نتایجی در مورد صفر شدن برخی Extمدول‌های خاص

علیرضا نظری*
دانشگاه لرستان، گروه ریاضی

دریافت: ۹۸/۰۴/۳۱ پذیرش: ۹۸/۰۹/۲۰

چکیده

فرض کنید R یک حلقهٔ جابه‌جایی یکدار نوتری و a عضوی از R باشد. در این مقاله، به بررسی و مطالعهٔ شرایطی روی حلقهٔ R و ایده‌آل اصلی Ra می‌پردازیم که تحت آن داشته باشیم: $\mathrm{Ext}_R^1(R/Ra,R)\neq \circ$.

واژه‌های کلیدی: حلقه‌های نوتری، Ext_مدول‌ها، ایده‌آل‌های اصلی.

مقدمه

در سراسر این مقاله، R یک حلقهٔ جابه‌جایی یکدار نوتری و a عضوی از R است. در حالتی که R یک حلقهٔ موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ است تعداد عناصر مجموعهٔ مولد مینیمال برای $\mathfrak{m}$ که برابر $\dim_{R/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ است را با نماد $v(R)$ نمایش می‌دهیم. هم‌چنین تکمیل شده‌ی R نسبت به توپولوژی $\mathfrak{m}$_ادیک را با نماد $\hat{R}$ نمایش می‌دهیم. برای آشنایی با نمادها، مفاهیم فوق و ساختار $\mathrm{Ext}_R^1(R/Ra,R)$ خواننده می‌تواند به مراجع [۲] و [۳] مراجعه کند.

می‌دانیم که اگر R یک حوزهٔ صحیح یا یک حلقهٔ کوهن_مکالی باشد، آن‌گاه با شرط $\mathrm{ht}_R Ra=1$ داریم: $\mathrm{Ext}_R^1(R/Ra,R)\neq \circ$. بنابراین پرسشی به شکل زیر مطرح می‌شود:

پرسش الف: فرض کنید $\mathrm{ht}_R Ra=1$. در این صورت آیا می‌توان گفت که $\mathrm{Ext}_R^1(R/Ra,R)\neq \circ$؟

این پرسش را می‌توان در حالت عمومی‌تر به شکل زیر نیز بیان کرد:

پرسش ب: تحت چه شرایطی روی حلقهٔ R و ایده‌آل اصلی Ra می‌توان گفت که $\mathrm{Ext}_R^1(R/Ra,R)\neq \circ$؟

در این مقاله ابتدا نشان می‌دهیم که برای عضو غیر پوچ‌توان و غیر یکال a از حلقهٔ موضعی R رابطه‌ای به شکل زیر برقرار است:

$$\inf\{n\in\mathbb{N} \mid \mathrm{Ext}_R^1(R/Ra^n,R)\neq\circ\}\leq \inf\{n\in\mathbb{N}\mid (\circ:_R a^{n-1})=(\circ:_R a^n)\}$$

در ادامه، شرایطی روی حلقهٔ R و ایده‌آل اصلی Ra بیان می‌شود که تحت آن پرسش‌های (الف) و (ب) جواب مثبت داشته باشند. هم‌چنین مثال‌هایی برای درک بهتر مطالب بیان شده ارائه می‌شود.

*نویسندهٔ مسئول nazari.ar@lu.ac.ir

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.675]

نتایج اصلی

لم زیر در اثبات نتایج و بررسی صفر شدن Ext_مدول $\mathrm{Ext}_R^1(R/Ra,R)$ نقش کلیدی دارد.

لم ۱. به ازای هر عضو a از R، یک یک‌ریختی به شکل زیر موجود است:

$$\mathrm{Ext}_R^1(R/Ra,R) \cong \left(0:_R (0:_R a)\right)/Ra.$$

برهان. از رشتهٔ دقیق

$$0 \longrightarrow R/(0:_R a) \xrightarrow{a} R \longrightarrow R/Ra \longrightarrow 0$$

رشتهٔ دقیقی به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$\mathrm{Hom}_R(R,R) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(a,Id_R)} \mathrm{Hom}_R(R/(0:_R a),R) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(R/Ra,R) \longrightarrow 0$$

حال با توجه به جابه‌جایی دیاگرام زیر

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(R,R) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_R(a,Id_R)"] \arrow[d, "\text{یکریختی طبیعی}"] & \mathrm{Hom}_R(R/(0:_R a),R) \arrow[d, "\text{یکریختی طبیعی}"'] \\
R \arrow[r, "a"] & \left(0:_R (0:_R a)\right)
\end{tikzcd}$$

یکریختی مورد نظر حاصل می‌شود.

قضیه ۲. فرض کنید R یک حلقهٔ موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ و a عضوی غیر پوچ‌توان از $\mathfrak{m}$ باشد. در این صورت یک عدد طبیعی مانند n موجود است به طوری که $\mathrm{Ext}_R^1(R/Ra^n,R) \neq 0$.

برهان. زنجیر افزایشی زیر از ایده‌آل‌های حلقهٔ R را در نظر می‌گیریم:

$$(0:_R a) \subseteq (0:_R a^2) \subseteq (0:_R a^3) \subseteq \cdots \subseteq (0:_R a^n) \subseteq \cdots$$

چون R یک حلقهٔ نوتری است این زنجیر متوقف می‌شود. بنابراین یک عدد طبیعی مانند n موجود است به طوری که $(0:_R a^n) = (0:_R a^{n+1})$. ادعا می‌کنیم که در این حالت داریم: $\mathrm{Ext}_R^1(R/Ra^{n+1},R) \neq 0$. فرض کنیم چنین نباشد و $\mathrm{Ext}_R^1(R/Ra^{n+1},R) = 0$. در این صورت با توجه به لم ۱ خواهیم داشت:

$$\left(0:_R (0:_R a^{n+1})\right) = Ra^{n+1}.$$

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.675]

بنابراین می‌توان نوشت:

$$Ra^n \subseteq \big(0:_R (0:_R a^n)\big) = \big(0:_R (0:_R a^{n+1})\big) = Ra^{n+1}$$

در نتیجه عضوی از R مانند r موجود است به طوری که $a^n = ra^{n+1}$ و لذا $a^n(1-ra) = 0$. چون $1-ra$ یکال است پس $a^n = 0$ که تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل است و به اجبار داریم: $\mathrm{Ext}_R^1(R/Ra^{n+1}, R) \neq 0$.

نتیجه ۳. فرض کنید R یک حلقهٔ موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ و a عضوی غیر پوچ‌توان از $\mathfrak{m}$ باشد. در این صورت داریم:

$$\inf\{n \in \mathbb{N} \mid \mathrm{Ext}_R^1(R/Ra^n, R) \neq 0\} \leq \inf\{n \in \mathbb{N} \mid (0:_R a^{n-1}) = (0:_R a^n)\} \quad (*)$$

برهان. حکم با توجه به برهان ارائه شده برای قضیهٔ ۲ برقرار است.

نتیجه ۴. فرض کنید R یک حلقهٔ موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ و $\mathfrak{p} = (0:_R a)$ عضوی از $\mathrm{Ass}_R R$ باشد. در این حالت به ازای هر عضو از $\mathfrak{m} \setminus \mathfrak{p}$ مانند b داریم: $\mathrm{Ext}_R^1(R/Rab, R) \neq 0$.

برهان. فرض کنیم حکم برقرار نباشد و به ازای عضوی مانند b از $\mathfrak{m} \setminus \mathfrak{p}$ داشته باشیم: $\mathrm{Ext}_R^1(R/Rab, R) = 0$. در این صورت با توجه به لم ۱ خواهیم داشت: $\big(0:_R (0:_R ab)\big) = Rab$. چون $b \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{p}$ پس $ab \neq 0$. فرض کنید $r \in (0:_R ab)$ دلخواه باشد. در این صورت $rb \in (0:_R a) = \mathfrak{p}$. چون $\mathfrak{p}$ ایده‌آلی اول است و $b \notin \mathfrak{p}$ پس $r \in \mathfrak{p} = (0:_R a)$. بنابراین تساوی $(0:_R a) = (0:_R ab)$ برقرار است و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$Ra \subseteq \big(0:_R (0:_R a)\big) = \big(0:_R (0:_R ab)\big) = Rab.$$

بنابراین عضوی از R مانند r موجود است به طوری که $a = rab$ و لذا $a(1-rb) = 0$. چون $1-rb$ یکال است پس $a = 0$ که تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل است و به اجبار داریم: $\mathrm{Ext}_R^1(R/Rab, R) \neq 0$.

مثال ۵. فرض کنید $R = K[\![x,y,z]\!]/\langle x^2\rangle$ که در آن K یک میدان است. در این صورت R یک حلقهٔ موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m} = \langle x,y,z\rangle/\langle x^2\rangle$ است. تصاویر x و y در R را به ترتیب با نمادهای $\bar{x}$ و $\bar{y}$ نمایش می‌دهیم. $\bar{x}$ عضو پوچ‌توانی از حلقهٔ R است که به ازای آن داریم:

$$R\bar{x} = (0:_R \bar{x}) = \big(0:_R (0:_R \bar{x})\big)$$

لذا با توجه به لم ۱ خواهیم داشت: $\mathrm{Ext}_R^1(R/R\bar{x}, R) = 0$. بنابراین در این حالت داریم:

$$\underbrace{\inf\{n \in \mathbb{N} \mid \mathrm{Ext}_R^1(R/R\bar{x}^n, R) \neq 0\}}_{=\infty} \nleq \underbrace{\inf\{n \in \mathbb{N} \mid (0:_R \bar{x}^{n-1}) = (0:_R \bar{x}^n)\}}_{=3}$$

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.675]

در حالی که با توجه به نتیجه ۴، با فرض $\mathfrak{p} = R\bar{x}(= (\circ:_R \bar{x}) \in \mathrm{Ass}_R R)$ و $\bar{y} \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{p}$، برای عضو پوچ‌توان $\bar{x}\bar{y}$ از حلقهٔ R داریم $\mathrm{Ext}_R^1(R/R(\bar{x}\bar{y}), R) \neq \circ$ و در نتیجه

$$\underbrace{\inf\{n \in \mathbb{N} | \mathrm{Ext}_R^1(R/R(\bar{x}\bar{y})^n, R) \neq \circ\}}_{=1} < \underbrace{\inf\{n \in \mathbb{N} | (\circ:_R (\bar{x}\bar{y})^{n-1}) = (\circ:_R (\bar{x}\bar{y})^n)\}}_{=3}$$

این مطلب نشان می‌دهد که برای عناصر پوچ‌توان، در مورد درستی و یا نادرستی رابطهٔ $(*)$ که در نتیجهٔ ۳ به آن اشاره شده است چیزی نمی‌توان گفت.

نمادگذاری ۶. فرض کنید $\bigcap_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}_R R} \mathfrak{q}(\mathfrak{p}) = \circ$ یک تجزیهٔ اولیهٔ مینیمال برای ایده‌آل صفر از حلقه R باشد که در آن $\mathfrak{q}(\mathfrak{p})$ ایده‌آل $\mathfrak{p}$ـ اولیه‌ای است که در تجزیه ظاهر شده است. مجموعهٔ عناصر مینیمال $\mathrm{Ass}_R R$ را با نماد $\mathrm{mAss}_R R$ نمایش داده و قرار می‌دهیم $N = \bigcap_{\mathfrak{p}\in \mathrm{mAss}_R R} \mathfrak{q}(\mathfrak{p})$. توجه شود که در این حالت به ازای هر عضو از $R \setminus \bigcup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{mAss}_R R} \mathfrak{p}$ مانند a داریم: $Ra \cap N = aN$ و $(\circ:_R a) \subseteq N$. بنابراین به ازای هر ایده‌آل اصلی Ra با شرط $\mathrm{ht}_R Ra = 1$ داریم: $Ra \cap N = aN$ و $(\circ:_R a) \subseteq N$.

قضیه ۷. فرض کنید a عضو دل‌خواهی از حلقهٔ R باشد به طوری که $\mathrm{ht}_R Ra = 1$. در این صورت اگر یکی از دو شرط الف) $aN = \circ$ یا ب) $a^2N = \circ$ و $(\circ:_R a) \subseteq Ra$ برقرار باشد آن‌گاه $\mathrm{Ext}_R^1(R/Ra, R) \neq \circ$.

برهان. ابتدا فرض کنید شرط (الف) برقرار باشد. چون $a \notin \bigcup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{mAss}_R R} \mathfrak{p}$ پس $(\circ:_R a) \subseteq N$ و لذا $N = (\circ:_R a)$. قرار می‌دهیم $I = \sqrt{Ra}$. در این صورت عضوی از $\mathbb{N}$ مانند n را می‌توان به گونه‌ای اختیار کرد که $I^n \subseteq Ra$ و $I^{n-1} \nsubseteq Ra$. فرض کنید حکم برقرار نباشد و $\mathrm{Ext}_R^1(R/Ra, R) = \circ$. در این صورت با توجه به لم ۱، رابطهٔ $N = \bigcap_{\mathfrak{p}\in \mathrm{mAss}_R R} \mathfrak{q}(\mathfrak{p}) \subseteq \bigcap_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec} R,\, Ra\subseteq \mathfrak{p}} \mathfrak{p} = I$ و تساوی $Ra \cap N = aN = \circ$ خواهیم داشت:

$$I^{n-1} \subseteq (Ra:_R I) \subseteq (Ra:_R N) = (Ra \cap N:_R N) = (\circ:_R N) = \big(\circ:_R (\circ:_R a)\big) = Ra$$

که تناقض است. حال فرض کنید شرط (ب) برقرار باشد. چون $a^2N = \circ$ پس با توجه به قسمت قبل داریم:

$$\mathrm{Ext}_R^1(R/Ra^2, R) \neq \circ.$$

رشتهٔ دقیق

$$\circ \longrightarrow R/\big((\circ:_R a) + Ra\big) \xrightarrow{\ a\ } R/Ra^2 \longrightarrow R/Ra \longrightarrow \circ$$

را در نظر می‌گیریم. چون $(\circ:_R a) \subseteq Ra$، از رشتهٔ دقیق فوق رشتهٔ دقیق زیر حاصل می‌شود:

$$\mathrm{Ext}_R^1(R/Ra, R) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(R/Ra^2, R) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(R/Ra, R)$$

که نشان می‌دهد چون $\mathrm{Ext}_R^1(R/Ra^2, R) \neq \circ$ پس $\mathrm{Ext}_R^1(R/Ra, R) \neq \circ$.

مثال ۸. فرض کنید $R=K[x,y,z]/(\langle x,y\rangle\bigcap\langle x^2,y^2,z^2\rangle)$ که در آن K یک میدان است. تصاویر x، y و z در R را به ترتیب با نمادهای $\bar{x}$، $\bar{y}$ و $\bar{z}$ نمایش می‌دهیم. در این صورت با توجه به نمادگذاری ۶ داریم:
$\mathrm{ht}_R R\bar{z}=\mathrm{ht}_R R\bar{z}^2=1$، $N=\langle\bar{x},\bar{y}\rangle$، $\bar{z}^2N=\circ$ و $(\circ:_R\bar{z})\subseteq R\bar{z}$. بنابراین با توجه به قضیهٔ ۷ داریم: $\mathrm{Ext}^1_R(R/R\bar{z}^2,R)\neq\circ$ و $\mathrm{Ext}^1_R(R/R\bar{z}\,,R)\neq\circ$.

قضیه ۹. فرض کنید R یک حلقهٔ موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ و a عضوی از حلقهٔ R باشد به طوری که $\mathrm{ht}_R Ra=1$ و $aN=\circ$. در این صورت به ازای هر عضو دل‌خواه n از N داریم: $\mathrm{ht}_R R(a+n)=1$ و $\mathrm{Ext}^1_R(R/R(a+n),R)\neq\circ$.

برهان. مجموعهٔ عناصر مینیمال $\mathrm{Spec}R$ را با نماد $\mathrm{mSpec}R$ نمایش می‌دهیم. می‌دانیم که $\mathrm{mSpec}R=\mathrm{mAss}R$. چون $n\in N\subseteq\bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathrm{mSpec}R}\mathfrak{p}$ و $a\notin\bigcup_{\mathfrak{p}\in\mathrm{mSpec}R}\mathfrak{p}$ پس $a+n\notin\bigcup_{\mathfrak{p}\in\mathrm{mSpec}R}\mathfrak{p}$. بنابراین تساوی $\mathrm{ht}_R R(a+n)=1$ به وضوح برقرار است. برای اثبات قسمت دوم، قرار می‌دهیم $b=a+n$. با توجه به مطالب بیان شده در نمادگذاری ۶ داریم $(0:_R b)\subseteq N$ و بنابراین $a(0:_R b)\subseteq aN=0$. لذا تساوی‌هایی به شکل زیر برقرار است:

$$\circ=b(\circ:_R b)=a(\circ:_R b)+n(\circ:_R b)=n(\circ:_R b)$$

و در نتیجه $n\in\big(\circ:_R(\circ:_R b)\big)$. حال فرض کنید $\mathrm{Ext}^1_R(R/Rb,R)=\circ$. در این صورت با توجه به لم ۱ خواهیم داشت: $\big(\circ:_R(\circ:_R b)\big)=Rb$ و لذا $n\in Rb$. بنابراین عضوی از R مانند r موجود است به طوری که $n=rb=r(a+n)$. چون $b\notin N$ پس $r\in\mathfrak{m}$. بنابراین $n(1-r)=ra$ و $1-r$ در R یکال است. لذا داریم $n\in N\bigcap Ra=aN=\circ$. در نتیجه $b=a$ که با توجه به قضیه ۷ غیر ممکن است. بنابراین فرض خلف باطل است و داریم: $\mathrm{Ext}^1_R(R/Rb,R)\neq\circ$.

قضیه ۱۰. فرض کنید حلقهٔ موضعی $(R,\mathfrak{m})$ به گونه‌ای باشد که $N^2=\circ$ یا $(\circ:_R N)\nsubseteq\mathfrak{m}^2$. در این صورت به ازای هر ایده‌آل اصلی Ra با شرط $\mathrm{ht}_R Ra=1$ داریم: $\mathrm{Ext}^1_R(R/Ra,R)\neq\circ$.

برهان. فرض کنید $N^2=\circ$ و $\mathrm{Ext}^1_R(R/Ra,R)=\circ$. در این صورت با توجه به لم ۱ خواهیم داشت: $\big(\circ:_R(\circ:_R a)\big)=Ra$ و در نتیجه $(\circ:_R a)\subseteq N\subseteq(\circ:_R N)\subseteq\big(\circ:_R(\circ:_R a)\big)=Ra$. بنابراین داریم: $N\subseteq Ra\bigcap N=aN$ و لذا $N=aN$. با توجه به لم ناکایاما نتیجه می‌شود $N=\circ$. بنابراین $(\circ:_R a)=\circ$ و لذا a یک عضو غیر مقسوم‌علیه صفر است که تناقض است زیرا در این حالت داریم $\mathrm{Ext}^1_R(R/Ra,R)\neq\circ$.
حال فرض کنید $(\circ:_R N)\nsubseteq\mathfrak{m}^2$ و $\mathrm{Ext}^1_R(R/Ra,R)=\circ$. در این صورت با توجه به لم ۱ خواهیم داشت: $\big(\circ:_R(\circ:_R a)\big)=Ra$. عضوی از $(\circ:_R N)\setminus\mathfrak{m}^2$ مانند x را در نظر می‌گیریم. در این صورت داریم:

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.675]

$x \in (\circ:_R N) \subseteq \left(\circ:_R (\circ:_R a)\right) = Ra$. بنابراین عضوی از R مانند r موجود است به طوری که $x = ra$. چون $x \notin \mathfrak{m}^2$ پس r یکال است و لذا $a = r^{-1}x \in (\circ:_R N)$. بنابراین $(\circ:_R N) = Ra$. در نتیجه داریم $aN = \circ$ و لذا با توجه به قضیه ۷، $\mathrm{Ext}_R^1(R/Ra, R) \neq \circ$ که تناقض است.

قضیه ۱۱. فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقهٔ موضعی از بعد d باشد به طوری که $v(R) \leq d + 1$. در این صورت به ازای هر ایده‌آل اصلی Ra با شرط $\mathrm{ht}_R Ra = 1$ داریم: $\mathrm{Ext}_R^1(R/Ra, R) \neq \circ$.

برهان. می‌دانیم که $d \leq v(R) \leq d + 1$. اگر $v(R) = d$، آن‌گاه R یک حلقه منظم موضعی است و در این حالت چیزی برای اثبات نداریم. پس فرض کنید $v(R) = d + 1$. با توجه به یک‌دست باوفا بودن $\hat{R}$ به عنوان Rـمدول، $\mathrm{Ext}_R^1(R/Ra, R) \neq \circ$ اگر و تنها اگر $\mathrm{Ext}_{\hat{R}}^1\left(\hat{R}/\hat{R}a, \hat{R}\right) \neq \circ$. بنابراین با توجه به تساوی‌های $v\left(\hat{R}\right) = v(R)$، $\dim \hat{R} = \dim R$ و $\mathrm{ht}_{\hat{R}} \hat{R}a = \mathrm{ht}_R Ra$، بدون این که در کلیت اثبات اشکالی ایجاد شود می‌توان فرض کرد که R یک حلقه کامل است. در این صورت با توجه به قضیه ساختاری کوهن (قضیه ۲۱ از پیوست منبع [۱]) یک حلقهٔ منظم موضعی مانند S با ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{n}$ از بعد $d + 1$ موجود است به طوری که $R \cong S/J$ که در آن J ایده‌آلی از S است و $\mathrm{ht}_S J = 1$. اگر R کوهن‌ـمکالی باشد حکم بدیهی است. بنابراین می‌توان فرض کرد که R کوهن‌ـمکالی نیست و داریم:

$$J = \left(\bigcap_{i=1}^{l} \mathfrak{q}(\mathfrak{p}_i)\right) \cap \left(\bigcap_{i=l+1}^{k} \mathfrak{q}(\mathfrak{p}_i)\right)$$

که در آن برای $1 \leq i \leq l$، $\mathrm{ht}_S \mathfrak{p}_i = 1$ و برای $l + 1 \leq i \leq k$، $\mathrm{ht}_S \mathfrak{p}_i > 1$. با توجه به تمرین ۳,۲۰ منبع [۲] عضوی از S مانند f موجود است به طوری که $\bigcap_{i=1}^{l} \mathfrak{q}(\mathfrak{p}_i) = Sf$. بنابراین چون $J \subseteq Sf$ می‌توان نوشت: $J = f(J:_S f)$ که در آن $\bigcap_{i=l+1}^{k} \mathfrak{q}(\mathfrak{p}_i) \subseteq (J:_S f)$ و $\mathrm{ht}_S (J:_S f) > 1$. حال فرض کنید حکم برقرار نباشد و به ازای ایده‌آلی اصلی مانند Ra با شرط $\mathrm{ht}_R\, Ra = 1$ داشته باشیم $\mathrm{Ext}_R^1(R/Ra, R) = \circ$. در این صورت با توجه به لم ۱ خواهیم داشت: $\left(\circ:_R (\circ:_R a)\right) = Ra$. در این حالت داریم
$(\circ:_R a) \subseteq \bigcap_{i=1}^{l} \mathfrak{q}(\mathfrak{p}_i)/J = Sf/J \cong S/(J:_S f)$ و لذا خواهیم داشت:

$$(J:_S f)R \subseteq \left(\circ:_R (\circ:_R a)\right) = Ra$$

بنابراین با فرض $a = a_1 + J$ که در آن a_1 عضوی از S است داریم $(J:_S f) \subseteq Sa_1 + J$ و در نتیجه $(J:_S f) = (J:_S f) \cap Sa_1 + J$. چون $J = f(J:_S f) \subseteq \mathfrak{n}(J:_S f)$ پس با توجه به لم ناکایاما داریم $(J:_S f) = (J:_S f) \cap Sa_1$. بنابراین $(J:_S f) \subseteq Sa_1$ و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\mathrm{ht}_S (J:_S f) \leq \mathrm{ht}_S Sa_1 = 1$$

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.675]

که تناقض است. پس فرض خلف باطل است و به اجبار داریم: $\mathrm{Ext}_R^1(R/Ra, R) \neq \circ$. در این قسمت مثالی ارائه می‌دهیم که در آن با وجود این که روابط $N^2 \neq \circ$ و $\mathfrak{m}^2 \subseteq (\circ :_R N)$ برقرار است اما به ازای هر ایده‌آل اصلی مانند Ra با شرط $\mathrm{ht}_R Ra = 1$ داریم $\mathrm{Ext}_R^1(R/Ra, R) \neq \circ$. این مطلب نشان می‌دهد که عکس قضیه۱۰ برقرار نیست.

مثال۱۲. فرض کنید $R = K[\![x,y,z]\!]/(\langle x\rangle \cap \langle x^3, y\rangle)$ که در آن K یک میدان است. در این صورت R یک حلقهٔ موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m} = \langle x,y,z\rangle/(\langle x\rangle \cap \langle x^3, y^3\rangle)$ است. تصاویر x، y و z در R را به ترتیب با نمادهای $\bar{x}$، $\bar{y}$ و $\bar{z}$ نمایش می‌دهیم. دراین صورت با توجه به نمادگذاری ۶ داریم $N^2 = \langle \bar{x}\rangle^2 \neq \circ$ و $(\circ :_R N) = \langle \bar{x}^2, \bar{y}\, \rangle \nsubseteq \mathfrak{m}^2$، در حالی که با توجه به تساوی

$$v(R) = \dim R + 1 = 3$$

از قضیه ۱۱ نتیجه می‌شود که به ازای هر ایده‌آل اصلی مانند Ra با شرط $\mathrm{ht}_R Ra = 1$ داریم $\mathrm{Ext}_R^1(R/Ra, R) \neq \circ$. بنابراین عکس قضیهٔ ۱۰ برقرار نیست.

References

1. Bruns W., Herzog J., “Cohen-Macaulay Rings”, Cambridge University Press, Cambridge (1997).
2. Matsumura H., “Commutative Ring Theory”, Cambridge University Press, Cambridge (1989).
3. Rotman J. J., “An Introduction to Homological Algebra”, Academic Press, New York (1979).

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.675]