(نشریه علوم دانشگاه خوارزمی)

تقریب‌پذیری در فضاهای لیپ‌شیتس برداری مقدار

کبرا اسمعیلی بریران

دانشگاه اردکان، دانشکدهٔ فنی و مهندسی

دریافت ۹۸/۰۴/۲۱ پذیرش ۹۸/۰۸/۱۳

چکیده

در این مقاله، معیارهایی برای بررسی چگال بودن برخی زیرفضاهای فضای لیپ‌شیتس برداری مقدار $\mathrm{lip}_\alpha(X, S)$، وقتی (X,d) فضای متریک فشرده، S فضای باناخ روی میدان مختلط $\mathbb{C}$ است و $0<\alpha<1$ ، ارائه می‌شود. درحالتی‌که $X=[a,b]$، ثابت می‌شود $\mathrm{Lip}_1([a,b], S)$، در $\mathrm{lip}_\alpha([a,b], S)$ چگال است. هم‌چنین با استفاده از فضاهای باخنر و فضاهای دوگان ثابت می‌شود $C^1([a,b],S)$، فضای توابع S-مقدار به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر روی $[a,b]$، در $\mathrm{lip}_\alpha([a,b], S)$ چگال است.

واژه‌های کلیدی: فضای توابع لیپ‌شیتس برداری مقدار، توابع برداری مقدار به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر، اندازه‌برداری، تقریب‌پذیری

مقدمات و پیشنیازها

فرض کنید (X,d) فضای متریک، $(S, \|\cdot\|_S)$ فضای باناخ روی میدان مختلط $\mathbb{C}$ است و $0<\alpha\le 1$. فضای برداری متشکل از همه توابع S-مقدار کراندار f روی X با شرط

$$p_{\alpha,S}(f)= \sup\left\{\frac{\|f(x)-f(y)\|_S}{d^\alpha(x,y)} : x , y \in X, x\neq y\right\}<\infty$$

را با $\mathrm{Lip}_\alpha(X, S)$ نمایش می‌دهیم. زیرفضایی از $\mathrm{Lip}_\alpha(X, S)$، متشکل از تمامی توابع با شرط

$$\lim_{d(x,y)\to 0} \frac{\|f(x)-f(y)\|_S}{d^\alpha(x,y)} =0$$

را با $\mathrm{lip}_\alpha(X, S)$ نمایش می‌دهیم. با تعریف نرم $\|f\|_{\alpha,S}= \|f\|_X+p_{\alpha,S}(f)$ به‌ازای هر $f\in\mathrm{Lip}_\alpha(X, S)$، که در آن $\|\cdot\|_X$ نرم سوپرمم روی X است، به‌راحتی می‌توان ثابت کرد که $(\mathrm{Lip}_\alpha(X, S), \|\cdot\|_{\alpha,S})$ فضای باناخ است و $\mathrm{lip}_\alpha(X, S)$ زیرفضای بسته $\mathrm{Lip}_\alpha(X, S)$ است. فضاهای $\mathrm{Lip}_\alpha(X, S)$ و $\mathrm{lip}_\alpha(X, S)$ را فضاهای لیپ‌شیتس S - مقدار می‌نامیم. در حالتی که S میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ باشد، به‌ترتیب از نمادهای $\mathrm{Lip}_\alpha(X)$ و $\mathrm{lip}_\alpha(X)$ به‌جای $\mathrm{Lip}_\alpha(X, \mathbb{C})$ و $\mathrm{lip}_\alpha(X, \mathbb{C})$ استفاده می‌کنیم. جانسون [۴] فضاهای لیپ‌شیتس برداری مقدار را بررسی کرد. در حالت اسکالر مقدار، فضاهای لیپ‌شیتس جبرهای باناخ هستند و به آنها جبرهای لیپ‌شیتس گفته می‌شود. این جبرها به‌طور گسترده بررسی شده‌اند [۱]، [۴]، [۶]، [۷]. در [۴] با به‌کارگیری قضیه استون–وایرشتراس برای جبرهای لیپ‌شیتس منصوب به هدبرگ [۳]، ثابت شد که وقتی $0<\alpha<1$ جبر $\mathrm{Lip}_1(X)$ در $\mathrm{lip}_\alpha(X)$ چگال است. همین

*نویسنده مسئول esmaeili@ardakan.ac.ir

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.2.3.1]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.191]

نتیجه، با استفاده از نظریه اندازه‌ها و فضاهای دوگان و با برهانی متفاوت در [۱] به اثبات رسیده است. در این مقاله، با به‌کارگیری روش به‌کار گرفته شده در [۱] و به‌کمک فضای اندازه‌های برداری مقدار روی X، معیاری ارائه می‌دهیم که چگال بودن برخی زیرفضاهای $\mathrm{lip}_\alpha(X, S)$ را مشخص می‌کند. سپس نشان می‌دهیم $\mathrm{Lip}_1([a,b], S)$، در $C^1([a,b], S)$ چگال است. در نهایت، با استفاده از فضاهای باخنر و دوگان ثابت می‌کنیم $\mathrm{lip}_\alpha([a,b], S)$ در $\mathrm{lip}_\alpha([a,b], S)$ چگال است. در بخش بعدی، پس از ارائه تعاریف و نمادهای اولیه، نتایج اصلی را ثابت می‌کنیم.

نتایج اصلی

فرض کنید X فضای هاسدورف موضعاً فشرده و S فضای باناخ روی میدان اعداد مختلط باشد. فضای متشکل از همه توابع پیوسته و کراندار از X به‌توی S با $C(X,S)$ و زیرفضایی از $C(X,S)$ متشکل از همه توابعی که در بی‌نهایت صفر می‌شوند با $C_0(X,S)$ نشان داده می‌شوند. این فضاها با نرم سوپرمم، $\|f\|_X=\sup_{x\in X} \|f(x)\|_S$، فضای باناخ هستند. در حالتی‌که $S=\mathbb{C}$، این فضاها به‌ترتیب با $C(X)$ و $C_0(X)$ نشان داده می‌شوند. فضای متشکل از همهٔ اندازه‌های مختلط بورل منظم روی X را با $M(X)$ و فضای دوگان فضای باناخ S با S^* نشان داده می‌شود. فضای اندازه‌های بورل منظم S^*-مقدار μ روی X که در شرایط زیر صدق کنند با $M(X, S^*)$ نشان داده می‌شود:

i. برای هر $s \in S$، $\langle s,\mu(\cdot)\rangle \in M(X)$؛

ii. ثابت C وجود دارد به‌طوری‌که $\sup|\sum\langle s_i, \mu(A_i)\rangle| \le C$. سوپرمم در این رابطه روی همهٔ افرازهای متناهی X متشکل از مجموعه‌های بورل منظم دو به دو مجزا $\{A_i\}$ و مجموعه نقاط $\{s_i\}$ در S با شرط $\|s_i\|_S\le 1$ گرفته می‌شود.

اندازه $\mu\in M(X, S^*)$ و $s \in S$ را در نظر بگیرید. اندازه μ_s در $M(X)$ چنین تعریف می‌شود که به‌ازای هر مجموعه بورل A در X داشته باشیم $\mu_s(A)=\langle s, \mu(A)\rangle$. تغییرات کلی μ_s با نماد $|\mu_s|$ مشخص می‌شود و هم‌چنین $\|\mu_s\|=|\mu_s|(X)$. تغییرات کلی اندازه μ با نماد $|\mu|$ مشخص شده و به‌صورت $|\mu|(A)=\sup\left|\sum\langle s_i , \mu(A_i)\rangle\right|$ تعریف می‌شود. سوپرمم در این رابطه، مشابه ii در تعریف اندازه‌های بورل منظم S^*-مقدار، روی افرازهای متناهی A در نظر گرفته می‌شود. به‌راحتی می‌توان نشان داد که $|\mu| \in M(X)$. قرار می‌دهیم $\|\mu\|=|\mu|(X)$.

فرض کنید $\mu\in M(X, S^*)$. به‌ازای هر $f\in C(X,S)$، $\int_X f\, d\mu$ به‌صورت انتگرال ریمن-اشتیل یس، از حدگیری روی تظریف‌های پی‌درپی مجموع‌های به فرم $\sum\langle f(x_i), \mu(A_i)\rangle$ به‌دست می‌آید که در آن $\{A_i\}$ افرازهای متناهی X به مجموعه‌های بورل دو به دو مجزا است و $x_i\in A_i$. برای جزئیات بیش‌تر به [۸] رجوع کنید.

فرض کنید (X,d) فضای متریک فشرده باشد، $V=\{(x,y)\in X\times X : x\neq y\}$ و $\tilde{X}=X\cup V$. در این صورت $\tilde{X}$ فضایی موضعاً فشرده است. $0<\alpha\le 1$ را ثابت درنظر بگیرید. برای $f\in C(X,S)$ تابع $\tilde{f}$ را روی $\tilde{X}$ را به‌صورت

$$\begin{cases} \tilde{f}(x)=f(x) & x\in X \\ \tilde{f}(y,z)=\dfrac{f(y)-f(z)}{d^\alpha(y,z)} & (y,z)\in V \end{cases}$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.2.3.1]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.191]

تعریف می‌کنیم. به‌راحتی می‌توان نشان داد که نگاشت $f\mapsto \tilde{f}$ یک عملگر خطی طول‌پا از $\left(\mathrm{Lip}_\alpha(X,S), \|\cdot\|_{\alpha,S}\right)$ به‌توی $\left(C(\tilde{X},S), \|\cdot\|_{\tilde{X}}\right)$ است که در آن $\|\cdot\|_{\tilde{X}}=\|\cdot\|_X+\|\cdot\|_V$. همچنین تصویر $\mathrm{lip}_\alpha(X,S)$ تحت این نگاشت در $C_0(\tilde{X},S)$ قرار می‌گیرد.

قبل از ارائه نتایج اصلی، به بیان دو لم می‌پردازیم که مشابه نتایج [۱] در حالت اسکالر مقدار هستند.

لم ۱. به‌ازای هر $\mu\in M(\tilde{X},S^*)$ و $\varepsilon>0$، اندازهٔ $\nu\in M(X,S^*)$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\left|\int_{\tilde{X}} \tilde{f}\, d\mu-\int_X f\, d\nu\right|<\varepsilon\|f\|_{\alpha,S},\qquad f\in \mathrm{Lip}_\alpha(X,S)\,.$$

برهان. با توجه به این‌که $|\mu|\in M(\tilde{X})$، زیرمجموعه فشرده K از V یافت می‌شود به‌طوری‌که $|\mu|(V\setminus K)<\varepsilon$. قرار دهید

$$\Phi(f)=\int_{X\cup K}\tilde{f}\, d\mu,\qquad f\in C(X,S).$$

واضح است که Φ تابعک خطی روی $C(X,S)$ است. نشان می‌دهیم تابعک خطی Φ کران‌دار است. افراز متناهی $\{A_i\}$ از مجموعه $X\cup K$، متشکل از مجموعه‌های بورل دوبه‌دو مجزا را درنظر بگیرید و فرض کنید $\{\tilde{x}_i\}$ دنباله‌ای متناهی در $X\cup K$ باشد به‌طوری‌که $\tilde{x}_i\in A_i$. دراین‌صورت به‌ازای هر $f\in C(X,S)$ داریم

$$\begin{aligned}\left|\sum\langle \tilde{f}(\tilde{x}_i),\mu(A_i)\rangle\right| &\le \sum \|\mu(A_i)\|\,\left\|\tilde{f}(\tilde{x}_i)\right\|_S\\ &\le \sum \|\mu(A_i)\|\|\tilde{f}\|_{X\cup K}\\ &\le |\mu|(X\cup K)\|\tilde{f}\|_{X\cup K}\,.\end{aligned}$$

با فرض $\delta=\inf\{d^\alpha(y,z):\ (y,z)\in K\}$ نتیجه می‌شود $\delta>0$ و

$$\tilde{f}_{X\cup K}=\|f\|_X+\|\tilde{f}\|_K\le\left(1+\frac{2}{\delta}\right)\|f\|_X.$$

بنابراین برای هر افراز $\{A_i\}$ از $X\cup K$ و $\tilde{x}_i\in A_i$ داریم

$$\left|\sum\langle \tilde{f}(\tilde{x}_i),\mu(A_i)\rangle\right|\le\left(1+\frac{2}{\delta}\right)\|f\|_X\,|\mu|(X\cup K).$$

باتوجه به تعریف انتگرال ریمان-اشتیل‌یس می‌توان نتیجه گرفت

$$|\Phi(f)|=\left|\int_{X\cup K}\tilde{f}\, d\mu\right|\le\left(1+\frac{2}{\delta}\right)\|f\|_X\,|\mu|(X\cup K),$$

که کران‌داری تابعک خطی Φ روی $C(X,S)$ را به‌دنبال دارد. با به‌کارگیری [لم ۴، ۸]، می‌توان اندازه $\nu\in M(X,S^*)$ را یافت به‌طوری‌که

$$\Phi(f)=\int_X f\, d\nu\,,\qquad f\in C(X,S).$$

به‌ازای $f\in \mathrm{Lip}_\alpha(X,S)$، نتیجه می‌شود

$$\left|\int_{\tilde{X}} \tilde{f}\, d\mu - \int_X f\, d\nu\right| = \left|\int_{V\setminus K} \tilde{f}\, d\mu\right| \le \|\tilde{f}\|_{V\setminus K}\, |\mu|(V\setminus K) \le \varepsilon\, \tilde{f}_{\tilde{X}} = \varepsilon\, \|f\|_{\alpha,S}.$$

قبل از بیان لم بعدی، ابتدا به معرفی برخی نمادها می‌پردازیم. به‌ازای هر $s^*\in S^*$ و $x\in X$، تابعک $s^*\otimes\varepsilon_x$ روی $\mathrm{Lip}_\alpha(X, S)$ با ضابطهٔ $\langle f(x), s^*\rangle = (s^*\otimes\varepsilon_x)(f)$ را درنظر بگیرید. واضح است که $s^*\otimes\varepsilon_x$ تابعک خطی و کران‌دار روی $C(X,S)$ است. بنابر [لم ۴، ۸] اندازه $\mu\in M(X, S^*)$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\langle f(x), s^*\rangle = (s^*\otimes\varepsilon_x)(f) = \int_X f\, d\mu, \qquad f\in C(X, S).$$

به‌ازای هر مجموعه بورل A در X اندازه δ_{x,s^*} را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم

$$\delta_{x,s^*}(A) = \begin{cases} s^* & x\in A \\ 0 & x\notin A \end{cases}.$$

واضح است که $\delta_{x,s^*}\in M(X, S^*)$ و تکیه‌گاه آن برابر $\{x\}$ است. هم‌چنین برای هر $f\in C(X, S)$ داریم

$$\int_X f\, d\,\delta_{x,s^*} = \int_X s^*\circ f\, d\,\delta_x = \langle f(x), s^*\rangle = (s^*\otimes\varepsilon_x)(f) \qquad (۱)$$

که در آن δ_x اندازه جرم نقطه‌ای در x است. بنابراین δ_{x,s^*} یک اندازه نمایشی برای تابعک $s^*\otimes\varepsilon_x$ است. رابطهٔ (۱) را برای هر $f\in \mathrm{Lip}_\alpha(X, S)$ داریم.

لم ۲. فرض کنید $\nu\in M(X, S^*)$ و $\varepsilon>0$. دراین‌صورت اندازه $\lambda\in M(X, S^*)$ با تکیه‌گاه متناهی وجود دارد که

$$\left|\int_X f\, d\nu - \int_X f\, d\lambda\right| < \varepsilon\, \|f\|_{\alpha,S}, \qquad f\in \mathrm{lip}_\alpha(X, S).$$

برهان. تابعک خطی و کراندار $\phi_\nu(f) = \int_X f\, d\nu$ روی $\mathrm{lip}_\alpha(X, S)$ را درنظر بگیرید. با استفاده از [لم ۵، ۲.۵]، تابعک‌های خطی $s_1^*, s_2^*, \cdots, s_n^*\in S^*$ و $x_1, x_2, \cdots, x_n\in X$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$\left\|\phi_\nu - \sum_{i=1}^n s_i^*\otimes\varepsilon_{x_i}\right\| < \varepsilon.$$

تعریف می‌کنیم $\lambda = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i,s_i^*}$. دراین‌صورت λ اندازه‌ای با تکیه‌گاه $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ در $M(X, S^*)$ بوده است و برای هر $f\in \mathrm{lip}_\alpha(X, S)$ داریم

$$\begin{aligned}\left|\int_X f\, d\nu - \int_X f\, d\lambda\right| &= \left|\phi_\nu(f) - \sum_{i=1}^n \int_X f\, d\delta_{x_i,s_i^*}\right| \\ &= \left|\phi_\nu(f) - \sum_{i=1}^n (s_i^*\otimes\varepsilon_{x_i})(f)\right| \\ &\le \left\|\phi_\nu - \sum_{i=1}^n (s_i^*\otimes\varepsilon_{x_i})\right\| \|f\|_{\alpha,S} \\ &< \varepsilon\|f\|_{\alpha,S}.\end{aligned}$$

با به‌کارگیری لم‌های فوق، قضیه تقریب‌پذیری زیر را ثابت می‌کنیم. مشابه این قضیه در حالت اسکالر مقدار را می‌توان در [۱] ملاحظه کرد.

قضیهٔ ۳. زیرفضای L از $\mathrm{lip}_\alpha(X,S)$ را درنظر بگیرید. فرض کنید عدد ثابت C وجود دارد به‌طوری‌که برای هر زیرمجموعه متناهی E از X و هر $f\in \mathrm{lip}_\alpha(X,S)$ بتوان تابع $g\in L$ را یافت به‌طوری‌که روی E داشته باشیم $f=g$ و $\|g\|_{\alpha,S}\le C\|f\|_{\alpha,S}$. در این‌صورت L در $\mathrm{lip}_\alpha(X,S)$ چگال است.

برهان. تابعک خطی و کران‌دار $\Phi\in \mathrm{lip}_\alpha(X,S)^*$ را درنظر بگیرید به‌طوری‌که روی L، $\Phi=0$. با استفاده از قضیهٔ هان-باناخ، Φ دارای توسیع حافظ نرم روی $\left(C_0(\widetilde{X},S),\cdot_{\widetilde{X}}\right)$ است و بنابر [لم ۸، ۴]، اندازه $\mu\in M(\widetilde{X},S^*)$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\Phi(f)=\int_{\widetilde{X}}\tilde{f}\,d\mu,\qquad f\in \mathrm{lip}_\alpha(X,S).$$

برای $\varepsilon>0$ دلخواه، بنابر لم‌های ۱ و ۲، اندازه $\lambda\in M(X,S^*)$ با تکیه‌گاه متناهی E یافت می‌شود به‌طوری‌که

$$\left|\Phi(f)-\int_X f\,d\lambda\right|\le 2\varepsilon\|f\|_{\alpha,S},\qquad f\in \mathrm{lip}_\alpha(X,S).$$

تابع $f\in \mathrm{lip}_\alpha(X,S)$ را درنظر بگیرید. باتوجه به فرض مسئله، تابع $g\in L$ یافت می‌شود به‌طوری‌که روی E داریم $f=g$ و هم‌چنین $\|g\|_{\alpha,S}\le C\,\|f\|_{\alpha,S}$. بنابراین

$$\left|\Phi(g)-\int_X g\,d\lambda\right|\le 2\varepsilon\,\|g\|_{\alpha,S}\le 2\varepsilon C\,\|f\|_{\alpha,S}.$$

باتوجه به این‌که $\Phi(g)=0$ و $\int_X g\,d\lambda=\int_X f\,d\lambda$، نتیجه می‌شود $\left|\Phi(f)\right|\le 2(C+1)\varepsilon\,\|f\|_{\alpha,S}$. بنابراین $\Phi(f)=0$ و $\Phi=0$. درنتیجه L در $\mathrm{lip}_\alpha(X,S)$ چگال است.

قضیهٔ ۴ نتیجه‌ای مشابه [لم ۱، ۳.۳] در حالت برداری مقدار ارائه می‌دهد. هرچند برهان به‌کار رفته در [۱] برای حالت برداری مقدار قابل استفاده نیست.

قضیهٔ ۴. به‌ازای هر $f\in \mathrm{lip}_\alpha\left([a,b]\,,S\right)$ و هر زیرمجموعه متناهی E از $[a,b]$، تابع $g\in \mathrm{Lip}_1\left([a,b]\,,S\right)$ وجود دارد به‌طوری‌که $f=g$ روی E و $\|g\|_{\alpha,S}\le 3\|f\|_{\alpha,S}$.

برهان. فرض کنید $I=[a,b]$ و $E=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ به‌طوری‌که $a<x_1<\cdots<x_n<b$. قرار می‌دهیم $x_0=a$ و $x_{n+1}=b$ و تعریف می‌کنیم

$$L_i(x)=f(x_{i-1})+\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right),\qquad x\in[x_{i-1},x_i]$$

و

$$g(x)=L_i(x),\qquad x\in[x_{i-1},x_i].$$

دراین‌صورت تابع $g:I\longrightarrow S$ پیوسته است و برای $i=1,2,\cdots,n$ داریم $g(x_i)=L_i(x_i)=f(x_i)$. بنابراین $f=g$ روی E. نشان می‌دهیم $g\in \mathrm{Lip}_1(I,S)$ و $\|g\|_{\alpha,S}\le 3\|f\|_{\alpha,S}$. فرض کنید $\gamma=\min\{x_i-x_{i-1}:i=1,\cdots,n\}$. بنابراین $\gamma>0$. برای $x\,,y\in I$ با شرط $x<y$ دو حالت اتفاق می‌افتد:

حالت اول. به‌ازای $i\in\{1,\cdots,n+1\}$، داشته باشیم $x_{i-1}\le x<y\le x_i$. در این حالت $y-x\le x_i-x_{i-1}$ و درنتیجه

$$\|g(x)-g(y)\|_S=\|L_i(x)-L_i(y)\|_S=\frac{y-x}{x_i-x_{i-1}}\|f(x_i)-f(x_{i-1})\|_S.$$

بنابراین

$$\frac{\|g(x)-g(y)\|_S}{|x-y|}= \frac{\|f(x_i)-f(x_{i-1})\|_S}{x_i-x_{i-1}}\leq\frac{2\|f\|_I}{\gamma}, \tag{۲}$$

و

$$\frac{\|g(x)-g(y)\|_S}{|x-y|^{\alpha}}= \frac{\left\|f(x_i)-f\left(x_{i-1}\right)\right\|_S}{(x_i-x_{i-1})^{\alpha}}\frac{(y-x)^{1-\alpha}}{(x_i-x_{i-1})^{1-\alpha}}\leq p_{\alpha,S}(f). \tag{۳}$$

حالت دوم: برای $i, j\in\{1,\cdots,n+1\}$، داشته باشیم $x\in\left[x_{i-1},x_i\right]$ و $y\in\left[x_{j-1},x_j\right]$ به‌طوری‌که $x_i\leq x_{j-1}$.
در این‌حالت، با درنظر گرفتن $x_i<x_{j-1}$ داریم

$$\begin{aligned}\|g(x)-g(y)\|_S&= \left\|L_i(x)-L_j(y)\right\|_S\\
&\leq\|L_i(x)-f(x_i)\|_S+\left\|f(x_i)-f(x_{j-1})\right\|_S+\left\|f\left(x_{j-1}\right)-L_j(y)\right\|_S\\
&=\left\|\frac{x-x_i}{x_i-x_{i-1}}\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)\right\|_S+\left\|f(x_i)-f\left(x_{j-1}\right)\right\|_S\\
&\quad+\left\|\frac{y-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}\left(f\left(x_j\right)-f\left(x_{j-1}\right)\right)\right\|_S\\
&=\left\|f(x_i)-f(x_{i-1})\right\|_S\frac{x_i-x}{x_i-x_{i-1}}+\left\|f(x_i)-f\left(x_{j-1}\right)\right\|_S\\
&\quad+\left\|f\left(x_j\right)-f\left(x_{j-1}\right)\right\|_S\frac{y-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{\left\|g(x)-g(y)\right\|_S}{|x-y|}&\leq\frac{2}{\gamma}\|f\|_I\frac{x_i-x}{y-x}+\frac{\left\|f(x_i)-f\left(x_{j-1}\right)\right\|_S}{\left(x_{j-1}-x_i\right)^{\alpha}}\frac{\left(x_{j-1}-x_i\right)}{(y-x)\left(x_{j-1}-x_i\right)^{1-\alpha}}\\
&\quad+\frac{2}{\gamma}\|f\|_I\frac{y-x_{j-1}}{y-x}\\
&\leq\frac{4}{\gamma}\|f\|_I+\frac{1}{\gamma^{1-\alpha}}p_{\alpha,S}(f),\end{aligned}\tag{۴}$$

و

$$\begin{aligned}\frac{\|g(x)-g(y)\|_S}{|x-y|^{\alpha}}&\leq\frac{\|f(x_i)-f(x_{i-1})\|_S}{(x_i-x_{i-1})^{\alpha}}\left(\frac{x_i-x}{y-x}\right)^{\alpha}\left(\frac{x_i-x}{x_i-x_{i-1}}\right)^{1-\alpha}\\
&\quad+\frac{\left\|f(x_i)-f\left(x_{j-1}\right)\right\|_S}{\left(x_{j-1}-x_i\right)^{\alpha}}\left(\frac{x_{j-1}-x_i}{y-x}\right)^{\alpha}\\
&\quad+\frac{\left\|f\left(x_j\right)-f\left(x_{j-1}\right)\right\|_S}{\left(x_j-x_{j-1}\right)^{\alpha}}\left(\frac{y-x_{j-1}}{y-x}\right)^{\alpha}\left(\frac{y-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}\right)^{1-\alpha}\\
&\leq3\,p_{\alpha,S}(f).\end{aligned}\tag{۵}$$

ملاحظه می‌کنیم که روابط (۴) و (۵) برای حالت $x_i=x_{j-1}$ برقرار است.

در هر دو حالت فوق، بنا بر رابطۀ (۲) یا (۴) نتیجه می‌گیریم $g\in Lip_1(I,S)$ و از رابطۀ (۳) یا (۵) نتیجه می‌گیریم $p_{\alpha,S}(g)\leq3\,p_{\alpha,S}(f)$. از طرف دیگر، فرض کنید $x\in I$. دراین‌صورت به‌ازای یک i داریم $x\in\left[x_{i-1},x_i\right]$. درنتیجه

$$\|g(x)\|_S=\|L_i(x)\|_S=\left\|\frac{x_i-x}{x_i-x_{i-1}}f(x_{i-1})+\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}f(x_i)\right\|_S\leq2\|f\|_I,$$

که نتیجه می‌دهد $\|g\|_I\leq2\|f\|_I$. بنابراین

$$\|g\|_{\alpha,S}=\|g\|_I+ p_{\alpha,S}(g) \le 2\|f\|_I+3\ p_{\alpha,S}(f) \le 3\|f\|_{\alpha,S}.$$

به‌عنوان نتیجه مستقیم قضیه‌های ۳ و ۴ داریم:

نتیجهٔ ۵. زیرفضای $\mathrm{lip}_\alpha\left([a,b]\ ,S\right)$ در $\mathrm{Lip}_1\left([a,b]\ ,S\right)$ چگال است.

نتیجهٔ ۶. فرض کنید $0<\alpha<\beta<1$ دراین‌صورت زیرفضاهای $\mathrm{Lip}_\beta\left([a,b]\ ,S\right)$ و $\mathrm{lip}_\beta\left([a,b]\ ,S\right)$ در $\mathrm{lip}_\alpha\left([a,b]\ ,S\right)$ چگال هستند.

برهان. با استفاده از نتیجهٔ ۵ و با بستارگیری از روابط

$$\mathrm{Lip}_1\left([a,b]\ ,S\right) \subseteq \mathrm{lip}_\beta\left([a,b]\ ,S\right) \subseteq \mathrm{Lip}_\beta\left([a,b]\ ,S\right) \subseteq \mathrm{lip}_\alpha\left([a,b]\ ,S\right)$$

تحت نرم $\mathrm{lip}_\alpha\left([a,b]\ ,S\right)$، نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

در ادامه، نشان می‌دهیم $C^1([a,b],S)$ زیرفضای چگال $\mathrm{lip}_\alpha\left([a,b]\ ,S\right)$ است. واضح است که $C^1([a,b],S) \subseteq \mathrm{lip}_\alpha\left([a,b]\ ,S\right)$ و مشابه [۴] ثابت می‌شود

$$\|f\|_{C^1(I,S)}= \|f\|_I+\|f'\|_I\approx\|f\|_I+p_{1,S}(f)=\|f\|_{1,S}.$$

بنابراین $C^1([a,b],S)$ زیرفضای بسته $\mathrm{Lip}_1\left([a,b]\ ,S\right)$ است. درحقیقت، $C^1([a,b],S)$ زیرفضای سره‌ای از $\mathrm{Lip}_1\left([a,b]\ ,S\right)$ است. برای اثبات قضیه تقریب‌پذیری بعدی، به تعاریف و نمادهایی نیاز داریم که در ادامه به معرفی آنها می‌پردازیم.

فرض کنید S فضای باناخ روی میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$، μ اندازه مختلط بورل منظم روی فضای هاسدورف و فشرده X باشد و $p \in [1,\infty)$. فضای باخنر $L^p(X,S)$ متشکل از تمامی توابع S-مقدار اندازه‌پذیر f روی X است که در این رابطه صدق می‌کنند:

$$\|f\|_{L^p(X,S)}=\left(\int_X \|f(x)\|_S^p d\mu(x)\right)^{1/p} <\infty.$$

در حالتی‌که $S=\mathbb{C}$، $L^p(X,C)$ را با $L^p(X)$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید $L^p(X)\otimes S$ مجموعه همه ترکیب‌های خطی متناهی به فرم uf باشد که $u\in S$ و $f\in L^p(X)$. با استفاده از تعریف انتگرال باخنر [۲]، می‌توان ثابت کرد $L^p(X)\otimes S$ در $L^p(X,S)$ چگال است. با توجه به چگال بودن فضای $C(X)$ در $L^p(X)$، می‌توان ثابت کرد که به‌ازای هر $p \in [1,\infty)$، فضای $C(X,S)$ در $L^p(X\ ,S)$ چگال است.

با استفاده از مطالب مذکور و لم‌های ۱ و ۲ قضیهٔ تقریب‌پذیری ۷ را بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۷. فرض کنید $0<\alpha<1$. دراین‌صورت $C^1([a,b],S)$ در $\mathrm{lip}_\alpha\left([a,b]\ ,S\right)$ چگال است.

برهان. فرض کنید $I=[a,b]$ و $\Phi\in \mathrm{lip}_\alpha\left(I\ ,S\right)^*$ به‌طوری‌که روی $C^1(I\ ,S)$ داشته باشیم $\Phi=0$. با استفاده از قضیهٔ هان-باناخ، Φ دارای توسیع پیوسته حافظ نرم روی $C_0(\tilde{I}\ ,S)$ است و با استفاده از [۸، لم ۴] اندازهٔ $\mu \in M\left(\tilde{I}\ ,S^*\right)$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\Phi(f)=\int_{\tilde{I}} \tilde{f}\ d\mu, \qquad f\in \mathrm{lip}_\alpha\left(I\ ,S\right).$$

$\varepsilon>0$ را دلخواه درنظر بگیرید. بنابر لم‌های ۱ و ۲، اندازهٔ $\lambda \in M\left(I\ ,S^*\right)$ با تکیه‌گاه متناهی وجود دارد به‌طوری‌که

$$\left|\int_{\tilde{I}} \tilde{f}\ d\mu - \int_I f\ d\lambda\right| \le 2\varepsilon\ \|f\|_{\alpha,S}, \qquad f\in \mathrm{lip}_\alpha\left(I\ ,S\right). \tag{۶}$$

تابع $f\in \mathrm{lip}_\alpha\left(I\,,S\right)$ با شرط $\|f\|_{\alpha,S}\le 1$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $\mathrm{supp}\,\lambda=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$. مانند برهان قضیهٔ ۴، تابع $F\in \mathrm{Lip}_1\left(I\,,S\right)\subseteq \mathrm{lip}_\alpha\left(I\,,S\right)$ وجود دارد به‌طوری‌که روی $\mathrm{supp}\,\lambda$، $F=f$ و $\|F\|_{\alpha,S}\le 3\|f\|_{\alpha,S}$. واضح است که F در همه نقاط I به‌جز $\mathrm{supp}\,\lambda$ مشتق‌پذیر است. بنابراین می‌توان نوشت

$$F(x)=\int_a^X F'(t)dt+f(a),\qquad x\in I.$$

اگر قرار دهیم $\gamma=\min\{|x-y|: x\,,y\in \mathrm{supp}\,\lambda\}$، آن‌گاه برای تقریباً همه نقاط $x\in I$ داریم $\|F'(x)\|_S\le \frac{1}{\gamma^{1-\alpha}}p_{\alpha,S}(f)$. در نتیجه F' روی I به‌طور اساسی کران‌دار است و $\int_a^b\|F'(x)\|_S^p\,dx<\infty$.

بنابراین برای هر $p>1$ نتیجه می‌شود $F'\in L^p(I\,,S)$.

عدد مثبت $q>1$ با شرط $\alpha<\frac{1}{q}<1$ را درنظر بگیرید و قرار دهید $p=\frac{q}{q-1}$. بنابر مطالبی که قبل از قضیه بیان کردیم، تابع $g\in C\left(I\,,S\right)$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\left\|F'-g\right\|_{L^p(I,S)}=\left(\int_a^b\left\|F'(x)-g(x)\right\|_S^p\,dx\right)^{1/p}<\frac{\varepsilon}{M\|\Phi\|}$$

که در آن $M=\left((b-a)^{\frac{1}{q}-\alpha}+(b-a)^\alpha\right)\left(1+(b-a)^\alpha\right)$. تابع G را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$G(x)=\int_a^X g(t)dt+f(a),\qquad x\in I.$$

به‌راحتی ثابت می‌شود G تابعی به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر روی I است و $G'=g$. به‌عبارت دیگر، $G\in C^1\left(I\,,S\right)$.

با به‌کارگیری نامساوی هولدر به‌ازای هر $x\in I$ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\|G(x)-F(x)\|_S&\le\int_a^x\left\|g(t)-F'(t)\right\|_S dt\\&\le\left(\int_a^b\left\|g(t)-F'(t)\right\|_S^p\,dt\right)^{1/p}(b-a)^{1/q}\\&<\frac{\varepsilon(b-a)^{1/q}}{M\|\Phi\|}\,.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\left\|G-F\right\|_I=\sup_{x\in I}\left\|G(x)-F(x)\right\|_S<\frac{\varepsilon(b-a)^{1/q}}{M\|\Phi\|}.\tag{۷}$$

به‌طریق مشابه، برای هر $x\,,y\in I$ با شرط $x<y$ داریم

$$\begin{aligned}\frac{\|G(x)-F(x)-G(y)+F(y)\|_S}{|x-y|^\alpha}&\le\frac{1}{|x-y|^\alpha}\left\|\int_x^y g(t)dt-\int_x^y F'(t)dt\right\|_S\\&\le\frac{1}{|x-y|^\alpha}\int_x^y\|g(t)-F'(t)\|_S dt\\&\le\frac{1}{|x-y|^\alpha}\left(\int_x^y\|g(t)-F'(t)\|_S^p dt\right)^{1/p}|x-y|^{1/q}\\&<\frac{\varepsilon\,(b-a)^{1/q-\alpha}}{M\|\Phi\|}.\end{aligned}$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.2.3.1]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.191]

در نتیجه

$$p_{\alpha,S}(G-F)=\sup_{x\neq y}\frac{\|G(x)-F(x)-G(y)+F(y)\|_S}{|x-y|^{\alpha}}\leq\frac{\varepsilon\,(b-a)^{1/q-\alpha}}{M\|\Phi\|}. \qquad (۸)$$

با جمع کردن روابط (۷) و (۸) داریم

$$\|G-F\|_{\alpha,S}=\|G-F\|_I+\ p_{\alpha,S}(G-F)<\ \frac{\varepsilon\left((b-a)^{\frac{1}{q}}+(b-a)^{\frac{1}{q}-\alpha}\right)}{M\|\Phi\|}. \qquad (۹)$$

رابطهٔ (۹) را برای دو حالت ممکن بررسی می‌کنیم.

حالت اول: اگر $b-a<1$. در این حالت، با توجه به رابطه $\alpha<\frac{1}{q}$ نتیجه می‌شود $(b-a)^{\frac{1}{q}}<(b-a)^{\alpha}$. بنابراین

$$\frac{\left((b-a)^{\frac{1}{q}}+(b-a)^{\frac{1}{q}-\alpha}\right)}{M}<\frac{\left((b-a)^{\alpha}+(b-a)^{\frac{1}{q}-\alpha}\right)}{\left((b-a)^{\frac{1}{q}-\alpha}+(b-a)^{\alpha}\right)\left(1+(b-a)^{\alpha}\right)}<1. \qquad (۱۰)$$

حالت دوم: اگر $b-a>1$. در این حالت،

$$\frac{\left((b-a)^{\frac{1}{q}}+(b-a)^{\frac{1}{q}-\alpha}\right)}{M}<\frac{(b-a)^{\frac{1}{q}-\alpha}\left(1+(b-a)^{\alpha}\right)}{\left((b-a)^{\frac{1}{q}-\alpha}+(b-a)^{\alpha}\right)\left(1+(b-a)^{\alpha}\right)}<1. \qquad (۱۱)$$

از رابطه‌های (۹) و (۱۰) و (۱۱) نتیجه می‌شود

$$\|G-F\|_{\alpha,S}<\frac{\varepsilon}{\|\Phi\|}. \qquad (۱۲)$$

از این‌که $\Phi(G)=0$ و روی تکیه‌گاه λ، $F=f$، با استفاده از رابطه‌های (۶) و (۱۲) داریم

$$\begin{aligned}|\Phi(f)|\ &\leq\left|\Phi(f)-\int_I f\,d\lambda\right|+\left|\int_I f\,d\lambda-\Phi(F)\right|+|\Phi(F)-\Phi(G)|\\ &\leq 2\varepsilon\,\|f\|_{\alpha,S}+\left|\int_I F\,d\lambda-\Phi(F)\right|+|\Phi(F)-\Phi(G)|\\ &\leq 2\varepsilon\,\|f\|_{\alpha,S}+2\varepsilon\,\|F\|_{\alpha,S}+\|\Phi\|\|F-G\|_{\alpha,S}\\ &\leq 8\varepsilon\,\|f\|_{\alpha,S}+\varepsilon\leq 9\varepsilon.\end{aligned}$$

در نهایت نتیجه $\Phi=0$ حاصل می‌شود و این یعنی $C^1([a,b],S)$ در $lip_{\alpha}\left([a,b]\,,S\right)$ چگال است.

تشکر و قدردانی

از راهنمایی‌ها و پیشنهادات ارزنده سرکار خانم دکتر حکیمه ماهیار در نگارش این مقاله تشکر و قدردانی می‌کنم.

منابع

1. Bade W. G., Curtis, Jr P. C., Dales H. G., "Amenability and weak amenability for Beurling and Lipschitz algebras", Proc. London Math. Soc., 55 (3) (1987) 359-377.
2. Diestel J., Uhl, Jr J., "Vector Measures", Mathematical Surveys and Monographs, AMS, Rhode Island (1977).

3. Hedberg L. I., "The Stone-Weierstrass theorem in Lipschitz algebras", Ark. Mat۸. (1969) 63-72.
4. Honary T. G., Mahyar H., "Approximation in Lipschitz algebras", Quaest. Math., 23 (1) (2000) 13-19.
5. Johnson J. A., "Banach spaces of Lipschitz functions and vector-valued Lipschitz functions", Trans. Amer. Math. Soc., 148 (1970) 147-169.
6. Sherbert D. R., "Banach algebras of Lipschitz functions", Pacific. J. Math, 13 (1963) 1387-1399.
7. Sherbert D. R., "The structure of ideals and point derivations in Banach algebras of Lipschitz functions", Trans. Amer. Math. Soc., 111 (1964) 240-272.
8. Wells J., " Bounded continuous vector-valued functions on a locally compact space", Mich. Math. J ۱۲ ,. (1965) 119-126.