B نیز کامل باشد آنگاه T دارای نقطهٔ ثابت یکتایی مانند $u \in B$ است که به ازای هر $y_0 \in B$ دنبالهٔ $\{T^n y_0\}$ همگرا به آن است. همچنین $d(z,u) = d(A,B)$.

اثبات. فرض کنیم x_0 نقطهٔ دلخواهی از مجموعه A باشد. از لم ۴ و لم ۸ دنبالهٔ $\{T^n x_0\}$ کشی و لذا چون A کامل است همگرا به نقطه‌ای مانند $z \in A$ است که بنابر لم ۷ تنها نقطهٔ ثابت نگاشت T در مجموعه A است. به طور مشابه اگر (B,A) دارای خاصیت UC و B نیز کامل باشد آنگاه T دارای نقطهٔ ثابت یکتایی مانند $u \in B$ است که به ازای هر $y_0 \in B$ دنبالهٔ $\{T^n y_0\}$ همگرا به آن است. از طرفی بنابر لم ۶ داریم: $d(z,u) = \lim_{n\to\infty} d(T^n z, T^n u) = d(A,B)$. □

مثال ۱. تابع $\varphi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ با ضابطهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$\varphi(t)=\begin{cases} t^2 & t\le 1,\\ 1 & t>1.\end{cases}$$

به ازای هر $s\in(0,+\infty)$ داریم: $\varphi(s)>0$، همچنین $\varphi(0)=0$ و از طرفی به ازای هر $s\in(0,1)$ با انتخاب عدد مثبت $\delta=\sqrt{s}-s$ برای هر $t\in[s,s+\delta]$ داریم:

$$\varphi(t)=t^2\le(s+\delta)^2=(\sqrt{s})^2=s.$$

و به ازای هر $s\in[1,+\infty)$ با انتخاب $\delta>0$ دلخواه و هر $t\in[s,s+\delta]$ بدیهی است که $\varphi(t)=1\le s$. لذا φ یک L-تابع است.
دو مجموعه $A=[0,\frac{1}{2}]$ و $B=[-\frac{1}{2},0]$ را به عنوان زیر مجموعه‌هایی از مجموعه اعداد حقیقی مجهز به متر اقلیدسی در نظر بگیرید. خودنگاشت غیر دوری $T:A\cup B\to A\cup B$ را با ضابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم

$$Tx=\begin{cases} x^2 & x\in A,\\ -x^2 & x\in B.\end{cases}$$

در این صورت به ازای هر $(x,y)\in A\times B$ که $d(x,y)>0$ داریم:

$$x^2+y^2=d(Tx,Ty)<\varphi(d(x,y))=(x-y)^2,$$

و برای هر $(x,y)\in A\times B$ که $d(x,y)=0$ داریم: $d(Tx,Ty)=0$. لذا بنابر گزارهٔ ۱ نگاشت T یک انقباض غیر دوری میر-کیلر است. از طرفی $d(A,B)=0$ پس (A,B) دارای خاصیت UC است و در نتیجه تمام شرایط قضیهٔ ۲ برقرار هستند. $z=u=0$ نقطهٔ ثابت یکتای T در مجموعه‌های A و B است که در احکام این قضیه صدق می‌کند.
به عنوان یک کاربرد از قضیهٔ ۲ نتیجه زیر که تعمیمی از قضیهٔ ۲ از [۲] می باشد را داریم.

نتیجه ۱. فرض کنید (A,B) یک زوج از زیرمجموعه‌های غیر تهی فضای متریک (X,d) باشد که دارای خاصیت UC و A کامل باشد. همچنین فرض کنید $T:A\cup B\to A\cup B$ یک انقباض دوری میر-کیلر باشد. در این صورت T دارای بهترین نقطهٔ تقریبی یکتایی مانند $z\in A$است که یک نقطهٔ ثابت نگاشت $T^۲$ است و به ازای هر $x_0\in A$ دنباله $\{T^{2n}x_0\}$ همگرا به آن است.

اثبات. واضح است که نگاشت T^2 یک انقباض غیر دوری میر-کیلر است لذا بنابر قضیهٔ ۲ نگاشت T^2 دارای نقطهٔ ثابت یکتایی مانند $z\in A$است و به ازای هر $x_0\in A$ دنباله $\{T^{2n}x_0\}$ همگرا به نقطهٔ z است. از طرفی به وضوح شرایط لم ۵ برقرار هستند لذا z یک بهترین نقطهٔ تقریبی T نیز است. □

در ادامه به عنوان کاربردی دیگر از قضیهٔ ۲، درستی قضیهٔ ۱ را برای یک انقباض غیر دوری به دست می‌آوریم.

نتیجه ۲. فرض کنید A و B زیرمجموعه‌هایی غیر تهی و محدب از یک فضای باناخ به طور یکنواخت محدب باشند و نگاشت $T: A\cup B \to A\cup B$ یک انقباض غیر دوری باشد یعنی عدد $c\in(0,1)$ موجود باشد به گونه‌ای که برای هر $(x,y)\in A\times B$ داشته باشیم:

$$d(Tx,Ty)\le cd(x,y)+(1-c)d(A,B).$$

در این صورت T دارای زوج یکتای بهینه‌ای از نقاط ثابت مانند $(z,u)\in A\times B$ است که به ازای هر نقطهٔ $x_0\in A$ دنبالهٔ $\{T^n x_0\}$ همگرا به z و به ازای هر نقطهٔ $y_0\in B$ دنبالهٔ $\{T^n y_0\}$ همگرا به u است.

اثبات. تابع $\varphi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ با ضابطهٔ $\varphi(x)=cx$ را در نظر بگیرید. بدیهی است که $\varphi(0)=0$ و به ازای هر $s\in(0,+\infty)$ داریم $\varphi(s)>0$، از طرفی به ازای هر $s\in(0,+\infty)$ با انتخاب عدد مثبت $\delta=\frac{s-cs}{c}$ برای هر $t\in[s,s+\delta]$ داریم:

$$\varphi(t)=ct\le c(s+\delta)=c(s+\frac{s-cs}{c})=s.$$

لذا φ یک L- تابع است. اکنون حکم از قضیهٔ ۲ به دست می‌آید.□

فرض کنید A_1، A_2، ...و A_p زیرمجموعه‌هایی غیر تهی از فضای متریک (X,d) باشند. در این صورت نگاشت $T:\bigcup_{i=1}^{p}A_i\to\bigcup_{i=1}^{p}A_i$ یک نگاشت p-دوری نامیده می‌شود هرگاه برای هر $1\le i\le p$، $T(A_i)\subseteq A_{i+1}$ که $A_{p+1}=A_1$. همچنین یک نقطهٔ $z\in A_i$ بهترین نقطهٔ تقریبی T در A_i نامیده می‌شود هرگاه $d(z,Tz)=d(A_i,A_{i+1})$.

تعریف ۵. فرض کنید A_1، A_2،...،و A_p زیرمجموعه‌هایی ناتهی از فضای متریک (X,d) باشند. در این صورت نگاشت p-دوری $T:\bigcup_{i=1}^{p}A_i\to\bigcup_{i=1}^{p}A_i$ یک انقباض p-دوری میر-کیلر نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $1\le i\le p$ و هر $\varepsilon>0$، عددی مانند $\delta>0$ موجود باشد به گونه‌ای که به ازای هر $(x_i,x_{i+1})\in A_i\times A_{i+1}$ که $d(x_i,x_{i+1})<d(A_i,A_{i+1})+\varepsilon+\delta$ داشته باشیم: $d(Tx_i,Tx_{i+1})<d(A_{i+1},A_{i+2})+\varepsilon$.

به عنوان نتیجه دیگری از قضیهٔ ۲، در ادامه تعمیمی از نتیجهٔ ۱ برای نگاشت‌های p-دوری در یک فضای باناخ به طور یکنواخت محدب X ارائه می‌دهیم.

نتیجه ۳. فرض کنید A_1، A_2،...،و A_p زیرمجموعه‌هایی ناتهی، بسته و محدب از فضای باناخ به طور یکنواخت محدب X باشند. همچنین فرض کنید $T:\bigcup_{i=1}^{p}A_i\to\bigcup_{i=1}^{p}A_i$ یک انقباض p- دوری میر-کیلر باشد. در این صورت به ازای هر $1\le i\le p$ نگاشت T دارای بهترین نقطهٔ تقریب یکتایی مانند $z_i\in A_i$ است که یک نقطهٔ ثابت نگاشت T^p است و به ازای هر $x_0\in A_i$ دنبالهٔ $\{T^{pn}x_0\}$ همگرا به نقطهٔ z_i است.

اثبات. به ازای هر $1 \le i \le p$ بدیهی است که نگاشت T^p یک انقباض غیر دوری میر-کیلر روی $A_i \cup A_{i+1}$، و زوج (A_i, A_{i+1}) دارای خاصیت UC است. لذا از قضیهٔ ۲ کافی است ثابت کنیم z_i بهترین نقطهٔ تقریبی T است. اگر $d(z_i, Tz_i) \neq d(A,B)$ از گزارهٔ ۱ داریم:

$$\begin{aligned} d(Tz_i, z_i) - d(A_i, A_{i+1}) &= d(T^{p+1}z_i, T^p z_i) - d(A_i, A_{i+1}) \\ &< \varphi(d(Tz_i, z_i) - d(A_i, A_{i+1})) \\ &\le d(Tz_i, z_i) - d(A_i, A_{i+1}). \end{aligned}$$

این تناقض ایجاب می‌کند $d(z_i, Tz_i) = d(A_i, A_{i+1})$. □

فرض کنید A و B زیرمجموعه‌هایی غیر تهی از یک فضای متریک باشند. به ازای $y \in B$ فرض کنیم:

$$P_A(y) = \{x \in A : d(x,y) = d(A,y)\}.$$

در ادامهٔ بحث به بررسی شرایط وجود و یکتایی نقاط ثابت برای نگاشت‌های غیر دوری ψ-انقباضی می‌پردازیم. لم زیر برای به دست آوردن نتایج بعدی مفید خواهد بود.

لم ۹. فرض کنید A و B دو مجموعه غیر تهی از فضای متریک (X,d) باشند به طوری که زوج‌های (A,B) و (B,A) دارای خاصیت UC باشند. همچنین فرض کنید $T: A \cup B \to A \cup B$ یک نگاشت غیر دوری باشد که به ازای هر $(x,y) \in A \times B$ که $d(x,y) > d(A,B)$ داشته باشیم:

$$d(Tx, Ty) < d(x,y),$$

در این صورت برای هر $(x,y) \in A \times B$ چنان‌چه $d(x,y) = d(A,B)$، داریم: $d(Tx,Ty) = d(A,B)$.

اثبات. فرض کنیم $x \in A$ و $y \in B$ چنان باشند که $d(x,y) = d(A,B)$. در این صورت می‌توان دنباله‌های $\{x_n\} \subseteq A$ و $\{y_n\} \subseteq B$ را چنان انتخاب نمود که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $d(x_n, y_n) \neq d(A,B)$، $x_n \neq x$، و $y_n \neq y$ و $d(x_n, y_n) \to d(A,B)$. در این صورت بنابر خاصیت UC بدیهی است که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $d(x_n, y) \neq d(A,B)$. لذا

$$d(A,B) \le d(Tx_n, Ty) < d(x_n, y),$$

در نتیجه

$$d(Tx_n, Ty) \to d(A,B). \qquad (۷)$$

از طرفی به ازای هر $n \in \mathbb{N}$

$$d(P_A(Ty),Ty)=d(A,Ty)\le d(Tx_n,Ty),$$

لذا با حد گیری و استفاده از رابطهٔ قبل داریم:

$$d(P_A(Ty),Ty)=d(A,B). \tag{۸}$$

از ترکیب روابط (۷) و (۸) و استفاده از خاصیت UC، $P_A(Ty)$ مجموعه‌ای تک عضوی است و داریم:

$$Tx_n\to P_A(Ty). \tag{۹}$$

به طور مشابه می‌توان ثابت کرد

$$d(P_B(Tx),Tx)=d(A,B), \tag{۱۰}$$

و

$$Ty_n\to P_B(Tx). \tag{۱۱}$$

از طرفی برای هر $n\in\mathbb{N}$

$$d(A,B)\le d(Tx_n,Ty_n)<d(x_n,y_n),$$

لذا $d(Tx_n,Ty_n)\to d(A,B)$، در نتیجه از روابط (۹) و (۱۱) داریم: $d(P_A(Ty),P_B(Tx))=d(A,B)$. در نتیجه با استفاده مجدد از خاصیت UC و استفاده از روابط (۸) و (۱۰) داریم: $P_A(Ty)=Tx$ و $P_B(Tx)=Ty$. لذا $d(Tx,Ty)=d(A,B)$. □

لم ۱۰. فرض کنید A و B دو مجموعهٔ غیر تهی از فضای متریک (X,d) باشند به طوری که زوج‌های (A,B) و (B,A) دارای خاصیت UC باشند. همچنین فرض کنید $T:A\cup B\to A\cup B$ یک نگاشت غیر دوری باشد که به ازای هر $(x,y)\in A\times B$ داشته باشیم:

$$d(Tx,Ty)-d(A,B)\le\psi(d(x,y)-d(A,B)),$$

که در آن $\psi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ یک تابع نیمه پیوسته بالایی از راست است که به ازای هر $t>0$ داریم: $0\le\psi(t)<t$. در این صورت برای هر $(x,y)\in A\times B$ داریم: $\lim_{n\to\infty}d(T^nx,T^ny)=d(A,B)$.

اثبات. بنابر مفروضات واضح است که اگر $d(x,y)>d(A,B)$ آنگاه $d(Tx,Ty)<d(x,y)$. لذا بنابر لم ۹ برای هر $(x,y)\in A\times B$ داریم: $d(Tx,Ty)\le d(x,y)$. فرض کنیم $s_n:=d(T^nx,T^ny)-d(A,B)$ در این صورت بنابر رابطهٔ قبل همواره داریم: $s_n\le s_{n-1}$. لذا دنبالهٔ حقیقی $\{s_n\}$ یک دنبالهٔ نزولی از پایین کراندار و در نتیجه همگرا به یک

مقدار $s \geq 0$ می‌باشد. کافی است ثابت کنیم $s = 0$. از برهان خلف فرض کنیم $s > 0$ لذا بنابر فرض داریم: $\psi(s) < s$. از طرفی به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ می دانیم $s_n \leq \psi(s_{n-1})$ و در نتیجه چون ψ در نقطهٔ s نیمه پیوسته بالایی از راست است داریم:

$$s = \limsup_n s_n \leq \limsup_n \psi(s_{n-1}) \leq \limsup_{t \to s^+} \psi(t) \leq \psi(s),$$

که این تناقض برهان را کامل می‌کند. □

قضیه ۳. اگر علاوه بر مفروضات لم ۱۰ A و B کامل، (B,A) نیز **دارای** خاصیت UC و همچنین $\psi(0) = 0$ باشد، آن‌گاه T دارای نقطهٔ ثابت یکتایی مانند $z \in A$ و نقطهٔ ثابت یکتایی مانند $u \in B$ است که به ازای هر $x_0 \in A$ دنبالهٔ $\{x_n\}$ با تعریف $x_n := Tx_{n-1}$ همگرا به نقطهٔ z و به ازای هر $y_0 \in B$ دنبالهٔ $\{y_n\}$ با تعریف $y_n := Ty_{n-1}$ همگرا به نقطهٔ uاست. همچنین $d(z,u) = d(A,B)$.

اثبات. از لم ۱۰ داریم: $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(A,B)$ و $\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, y_n) = d(A,B)$ اما (A,B) دارای خاصیت UC است لذا

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0. \tag{۱۲}$$

به طور مشابه ثابت می‌شود

$$\lim_{n\to\infty} d(y_n, y_{n+1}) = 0. \tag{۱۳}$$

ثابت می‌کنیم به ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد $N_0 \in \mathbb{N}$ موجود است به گونه‌ای که به ازای هر $m,n \in \mathbb{N}$ که $m > n \geq N_0$داریم:

$$d(x_m, y_n) \leq d(A,B) + \varepsilon.$$

از برهان خلف فرض کنیم $\varepsilon > 0$ وجود دارد به گونه‌ای که به ازای هر $k \in \mathbb{N}$ اعداد m_k و n_k که $m_k > n_k \geq k$ وجود دارند به گونه‌ای که

$$d(x_{m_k}, y_{n_k}) > d(A,B) + \varepsilon. \tag{۱۴}$$

همچنین m_k را می‌توان کوچکترین عدد طبیعی بزرگتر از n_k انتخاب کرد که رابطهٔ (۱۴) برقرار باشد و همچنین

$$d(x_{m_k - 1}, y_{n_k}) \leq d(A,B) + \varepsilon.$$

در این صورت داریم:

$$d(A,B) + \varepsilon < d(x_{m_k}, y_{n_k}) \leq d(x_{m_k}, x_{m_k - 1}) + d(x_{m_k - 1}, y_{n_k}) \leq d(x_{m_k}, x_{m_k - 1}) + d(A,B) + \varepsilon,$$

لذا بنابر رابطهٔ (۱۲) داریم:

$$d(x_{m_k}, y_{n_k}) \to d(A,B)+\varepsilon. \qquad (۱۵)$$

اما از طرف دیگر

$$\begin{aligned} d(x_{m_k}, y_{n_k}) &\le d(x_{m_k}, x_{m_k+1}) + d(x_{m_k+1}, y_{n_k+1}) + d(y_{n_k+1}, y_{n_k}) \\ &\le d(x_{m_k}, x_{m_k+1}) + \psi(d(x_{m_k}, y_{n_k}) - d(A,B)) + d(A,B) + d(y_{n_k+1}, y_{n_k}). \end{aligned}$$

با گرفتن $\limsup$ از طرفین رابطه بالا و استفاده از روابط (۱۲)، (۱۳) و (۱۵) به دست می‌آوریم $\varepsilon \le \psi(\varepsilon)$، این تناقض ادعای ما را ثابت می‌کند. لذا می‌توان نتیجه گرفت

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m\ge n} d(x_m, y_n) = d(A,B),$$

و در نتیجه بنابر لم ۴، $\{x_n\}$ دنباله‌ای کشی و چون A کامل است همگرا به نقطه‌ای مانند $z \in A$ است. به طور مشابه می‌توان ثابت کرد $\{y_n\}$ دنباله‌ای کشی و چون B کامل است همگرا به نقطه‌ای مانند $u \in B$ است. اما

$$d(z,u) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(A,B). \qquad (۱۶)$$

از طرفی اگر $t := d(Tz,u) - d(A,B)$ آن‌گاه

$$\begin{aligned} t = d(Tz,u) - d(A,B) &\le \limsup_n (d(Tz, T^n y_0) - d(A,B)) \\ &\le \limsup_n \psi(d(z, T^{n-1} y_0) - d(A,B)). \end{aligned}$$

لذا $t \le \psi(0) = 0$ در نتیجه $d(Tz,u) = d(A,B)$. این رابطه به همراه رابطهٔ (۱۶) و اینکه (A,B) دارای خاصیت UC است ایجاب می‌کند که $Tz = z$. اگر فرض کنیم $\bar{z} \in A$ نقطهٔ ثابت دیگری از نگاشت T باشد دراین صورت بنابر لم ۹ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} d(T^n z, y_n) = d(A,B) = \lim_{n\to\infty} d(T^n \bar{z}, y_n),$$

اکنون از آنجا که زوج (A,B) دارای خاصیت UC است داریم: $z = \bar{z}$. به طور مشابه می‌توان ثابت کرد که u تنها نقطهٔ ثابت T در B است. □

به عنوان نتیجه ای از قضیهٔ ۳، می‌توان به قضیهٔ ۵،۳ از [۶] اشاره کرد.

مثال ۲. تابع $\psi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ را با ضابطهٔ زیر در نظر بگیرید:

$$\psi(t) = \begin{cases} t^2 & t \le \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}t & t > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

دو مجموعه $A = [0, \frac{1}{4}]$ و $B = [-\frac{1}{4}, 0]$ را به عنوان زیر مجموعه‌هایی از مجموعه اعداد حقیقی مجهز به متر اقلیدسی در نظر بگیرید. خودنگاشت غیر دوری $T : A \cup B \to A \cup B$ را با ضابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

$$Tx = \begin{cases} x^2 & x \in A, \\ -x^2 & x \in B. \end{cases}$$

در این صورت به ازای هر $(x,y) \in A \times B$ داریم:

$$x^2 + y^2 = d(Tx, Ty) \le \psi(d(x,y)) = (x-y)^2.$$

به سادگی می‌توان بررسی کرد که ψ، T، A و B در شرایط قضیهٔ ۳ صدق می‌کنند و $z = u = 0$ نقطهٔ ثابت یکتای مجموعه‌های A و B است که در احکام این قضیه صدق می‌کند.

References

1. Aydi H., Lakzian H., Mitrović Z.D., Radenović S., "Best Proximity Points of *MT*–Cyclic Contractions with Property UC", Numer. Funct. Anal. Optim., 41(7) (2020) 871-882.

2. Di Bari C., Suzuki T., Vetro C., "Best proximity points for cyclic Meir–Keeler contractions", Nonlinear Analysis, 69(11) (2008) 3790-3794.

3. Eldred A. A., Kirk W. A., Veeramani, P., "Proximal normal structure and relatively nonexpansive mappings", Studia Math., 171(3) (2005) 283-293.

4. Eldred A. A., Veeramani P., "Existence and convergence of best proximity points", J. Math. Anal. Appl., 323(2) (2006) 1001-1006.

5. Fallahi K., Ghahramani H., Soleimani–Rad, Gh., "Integral type contractions in partially ordered metric spaces and best proximity point", Iran J Sci Technol Trans Sci., 44 (2020) 177-183.

6. Felicit J. M., Eldred A. A., "Best proximity points for cyclical contractive mappings", Appl. Gen. Topol., 16(2) (2015) 119-126.

7. Fernández León A., Gabeleh M., "Best proximity pair theorems for noncyclic mappings in Banach and metric spaces", Fixed Point Theory, 17(1) (2016) 63-84.

8. Gabeleh M., Maria Felicit J., Anthony Eldred A., "Edelstein’s theorem for cyclic contractive mappings in strictly convex Banach spaces", Numer. Funct. Anal. Optim., https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/01630563.2020.1737114.

9. Lim T.C., "On characterizations of Meir–Keeler contractive maps", Nonlinear Analysis, 46(1) (2001) 113-120.

10. Meir A., Keeler E., "A theorem on contraction mappings", J. Math. Anal. Appl., 28(2) (1969) 326-329.

11. Safari-Hafshejani A., Amini-Harandi A., Fakhar F., "Best proximity points and fixed points results for noncyclic and cyclic Fisher quasi-contractions", Numer. Funct. Anal. Optim., 40(5) (2019) 603-619.

12. Suzuki T., "Some notes on Meir-Keeler contractions and L-functions", Bull. Kyushu Inst. Technol. Pure Appl. Math., (53) (2006) 1-13.

13. Suzuki T., Kikkawa M., Vetro C., "The existence of best proximity points in metric spaces with the property UC", Nonlinear Analysis, 71(7) (2009) 2918-2926.