Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Acceptable random variables in noncommutative probability spaces

Ghadir Sadeghi[1] ✉, Mahin Sadat Divandar[2]

1. Corresponding Author, Faculty of Mathematics and Computer Sciences, Hakim Sabzevari University, Sabzevar, Iran.

✉ E-mail: g.sadeghi@hsu.ac.ir

2. Faculty of Mathematics and Computer Sciences, Hakim Sabzevari University, Sabzevar, Iran.

E-mail: md.divandar@gmail.com

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received:
15 July 2019
Revised form:
21 September 2020
Accepted:
11 October 2020
Published online:
21 May 2022

Keywords:
Von Neumann algebra;
Trace;
Noncommutative probability space;
Acceptable random variable.

ABSTRACT

Introduction

A class of random variables called negatively orthant dependent random variables defined in the classical setting of probability spaces by Lehman in 1966. Joag-Dev and Proschan extended this class of random variables and showed every sequence of negatively associated random variables is negatively orthant dependent. In 2008, acceptable random variables are defined by Antonini in the classical setting of probability spaces. Let $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of random variables in a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, where Ω is a sample space, $\mathcal{F}$ is a σ-algebra of the subsets of Ω, and $\mathbb{P}$ is a probability measure in $\mathcal{F}$. Furthermore let $\mathbb{E}$ be the expectation of random variables in $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. In the proof of limit theorems it is so important to obtain an exponential bound for a partial sum $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}X_i)$. Sung et. al., obtained an exponential bound for $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}X_i)$ and proved it for the cacceptable random variables class. Kim, Nooghabi and Azarnoosh, Roussas and Xing, obtained exponential bound for negatively associated random variables. In this paper, we define a class of acceptable random variables in noncommutative (quantum) probability spaces. In fact this paper transfers some of probability inequalities from the commutative probability spaces into the noncommutative probability spaces.

Material and methods

In this scheme, first for the convenience of the reader we repeat the main definitions of noncommutative probability spaces. In the second step we define acceptable random variables in the noncommutative probability spaces and prove some probability inequalities for this class of random variables.

Results and discussion

In general case, probability inequalities determine upper and lower bounds for the expectation of a random variable or the probability measure of an event. Sometimes we can not obtain the expectation or the probability measure exactly. In these situations, these bounds are important for control the expectation of a random variable or the probability measure of an event.

In this paper we want to answer this question:

Can we obtain these bounds for probability inequalities in von Neumann algebras?

Methods are used in this paper to compare classical setting are different. One of difficulties of the noncommutative setting is this fact that the product of two positive elements is not necessarily positive element in a C^*-algebra; Because it is not self-adjoint. Another one is this fact that there is not guarantee for existence of the maximum of two positive operators.

Conclusion

The following conclusions were drawn from this research.

- The probability inequalities are proved for acceptable random variables in Noncommutative probability spaces. They are a generalization of probability inequalities for negatively orthant dependent random variables in probability theory.

- We show under what situations, sequence $\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right\}_{n\geq 1}$ is completely convergence, where $\{x_n\}_{n\geq 1}$ is a sequence of noncommutative self-adjoint random variables.

- We show under what situations, sequence $\left\{\frac{1}{n^\beta}\sum_{i=1}^{n} x_i\right\}_{n\geq 1}$ for every $\beta > 1$ is completely convergence, where $\{x_n\}_{n\geq 1}$ is a sequence of noncommutative self-adjoint random variables.

- All the results of this paper can be used for random matrices.

How to cite: Sadeghi, Gh., & Divandar, M.S. (2022). Acceptable random variables in noncommutative probability spaces. *Mathematical Researches*, 8 (2) 1-12.

 Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

متغیرهای تصادفی پذیرفتنی روی فضاهای احتمال ناجابه‌جایی

قدیر صادقی[1]✉، مهین سادات دیواندر[2]

۱. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی، دانشکدهٔ ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران. پست الکترونیکی: g.sadeghi@hsu.ac.ir

۲. گروه ریاضی، دانشکدهٔ ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران. پست الکترونیکی: md.divandar@gmail.com

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۴/۲۴
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۶/۳۱
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۷/۲۰
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۲/۳۱

چکیده

متغیرهای تصادفی پذیرفتنی روی فضاهای احتمال ناجابه‌جایی (کوانتومی) تعریف می‌شود و هم‌چنین برخی از نامساوی‌های احتمالی برای این رده از متغیرهای تصادفی به دست می‌آید. این نتایج تعمیمی از متغیرهای تصادفی به‌طورمنفی وابسته ناحیه‌ای در نظریه احتمال خواهد بود. به علاوه، نتایج به‌دست آمده قابل به کار بردن برای ماتریس‌های تصادفی نیز است.

واژه‌های کلیدی:
جبر فون نویمان،
اثر،
فضای احتمال ناجابجایی،
متغیر تصادفی پذیرفتنی.

استناد: صادقی، قدیر؛ و دیواندر، مهین سادات (۱۴۰۱). متغیرهای تصادفی پذیرفتنی روی فضای احتمال ناجابه‌جایی. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۲)۱-۱۲.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱. مقدمه

در این مقاله یک رده از متغیرهای تصادفی، به نام "متغیرهای تصادفی پذیرفتنی" را در فضاهای احتمال ناجابه‌جایی معرفی نموده و برخی نامساوی‌های احتمالی را ثابت می‌کنیم. در ادامه نشان می‌دهیم که نتایج به‌دست آمده برای رده ماتریس‌های تصادفی نیز برقرار است. در واقع این مقاله گذری از فضاهای احتمال جابجایی به فضاهای احتمال ناجابجایی است.

فرض کنید X_1، X_2، ...، X_n یک دنباله از متغیرهای تصادفی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ باشد که در آن Ω فضای نمونه، $\mathcal{F}$ یک σ-جبر از زیرمجموعه‌های Ω و $\mathbb{P}$ یک اندازهٔ مثبت روی $\mathcal{F}$ است. این خانوادهٔ متناهی از متغیرهای تصادفی را به‌طورمنفی وابسته ناحیه‌ای[1] خوانیم درصورتی که برای اعداد حقیقی x_1، x_2، ...، x_n داشته باشیم

$$\mathbb{P}(X_1 \le x_1, \dots, X_n \le x_n) \le \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \le x_i)$$

و

$$\mathbb{P}(X_1 > x_1, \dots, X_n > x_n) \le \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > x_i).$$

همچنین دنبالهٔ نامتناهی $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ به طورمنفی وابسته ناحیه ای می‌باشد درصورتی که هر زیردنبالهٔ متناهی از آن به‌طورمنفی وابسته ناحیه ای باشد. مفهوم به طورمنفی وابسته ناحیه ای توسط لمان[2] مطرح گردید. به سادگی دیده می‌شود که هر دنباله از متغیرهای تصادفی وابسته، به طور منفی وابسته‌ی ناحیه‌ای می‌باشد. همچنین لمان مفهوم ب‌طور منفی وابستهٔ تعمیم یافته[3] را نیز معرفی کرد. بر طبق تعریف لمان دنبالهٔ متناهی از متغیرهای تصادفی X_1، X_2، ...، X_n را روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ به طورمنفی وابستهٔ تعمیم یافته خوانیم درصورتی که عدد $M > 0$ وجود داشته باشد به طوری‌که برای اعداد حقیقی x_1، x_2، ...، x_n داشته باشیم

$$\mathbb{P}(X_1 \le x_1, \dots, X_n \le x_n) \le M \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \le x_i)$$

و

$$\mathbb{P}(X_1 > x_1, \dots, X_n > x_n) \le M \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > x_i).$$

همان‌طور که در این تعریف مشاهده می‌شود، حالت خاص $M = 1$ همان تعریف به‌طورمنفی وابسته ناحیه‌ای است. دنبالهٔ نامتناهی $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ به‌طورمنفی وابسته تعمیم یافته می‌باشد درصورتی که هر زیردنبالهٔ متناهی از آن به طور منفی وابستهٔ تعمیم یافته باشد؛ برای اطلاعات بیش‌تر پیرامون این نوع وابستگی می‌توان به [۱] مراجعه کرد. مفهوم به طور

[1] negatively orthant dependent
[2] Lehmann
[3] extended negatively dependent

منفی وابستهٔ ناحیه‌ای توسط جاگ[۱] و پرسچون[۲] گسترش یافت. جاگ و پرسچون نشان دادند که هر دنباله از متغیرهای تصادفی به طور منفی وابسته[۳]، به طور منفی وابستهٔ ناحیه‌ای است؛ ر.ک. [۲]. آنتونینی[۴] در سال ۲۰۰۸ متغیرهای تصادفی پذیرفتنی[۵] را تعریف کرد: یک گردایهٔ متناهی از متغیرهای تصادفی X_1، X_2، ...، X_n را پذیرفتنی می‌گوییم هرگاه

$$\mathbb{E}\exp\left(\lambda\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\leq\prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}\exp(\lambda X_i)$$

برای هر عدد حقیقی λ که در آن $\mathbb{E}$ امید متغیرتصادفی روی فضای احتمال $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ است.

همچنین یک خانوادهٔ دلخواه از متغیرهای تصادفی را پذیرفتنی گوییم درصورتی که هر زیرگردایهٔ متناهی از آن پذیرفتنی باشد.

یک دنباله از متغیرهای تصادفی به طور منفی وابسته با تبدیل لاپلاس متناهی، شرایطی را ایجاد می‌کند که مثالی برای متغیرهای تصادفی پذیرفتنی ارائه می‌دهد؛ برای جزئیات بیشتر [۳] را ببینید. بعدها، مفهوم وابستگی منفی به روش‌های معینی اصلاح و تعمیم یافت. برای مثال تفسیرهایی همچون متغیرهای تصادفی M-پذیرفتنی، پذیرفتنی تعمیم یافته[۶] و به طور گسترده پذیرفتنی[۷] توسط آنتونینی، چوی[۸] و وانگ[۹] معرفی شدند [۳]، [۴]، [۵]. سرانجام سانگ[۱۰]، سریسرادچای[۱۱] و ولودین[۱۲] نسخه‌ای ضعیف‌تر از این مفهوم را در سال ۲۰۱۰ با قرار دادن یک شرط روی λ معرفی کردند. در واقع طبق این تعریف خانوادهٔ X_1، X_2، ...، X_n پذیرفتنی است درصورتی که $\delta>0$ وجود داشته باشد به طوری‌که برای هر عدد حقیقی λ که $|\lambda|\leq\delta$ داشته باشیم

$$\mathbb{E}\exp\left(\lambda\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\leq\prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}\exp(\lambda X_i).$$

خانوادهٔ دلخواه از متغیرهای تصادفی را پذیرفتنی گوییم درصورتی‌که هر زیرگردایهٔ متناهی از آن پذیرفتنی باشد.

فرض کنید $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی روی فضای احتمال $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ باشد. به دست آوردن یک نامساوی نمایی برای مجموع جزئی $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mathbb{E}X_i)$ نقش مهمی را در اثبات قضایای حدی بازی می‌کند. سانگ و همکارانش یک نامساوی نمایی برای مجموع جزئی $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mathbb{E}X_i)$ به دست آوردند و آن را برای رده‌ای از متغیرهای تصادفی وابسته و در واقع برای متغیرهای تصادفی قابل قبول، اثبات کردند. در واقع اگر $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی پذیرفتنی با ویژگی $\mathbb{E}e^{\delta|X_1|}<\infty$ برای $\delta>0$ باشد، آن‌گاه برای هر $0<\varepsilon<K\delta$ نامساوی نمایی زیر را داریم

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mathbb{E}X_i)\right|>n\varepsilon\right)\leq 2\exp\left(\frac{n\varepsilon^2}{4K}\right)$$

---

[1] Joag-Dev
[2] Proschan
[3] negatively associated
[4] Antonini
[5] acceptable
[6] extended acceptability
[7] widely acceptability
[8] Choi
[9] Wang
[10] Sung
[11] Srisuradetchai
[12] Volodin

که در آن $K = 2(\mathbb{E}|X_1|^4)^{\frac{1}{2}}\mathbb{E}e^{\delta|X_1|}$. این نوع از نامساوی یک اندازه از نرخ همگرایی برای قانون قوی اعداد بزرگ[1] ایجاد می‌کند؛ برای جزئیات بیش‌تر می‌توانید به [۶] مراجعه کنید.

در ادامه کیم[2]، نوقابی[3] و آذرنوش[4]، روساس[5] و کینگ به همراه همکارانشان نامساوی‌های نمایی را برای متغیرهای تصادفی به‌طور منفی وابسته به صورت زیر به دست آوردند [۷]، [۸]، [۹]، [۱۰].

فرض کنید $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی پذیرفتنی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ و $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله از اعداد مثبت باشد. برای هر $n \geq 1$ قرار می‌دهیم $G_n = \sum_{i=1}^{n} g_i$. برای عدد ثابت $n \geq 1$، اگر عدد مثبت T وجود داشته باشد به طوری‌که

$$\mathbb{E}e^{tX_k} \leq e^{\frac{1}{2}g_k t^2}, \qquad 0 \leq t \leq T, k = 1, 2, \ldots, n$$

آن‌گاه

$$\mathbb{P}(s_n \geq x) \leq \begin{cases} e^{-\frac{x^2}{2G_n}}, & 0 \leq x \leq G_nT \text{ اگر} \\ e^{-\frac{Tx}{2}}, & x \geq G_nT \text{ اگر} \end{cases}$$

در این مقاله نامساوی‌های مربوط به متغیرهای تصادفی پذیرفتنی، مانند نامساوی ذکر شده در بالا، روی فضاهای احتمال ناجابه‌جایی بررسی شده است. برای مشاهدهٔ جزئیات بیش‌تر و نامساوی‌های ثابت شده روی متغیرهای تصادفی پذیرفتنی به [۶] مراجعه کنید. در حالت کلی، نامساوی‌های احتمالی کران‌های بالا و پایینی را برای کمیت‌هایی مانند امید یک متغیر تصادفی یا مقدار احتمال یک پیشامد تعیین می‌کنند. در واقع اهمیت این کران‌ها برای کنترل مقادیر احتمال یا امید شرطی در حالت‌هایی است که محاسبهٔ دقیق این کمیت‌ها ممکن نیست. فرمول‌بندی ریاضی نظریه احتمال ناجابه جایی یا کوانتومی [۱۱] ابتدا به منظور ارائه توصیف احتمالی آزمایش‌ها مکانیک کوانتومی توسعه یافت. در این آزمایش ها مشاهداتی رخ می‌دهد که از محدودهٔ نامساوی‌های احتمالی ساده خارج می‌شوند و از این رو از جنبهٔ نظریه احتمال کلاسیک قابل توصیف نیستند. برای مثال جان بل اولین نوع از نامساوی‌های ناجابه‌جایی را در مقاله‌اش با عنوان "پارادوکس انیشتین--پودولسکی--روزن" منتشر کرد که در چارچوب نظریه احتمال کلاسیک قابل بررسی نبود.

همان‌طور که انتظار می‌رود این سوال به ذهن خطور می‌کند که چه نتایجی از نظریه احتمال برای فضاهای احتمال ناجابه‌جایی برقرار هستند؟

از آن‌جا که مبحث نامساوی‌ها برای به دست آوردن یک کران و تقریب احتمال رخداد یک پیشامد یا امید مجموع چند متغیر تصادفی، نامساوی‌های مرتبط با مارتینگل‌ها حائز اهمیت است، بنابراین در این حالت است که سوال می‌کنیم آیا می‌توان نسخه‌ای از آنها را در حوزهٔ جبرهای فون‌نویمان (فضای احتمال ناجابه‌جایی) به دست آورد؟ این یک سوال طبیعی ولی مهم در حوزه جبر عملگرها است زیرا به درک ما از رفتار عناصر یک جبر فون نویمان کمک می‌کند و البته کاربردهای مشخصی نیز در مکانیک کوانتوم آماری دارد. بسیاری از خواص و قضایایی که در مورد فضاهای احتمال کلاسیک برقرار

[1] strong law of large numbers
[2] Kim
[3] Nooghabi
[4] Azarnoosh
[5] Roussas

است، در حالت ناجابه‌جایی هم صدق می‌کنند و برخی از ابزارهایی که در مورد جابه‌جایی به کار می‌روند، هنوز هم کارا خواهند بود. اما با این حال در اغلب اوقات تکنیک‌های مورد استفاده در این حوزه با حالت جابجایی در احتمال کلاسیک متفاوت است و لازم است که از روش‌های جدیدی بهره گرفت. از معضلاتی که در مطالعهٔ فضای احتمال ناجابه‌جایی با آن مواجه می‌شویم، می‌توان برای مثال به نامساوی قدرمطلق برای دو عملگر اشاره کرد و یا این که حاصلضرب دو عنصر مثبت یک C^*- جبر لزوما مثبت نیست زیرا در حالت کلی خودالحاق نیست. در واقع از نامساوی $0 \leq x \leq y$، نمی‌توان نتیجه گرفت $0 \leq x^t \leq y^t$. این نابرابری فقط برای $0 \leq t \leq 1$ برقرار است. یکی دیگر از دشواری‌های پیش رو این است که بر خلاف حالت جابه‌جایی که می‌دانیم ماکزیمم نقطه‌وار دو متغیر تصادفی قابل تعریف است، در حالت کلی هیچ تضمینی برای وجود ماکزیمم دو عملگر مثبت وجود ندارد؛ برای مشاهدهٔ جزئیات بیش‌تر می‌توان به [۱۲]، [۱۳] مراجعه کرد.

در این‌جا قبل از ذکر نتایج اصلی، لازم می‌بینیم که مقدماتی از فضای احتمال ناجابه‌جایی را بیان کنیم. پیشوند "ناجابه‌جایی" را می‌توان در حوزه‌های دیگر نیز یافت. برای مثال می‌توان به هندسه ناجابه‌جایی آلن کُن[۱] و یا فضاهای توپولوژیکی ناجابه‌جایی اشاره کرد.

فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک جبر فون نویمان روی فضای هیلبرت H با عضو همانی 1 باشد و $\mathfrak{M}_+$ را بخش مثبت آن در نظر می‌گیریم. نگاشت $\tau : \mathfrak{M}_+ \to [0,\infty]$ را یک اثر[۲] روی $\mathfrak{M}$ می‌گوییم هرگاه

- برای هر $x, y \in \mathfrak{M}_+$ و هر $\lambda \in \mathbb{R}^+$ داشته باشیم $\tau(x+\lambda y) = \tau(x) + \lambda\tau(y)$؛
- برای هر $x \in \mathfrak{M}_+$ داشته باشیم $\tau(xx^*) = \tau(x^*x)$.

اثر τ روی $\mathfrak{M}$ را نرمال می‌نامیم هرگاه $\sup_i \tau(x_i) = \tau(\sup_i x_i)$ برای هر گردایه صعودی کراندار $(x_i)_{i\in I}$ در $\mathfrak{M}_+$، صادق[۳] می‌نامیم هرگاه $\tau(x) = 0$ نتیجه دهد $x = 0$ ، و متناهی می‌نامیم هرگاه $\tau(1) < \infty$.

اگر τ یک اثر متناهی نرمال صادق روی $\mathfrak{M}$ باشد به طوری که $\tau(1) = 1$ در این حالت دوتایی $(\mathfrak{M}, \tau)$ را یک فضای احتمال ناجابه‌جایی می‌نامیم. قدرمطلق $|x|$ برای هر $x \in \mathfrak{M}$ به‌صورت $|x| = (x^*x)^{\frac{1}{2}}$ تعریف می‌شود. برای هر عملگر خودالحاق $x \in \mathfrak{M}$ ، اندازهٔ طیفی یکتای E روی بورل σ-جبر $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ از $\mathbb{R}$ به توی مجموعهٔ همهٔ تصاویر وجود دارد به طوری‌که برای هر تابع بورل $f: \sigma(x) \longrightarrow \mathbb{C}$ عملگر $f(x)$ با ضابطهٔ $f(x) = \int f(\lambda)\, dE\,(\lambda)$ تعریف شده است و

$$x = \int \lambda dE(\lambda) \quad \text{و} \quad \chi_B(x) = \int_B dE\,(\lambda) = E(B).$$

به علاوه

$$\tau\big(\mathcal{X}_{[t,\infty)}(|x|)\big) = \tau\big(\mathcal{X}_{[t,\infty)}(x)\big) + \tau\big(\mathcal{X}_{[t,\infty)}(-x)\big)$$

همچنین اگر $x \geq 0$ و $t > 0$ آن‌گاه $\mathcal{X}_{[t,\infty)}(x)t \leq x$. بنابراین نامساوی زیر را داریم که به نامساوی مارکوف[۴] معروف است:

$$\tau\big(\mathcal{X}_{[t,\infty)}(x)\big) = t^{-1}\tau(x).$$

برای عضو خودالحاق $x \in \mathfrak{M}$ بنا به نامساوی مارکوف داریم

---
[1] Alain Connes
[2] trace
[3] faithful
[4] Markov inequality

$$\tau\left(\mathcal{X}_{[t,\infty)}(x)\right)=\tau\left(\mathcal{X}_{[e^t,\infty)}(e^x)\right)\leq e^{-t}\tau(e^x)$$

در این‌صورت نامساوی نمایی چبیشف[1] به صورت زیر قابل بیان است:

$$\tau\left(\mathcal{X}_{[t,\infty)}(x)\right)\leq e^{-t}\tau(e^x)$$

در حالت ناجابه‌جایی از نماد $\mathrm{Prob}(x\geq t):=\tau\left(\mathcal{X}_{[t,\infty)}(x)\right)$ استفاده می‌کنیم؛ برای اطلاعات بیش‌تر در زمینهٔ فضاهای احتمال ناجابه‌جایی می‌توانید به مراجع [۱۴]، [۱۵] مراجعه کنید.

۲. متغیرهای تصادفی پذیرفتنی ناجابه‌جایی[2]

در این بخش ابتدا متغیرهای تصادفی پذیرفتنی را در فضاهای احتمال ناجابه‌جایی معرفی نموده و سپس نامساوی‌هایی مربوط به این نوع متغیرهای تصادفی را در فضاهای احتمال ناجابه‌جایی ثابت می‌کنیم.

تعریف۱. دنباله متناهی x_1، x_2، ...، x_n از متغیرهای تصادفی خودالحاق را در فضای احتمال ناجابه‌جایی $(\mathfrak{M},\tau)$ پذیرفتنی گوییم در صورتی که برای هر عدد حقیقی t نامساوی زیر برقرا ر باشد

$$\tau\left(\exp(t\textstyle\sum_{i=1}^{n}x_i)\right)\leq\prod_{i=1}^{n}\tau\left(\exp(tx_i)\right). \tag{۱}$$

یک خانوادهٔ دلخواه از متغیرهای تصادفی ناجابه‌جایی را پذیرفتنی گوییم درصورتی که هر زیرگردایهٔ متناهی از آن پذیرفتنی باشد.

قضیهٔ ۲. فرض کنید $\{x_n\}_{n\geq1}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی خودالحاق ناجابه‌جایی و $\{\gamma_n\}_{n\geq1}$ یک دنباله از اعداد مثبت باشد. برای هر $n\geq 1$ قرار می‌دهیم $\Gamma_n:=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i$. برای عدد مثبت n اگر یک عدد مثبت θ موجود باشد به طوری که

$$\tau(e^{tx_k})\leq e^{\frac{1}{2}\gamma_k t^2},\ 0\leq t\leq\theta, k=1,2,\dots,n, \tag{۲}$$

آن‌گاه برای هر $\alpha>0$

$$\mathrm{Prob}(s_n\geq\alpha)\leq\begin{cases}e^{-\frac{\alpha^2}{2\Gamma_n}}, & \text{اگر } 0\leq\alpha\leq\Gamma_n\theta\\ e^{-\frac{\theta\alpha}{2}}, & \text{اگر } \alpha\geq\Gamma_n\theta\end{cases}$$

که در آن $S_n=\sum_{i=1}^{n}x_i$.

برهان. فرض کنید $\alpha\geq 0$. از نامساوی‌های (۱) و (۲) و نامساوی مارکوف نتیجه می‌شود که

$$\mathrm{Prob}(s_n\geq\alpha)\leq e^{-t\alpha}\tau(e^{ts_n})\leq e^{-t\alpha}\prod_{i=1}^{n}\tau\left(e^{tx_i}\right)\leq e^{\frac{\Gamma_n t^2}{2}-t\alpha},\quad 0\leq t\leq\theta.$$

در نتیجه،

$$\mathrm{Prob}(s_n\geq\alpha)\leq \inf_{0\leq t\leq\theta}e^{\frac{\Gamma_n t^2}{2}-t\alpha}=e^{\inf_{0\leq t\leq\theta}(\frac{\Gamma_n t^2}{2}-t\alpha)}$$

[1] exponential Chebyshev inequality

[2] fractional calculus

[2] Caputo's fractional derivative

اکنون اگر $\theta \geq \frac{\alpha}{\Gamma_n}$ داریم

$$e^{\inf_{0\leq t\leq\theta}(\frac{\Gamma_n t^2}{2}-t\alpha)} = e^{-\frac{\alpha^2}{2\Gamma_n}}$$

و اگر $\theta \leq \frac{\alpha}{\Gamma_n}$، آن‌گاه

$$e^{\inf_{0\leq t\leq\theta}(\frac{\Gamma_n t^2}{2}-t\alpha)} = e^{\frac{\Gamma_n\theta^2}{2}-\theta\alpha} \leq e^{-\frac{\theta\alpha}{2}}.$$

نتیجهٔ ۳. فرض کنید $\{x_n\}_{n\geq1}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی خودالحاق ناجابه‌جایی و $\{\gamma_n\}_{n\geq1}$ یک دنباله از اعداد مثبت باشد. برای هر $n \geq 1$ قرار می‌دهیم $\Gamma_n := \sum_{i=1}^n \gamma_i$. برای عدد مثبت n اگر یک عدد مثبت θ موجود باشد به طوری که

$$\tau(e^{tx_k}) \leq e^{\frac{1}{2}\gamma_k t^2}, \qquad |t| \leq \theta, k = 1,2,\dots,n,$$

در این صورت برای هر $\alpha > 0$

$$\mathrm{Prob}(|s_n| \geq \alpha) \leq \begin{cases} 2e^{-\frac{\alpha^2}{2\Gamma_n}}, & \text{اگر}\ 0 \leq \alpha \leq \Gamma_n\theta \\ 2e^{-\frac{\theta\alpha}{2}}, & \text{اگر}\ \alpha \geq \Gamma_n\theta \end{cases}$$

تعریف۴. دنباله $\{x_n\}_{n\geq1}$ از متغیرهای تصادفی ناجابجایی را به‌طور کامل همگرا گوئیم درصورتی که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Prob}(|x_n| \geq \varepsilon) < \infty.$$

قضیهٔ ۵. فرض کنید $\{x_n\}_{n\geq1}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی خودالحاق ناجابه‌جایی باشد به طوری که برای هر $i \geq 1$

۱) $\tau(x_i) = 0$؛

۲) $\tau(x_i^2) = \sigma_i^2 < \infty$.

قرار می‌دهیم $B_n^2 := \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$ و

$$C_n := \max\left\{\frac{\|x_i\|}{\sqrt{B_n^2}}, \qquad 1 \leq i \leq n\right\}, \qquad n \geq 1.$$

اگر برای هر $\varepsilon > 0$،

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{n\varepsilon^2}{2C_n^2 B_n^2}\right\} < \infty \qquad (۳)$$

آن‌گاه دنبالهٔ $\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right\}_{n\geq1}$ به‌طور کامل همگراست.

برهان. با توجه به تعریف پذیرفتنی بودن دنبالهٔ $\{x_n\}_{n\geq 1}$ و نامساوی مارکوف برای هر $t,\varepsilon > 0$ داریم که

$$\begin{aligned}
\mathrm{Prob}(|\textstyle\sum_{i=1}^n x_i| \geq \varepsilon) &= \mathrm{Prob}(\textstyle\sum_{i=1}^n x_i \geq \varepsilon) + \mathrm{Prob}(\textstyle\sum_{i=1}^n (-x_i) \geq \varepsilon)\\
&\leq e^{\frac{-t\varepsilon}{\sqrt{B_n^2}}}\tau\left(\exp\left(\frac{t}{\sqrt{B_n^2}}\sum_{i=1}^n x_i\right)\right) + e^{\frac{-t\varepsilon}{\sqrt{B_n^2}}}\tau\left(\exp\left(-\frac{t}{\sqrt{B_n^2}}\sum_{i=1}^n x_i\right)\right)\\
&\leq e^{\frac{-t\varepsilon}{\sqrt{B_n^2}}}\left(\prod_{i=1}^n \tau\left(e^{\frac{tx_i}{\sqrt{B_n^2}}}\right) + \prod_{i=1}^n \tau\left(e^{-\frac{tx_i}{\sqrt{B_n^2}}}\right)\right)\\
&\leq 2\exp\left(\frac{-t\varepsilon}{\sqrt{B_n^2}} + \frac{nt^2C_n^2}{2}\right). \qquad (۴)
\end{aligned}$$

اکنون اگر در نامساوی (۴) قرار دهیم $t = \frac{\varepsilon}{nC_n^2\sqrt{B_n^2}}$ آن‌گاه

$$\mathrm{Prob}(|\textstyle\sum_{i=1}^n x_i| \geq \varepsilon) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2nC_n^2B_n}\right)$$

از نامساوی بالا و نامساوی (۳) نتیجه می‌شود که

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2C_n^2B_n^2}\right) < \infty$$

بنابراین دنبالهٔ $\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right\}_{n\geq 1}$ به طور کامل همگراست.

قضیهٔ ۶. فرض کنید $\{x_n\}_{n\geq 1}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی خودالحاق ناجابه‌جایی باشد و برای هر $\alpha > 0$ و $n \geq 1$ در نامساوی زیر صدق کند

$$\mathrm{Prob}(|x_n| \geq \alpha) \leq M\int_{\alpha}^{+\infty} e^{-\gamma t^2}\,dt \qquad (۵)$$

که در آن M و γ ثابت‌های مثبت باشند. فرض کنید ثابت مثبت c مستقل از n موجود باشد به‌طوری که

$$\tau(\textstyle\sum_{i=1}^n x_i)^2 \leq c\sum_{i=1}^n \tau\left(x_i^2\right), \qquad (۶)$$

در این صورت برای هر $\beta > 1$، دنباله‌ی $\left\{\frac{1}{n^\beta}\sum_{i=1}^n x_i\right\}_{n\geq 1}$ به طور کامل همگراست.

برهان. از نامساوی مارکوف و نامساوی (۶) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Prob}\left(\left|\frac{1}{n^\beta}\sum_{i=1}^n x_i\right| > \varepsilon\right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2\beta}\varepsilon^2}\tau\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2\\
&\leq c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2\beta}\varepsilon^2}\sum_{i=1}^n \tau\left(x_i^2\right).
\end{aligned}$$

در ادامه یک کران برای $\tau\left(x_i^2\right)$ به‌دست می‌آوریم. از نامساوی (۵) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}
\|x_i\|_2^2 = \tau\left(x_i^2\right) &= 2\int_0^{\infty}\alpha\,\mathrm{Prob}(|x_i| \geq \alpha)\,d\alpha\\
&\leq 2\int_0^{\infty}\alpha\left(M\int_{\alpha}^{\infty}e^{-\gamma t^2}\,dt\right)d\alpha\\
&= M\int_0^{\infty}e^{-\gamma t^2}\left(\int_0^t 2\alpha\,d\alpha\right)dt\\
&= M\int_0^{\infty}t^2e^{-\gamma t^2}dt = \frac{M\sqrt{\pi}}{4\gamma^{\frac{3}{2}}},
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Prob}\left(\left|\frac{1}{n^{\beta}}\sum_{i=1}^{n} x_i\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{CM\sqrt{\pi}}{4\gamma^{\frac{3}{2}}\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2\beta-1}} < \infty$$

بنابراین دنبالهٔ $\left\{\frac{1}{n^{\beta}}\sum_{i=1}^{n} x_i\right\}_{n\geq 1}$ به طور کامل همگرا است.

تبصرهٔ ۷. فرض کنیم $(\mathfrak{M},\tau)$ فضای احتمال ناجابجایی و $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ فضای احتمال باشد. فضای تمام توابع اندازه‌پذیر اساساً کراندار، $\mathcal{L}^{\infty}(\Omega)$ یک جبر فون نویمان جابه‌جایی همراه با اثر متناهی نرمال صادق $\tau(f)=\int_{\Omega} f\,dp$ را درنظر می‌گیریم. اکنون قرار می‌دهیم $\mathcal{N}=\mathcal{L}^{\infty}(\Omega)\,\overline{\otimes}\,\mathfrak{M}$. فون نویمان جبر $\mathcal{N}$ همراه با اثر تانسوری $v=\int\otimes\tau$ یک فضای احتمال ناجابه‌جایی است. در واقع عناصر فون نویمان جبر $\mathcal{N}$ را می‌توان توابع اندازه‌پذیر $\mathfrak{M}$-مقدار درنظر گرفت. حال اگر $x\in\mathcal{N}$ یک تابع ساده $\mathfrak{M}$-مقدار باشد آن‌گاه

$$v(x)=\int_{\Omega}\tau(x(\omega))\,dp(\omega). \tag{۷}$$

به ویژه اگر $\mathfrak{M}=\mathcal{M}_{n\times n}$ فضای همهٔ ماتریس‌های $n\times n$، با آرایه‌های مختلط همراه با اثر استاندارد نرمال باشد، آن‌گاه $\mathcal{N}=\mathcal{L}^{\infty}(\Omega)\,\overline{\otimes}\,\mathcal{M}_{n\times n}$ فضای همهٔ ماتریس‌های تصادفی همراه با اثر (۷) است. بنابراین تمام نتایج این مقاله را می‌توان برای ماتریس‌های تصادفی نیز به کار برد.

References

1. E. Lehmann, *Some concepts of dependence*, Annals of Mathematical Statistics, 37 (1966) 1137-1153.

2. K. Joag-Der and F. Proschan, *Negative association of random variables with applications*, Ann. of Statist., 11 (1983) 286-295.

3. R. Giuliano Antonini, Y. Kozachenko, and A. Volodin, *Convergence of series of dependent φ-subgaussian random variables,* J. Math. Anal. Appl, 338 (2008) 1188-1203.

4. J-Y. Choi and J-I. Baek, *Exponential inequalities and complete convergence of extended acceptable random variables*, Nonlinear analysis: real world applications 1.1,69-87, 2000.

5. Y. Wang and Y. Gao Li, *On the exponential inequality for acceptable random variables*, J. Inequal. Appl., 40 (2011).

6. S.H. Sung, P. Srisuradetchai and A. Volodin, *A note on the exponential inequality for a class of dependent random variables*, Journal of the Korean Statistical Society, doi: 10.1016 (2010).

7. T.S. Kim and H.C. Kim, *On the exponential inequality for negative dependent sequence*, Communications of the Korean Mathematical Society, 22, 1 (2017) 315-321.

8. H.J. Nooghabi and H. A. Azarnoosh, *Exponential inequality for negatively associated random variables*, Statistical Papers, 50 (2009) 419-428.

9. G.G. Roussas, *Exponential probability inequalities with some applications*, IMS Lecture Notes-Monograph Series, 30 (1996) 303-319.

10. G. Xing, *On the exponential inequalities for strictly stationary and negatively associated random variables,* Journal of Statistical Planning and Inference, 139 (2009) 3453-3460.

11. J. von Neumann, *Mathematical foundations of quantum mechanics*, Princeton University Press, Princeton (1955).

12. M.S. Moslehian, A. Talebi, *Non-commutative Stein inequality and its applications*, Comm. Statist. Theory Methods, DOI:10.1080/03610926.2018.1435813 (2018).

13. M.S. Moslehian, A. Talebi, *A variance bound for a general function of independent noncommutative random variables*, Quaest. Math. 242 (2019) no. 3, 307-318.

14. Gh. Sadeghi, *Non-commutative Orlicz spaces associated to a modular on τ-measurable operators*, J. Math. Anal. Appl., 395 (2012) 705-715.

15. Q. Xu, *Operator spaces and non-commutative L_p*, Lectures in the Summer School on Banach spacesand Operator spaces, Nankai University China., (2007).