



Kharazmi University

# Numerical solution of multi order fractional differential equations using Lucas polynomials

Khosro Sayevand<sup>1</sup> ; Mohammadreza Rostami<sup>2</sup>  

1. Faculty of Mathematical Sciences and Statistics, Malayer University, Malayer, Iran.

✉E-mail: [Ksayehvand@Malayeru.ac.ir](mailto:Ksayehvand@Malayeru.ac.ir)

2. Faculty of Science, Mahallat Institute of Higher Education, Mahallat, Iran.

E-mail: [rostami.mohamadreza@gmail.com](mailto:rostami.mohamadreza@gmail.com)

---

---

## Article Info

## ABSTRACT

---

---

### Article type:

Research Article

### Article history:

Received:

26 July 2019

Revised form:

1 August 2019

Accepted:

9 August 2020

Published online:

14 May 2022

### Keywords:

Fractional derivatives;  
fractional integrals;  
multi order fractional differential equations;  
Lucas polynomials;  
Gauss quadrature method;  
error analysis.

### Introduction

This paper presents a reliable numerical technique based on Lucas polynomials for a family of fractional differential equations and multi order fractional differential equations by means of the least square method. The fractional derivative is in the Caputo sense. A relevant feature of this approach is the analyzing of the suggested technique by Gauss quadrature method and using the theory of Lagrange multipliers to solve a constrained optimization problem. An upper error bound, the convergence, and error analysis of the scheme are investigated and the CPU time used, the values of maximum errors, the numerical convergence analysis based on the proposed technique for different values of parameters are discussed. Furthermore the results of present technique are compared with the, operational matrix of hybrid basis functions, the Jacobi orthogonal functions and pseudo-spectral scheme. In order to introduce the numerical behavior of the proposed technique in case of non-smooth solutions, this issue is discussed. In this case, the obtained results imply an elegant superiority of our proposed technique. The numerical examples illustrate the accuracy and performance of the technique. Finally extending the proposed technique to high dimensions and system of fractional differential equations can be examined as a further works.

### Material and methods

In this study, the least square method, the Gauss quadrature method and the theory of Lagrange multipliers are used to solve a constrained optimization problem.

---

---

---

### Results and discussion

Several numerical examples are examined using the proposed technique. The numerical examples illustrate the accuracy and performance of the technique. Also, the numerical results reported in the tables indicate that the accuracy improve by increasing the degree of the Lucas polynomials.

### Conclusion

In this paper, Lucas polynomials have been successfully applied to compute the approximate solution of the fractional differential equations and multi order fractional differential equations. The results show that:

- The proposed technique provides the solutions in terms of convergent series with easily computable components in a direct way, without using linearization, perturbation or restrictive assumption.
- The proposed technique is very straightforward and the solution procedure can be done easily.
- The numerical behavior of the proposed technique in case of non-smooth solutions, demonstrated that the obtained results imply an elegant superiority of our proposed technique.

---

**How to cite:** Sayevand, Kh., Rostami, M.; (2022). Numerical solution of multi order fractional differential equations using Lucas polynomials. *Mathematical Researches*, 8 (1), 184-204



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

---

## روشی کارا در بررسی رفتار معادلات دیفرانسیل کسری

خسرو سایوند<sup>۱</sup>، محمدرضا رستمی<sup>۲</sup> ✉

۱. گروه ریاضی، دانشگاه ملایر، ملایر، ایران. پست الکترونیکی: [Ksayehvand@Malayeru.ac.ir](mailto:Ksayehvand@Malayeru.ac.ir)

۲. نویسنده مسئول، گروه ریاضی، مرکز آموزش عالی محلات، محلات، ایران. پست الکترونیکی: [rostami.mohamadreza@gmail.com](mailto:rostami.mohamadreza@gmail.com)

### چکیده

### اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

در این مقاله یک روش جدید برای حل معادله دیفرانسیل کسری و چندمرتبه‌ای کسری مورد مطالعه قرار می‌گیرد. مشتق کسری از نوع کاپوتو می‌باشد. در این روش ابتدا به کمک چند جمله‌ای‌های لوکاس به عنوان پایه، یک تقریب برای جواب معادله در نظر می‌گیریم. به کمک این تقریب، این معادله را به یک مسأله کمترین مربعات تبدیل می‌کنیم. برای حل مسأله کمترین مربعات از روش انتگرال گیری گاوس استفاده می‌کنیم. سپس با استفاده از قضیه ضرائب لاگرانژ یک مسأله بهینه‌سازی مقید را حل می‌کنیم. با حل این مسأله، جواب تقریبی برای معادله دیفرانسیل حاصل می‌شود. همگرایی و آنالیز خطای این روش مورد بررسی قرار می‌گیرد و مثال‌های عددی نشان می‌دهد که این روش، مؤثر و کارا است.

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۵/۰۴

تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۵/۱۱

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۵/۱۹

تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۲/۲۴

### واژه‌های کلیدی:

مشتق و انتگرال کسری، معادله دیفرانسیل کسری و چندمرتبه‌ای کسری، چندجمله‌ای لوکاس، انتگرال گیری گاوس، تحلیل خطا.

استناد: سایوند، خسرو؛ رستمی، محمدرضا؛ (۱۴۰۱). روشی کارا در بررسی رفتار معادلات دیفرانسیل کسری. پژوهش‌های ریاضی، ۸ (۱)، ۲۰۴-۱۸۴.



© نویسندگان.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

## ۱. مقدمه

مدل سازی بسیاری از مسائل طبیعی منجر به یک معادله دیفرانسیل خواهد شد که معادله دیفرانسیل چند-مرتبه‌ای یکی از مهم ترین معادلات دیفرانسیل ایجاد شده می‌باشد. با گسترش مطالعه در زمینه معادلات دیفرانسیل کسری، معادله دیفرانسیل چند-مرتبه‌ای کسری نیز مورد مطالعه قرار گرفته است. از آن جا که تا کنون انواع مختلفی از مشتقات کسری تعریف شده است می‌توان این معادله را با انواع مختلف تعریف مشتق کسری در نظر گرفت و مورد مطالعه قرار داد. معادلات دیفرانسیل کسری در سایر علوم و شاخه‌های فنی و مهندسی کاربرد فراوان دارد. به عنوان مثال در مکانیک سیالات [۱]، کنترل بهینه [۲]، پردازش سیگنال [۳]، زیست‌شناسی و پزشکی [۴] و ساختار سالیتون [۵] می‌توان نام برد. انتگرال و مشتق کسری در واقع انتگرال و مشتق از مرتبه دلخواه تعریف می‌شوند.

**تعریف ۱:** فرض می‌کنیم  $f \in C[a, b]$  و  $\alpha > 0$  مقداری حقیقی و دلخواه باشد، در این صورت انتگرال کسری ریمان لیوویل از مرتبه  $\alpha$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$${}_a I_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt; \quad x > a. \quad (1)$$

در صورتی که  $a = 0$  باشد، می‌توان انتگرال کسری  $f$  را به صورت ضرب پیچشی  $f$  و  $x^{\alpha-1}$  تعریف کرد. پس

$${}_0 I_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} * f(x).$$

**تعریف ۲:** فرض می‌کنیم  $f \in C^n[a, b]$  و  $n-1 < \alpha \leq n$  مقداری حقیقی و دلخواه باشد، در این صورت مشتق کسری کاپوتو از مرتبه  $\alpha$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$${}_a^C D_x^\alpha f(x) = {}_a I_x^{n-\alpha} f^{(n)}(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{1+\alpha-n}} dt. \quad (2)$$

برای مطالعه بیشتر در زمینه حسابان از مرتبه کسری می‌توان به مراجع [۶،۷] مراجعه نمود. معادلات دیفرانسیل کسری مورد مطالعه در این مقاله، دارای مشتق کسری از نوع کاپوتو می‌باشد.

معادله دیفرانسیل چند-مرتبه‌ای کسری را در حالت کلی به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$${}_a^C D_x^\alpha y(x) = g(x, y(x), {}_a^C D_x^{\beta_1} y(x), {}_a^C D_x^{\beta_2} y(x), \dots, {}_a^C D_x^{\beta_k} y(x)), \quad (3)$$

با شرایط اولیه  $y^{(i)}(0) = y_i$  به ازای  $i = 0, 1, \dots, n-1$  که در آن  $n \in \mathbb{N}$  و  $n-1 < \alpha \leq n$  و  $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_k < \alpha$  و برای هر  $j = 1, 2, \dots, k$  وجود دارد  $n_j \in \mathbb{N}$  به طوری که  $n_j - 1 < \beta_j \leq n_j$ .

حل بسیاری از مسائل در سایر رشته‌ها به حل یک معادله دیفرانسیل با مشتقات کسری منجر می‌شود لذا بررسی و روش‌های حل این دسته از معادلات دیفرانسیل حائز اهمیت می‌باشد. از آن جا که بسیاری از این معادلات با روش‌های مستقیم و تحلیلی حل نمی‌شوند، حل عددی و تقریبی این معادلات مورد توجه و مطالعه قرار می‌گیرد. در مقاله [۸] روش عددی ریتز برای حل معادله دیفرانسیل چند-مرتبه‌ای کسری مورد مطالعه قرار گرفته است و در آن همگرایی

روش و خطای آن نیز بررسی شده است. وجود جواب، یکتایی جواب برای حل معادله دیفرانسیل چند-مرتبه ای کسری در مقاله [۹] مورد بررسی قرار گرفته است و روش بازسازی شده تکرار تغییراتی برای حل معادله استفاده شده است. روش های دیگر برای حل این معادله به کار رفته است که مبتنی بر چندجمله ای ها می باشند. از آن جمله می توان به استفاده از چندجمله ای های چبیشف و چبیشف انتقال یافته اشاره کرد. در برخی از این روش ها از ماتریس های عملیاتی برای به دست آوردن جواب تقریبی استفاده شده است، برای مطالعه بیشتر می توان به مقالات [۱۰، ۱۱] مراجعه کرد. چندجمله ای های لژاندر، برنشتاین و بوباکر نیز برای حل این معادله استفاده شده است [۱۲-۱۵]. همچنین روش هم‌مکانی طیفی با پایه چندجمله ای های چبیشف برای حل این معادله به کار رفته است که برای مطالعه آن می توان مقاله [۱۶] را مشاهده کرد. در مقاله [۱۷] روش عددی که از ترکیب توابع چندجمله ای لژاندر و چندجمله ای بلاک-پالس ایجاد شده است برای حل معادله دیفرانسیل چند-مرتبه ای کسری خطی و غیرخطی به کار رفته است که در آن همگرایی روش و خطای آن مطالعه شده است. مویک ها نیز برای حل این معادله استفاده شده است که یک روش عددی مناسب برای تقریب جواب معادله می باشد برای مطالعه می توان مقالات [۱۸-۲۰] را مشاهده کرد. در مقاله [۲۱] نویسندگان، ماتریس های عملیاتی را برای چند جمله ای های لوکاس محاسبه نموده اند و به کمک آنها معادله دیفرانسیل چند-مرتبه ای کسری را حل نموده اند. روش های عددی بر پایه ماتریس های عملیاتی برای دسته های دیگر معادلات دیفرانسیل کسری نیز به کار رفته است. از آن جمله در [۲۲] معادله تلگراف دو بعدی کسری با استفاده از ماتریس های عملیاتی بر پایه چندجمله ای های لژاندر انتقال یافته حل و بررسی شده است.

در این مقاله، ما روش عددی جدید برای حل معادله دیفرانسیل کسری و چند-مرتبه ای کسری خطی و غیرخطی به کار می بریم. در این روش ابتدا به کمک چندجمله ای های لوکاس تقریبی برای جواب معادله در نظر می گیریم و پس از تبدیل معادله به یک مسأله کمترین مربعات، از انتگرال گیری گاوس برای محاسبه انتگرال به دست آمده استفاده می کنیم. در ادامه با در نظر گرفتن شرایط اولیه و مرزی داده شده معادله دیفرانسیل را به یک مسأله بهینه سازی مقید تبدیل می کنیم، که با اعمال روش ضرائب لاگرانژ تقریب مورد نظر به دست می آید.

این مقاله شامل چند بخش به شرح ذیل می باشد. در بخش دوم مقاله، چندجمله ای های لوکاس و برخی خواص آن و تقریب توابع را بیان می کنیم. در بخش سوم مقاله، روش عددی را بیان و آن را برای حل معادله دیفرانسیل پیاده سازی می کنیم. در بخش چهارم مقاله، قضیه های همگرایی و تجزیه و تحلیل خطا مطرح می شود و در نهایت در بخش پنجم مقاله، چند مثال و معادله مطرح می کنیم و روش بیان شده را برای حل آن ها به کار می بریم. با مقایسه نتایج به دست آمده از به کار گیری این روش برای حل معادله دیفرانسیل چند-مرتبه ای کسری با سایر روش های ارائه شده در سایر مقالات، مشخص می شود که این روش برای حل این معادله مؤثر و کارا می باشد.

## ۲. معرفی چندجمله ای لوکاس و تقریب توابع

در این بخش چندجمله ای های لوکاس و برخی از خواص آنها را بیان می کنیم.

**تعریف ۳:** چندجمله ای های اصلاح شده لوکاس از درجه  $n$  با پارامترهای  $a \in R^+$  و  $b \in R$  را با  $\phi_n^{a,b}$  نشان می دهیم و به صورت رابطه بازگشتی زیر تعریف می شوند [۲۱]

$$\phi_n^{a,b}(x) = a x \phi_{n-1}^{a,b}(x) + b \phi_{n-2}^{a,b}(x), \quad n \geq 2, \quad (4)$$

$$\phi_0^{a,b}(x) = 2 \text{ و } \phi_1^{a,b}(x) = ax \text{ که در آن}$$

به ازای  $a = b = 1$  چندجمله‌ای لوکاس در سال ۱۹۷۰ توسط بیکنل معرفی شده است [۲۳]. این چندجمله‌ای شباهت بسیار زیادی با چندجمله‌ای فیبوناتچی دارد و فقط جملات شروع آن متفاوت است. اگر در (۴) به ازای  $a = b = 1$  مقدار  $x$  را برابر ۱ در نظر بگیریم آن‌گاه اعداد لوکاس به دست می‌آیند. اگر  $n$  عددی فرد باشد چندجمله‌ای اصلاح شده لوکاس از درجه فرد و اگر  $n$  عددی زوج باشد چندجمله‌ای اصلاح شده لوکاس از درجه زوج است. به کمک رابطه زیر می‌توان چندجمله‌ای‌های اصلاح شده لوکاس را به طور مستقیم به دست آورد.

$$\phi_n^{a,b}(x) = \left( \frac{ax + \sqrt{a^2x^2 + 4b}}{2} \right)^n + \left( \frac{ax - \sqrt{a^2x^2 + 4b}}{2} \right)^n, \quad n \geq 0.$$

همچنین رابطه زیر نیز چندجمله‌ای‌های لوکاس را نتیجه می‌دهد.

$$\phi_n^{a,b}(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} (ax)^{n-2k} b^k, \quad n \geq 0.$$

به سادگی می‌توان بررسی کرد که در چندجمله‌ای‌های اصلاح شده لوکاس با در نظر گرفتن پارامترهای  $a = 2$  و  $b = -1$  چندجمله‌ای‌های به دست آمده دو برابر چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول می‌باشند. پس چندجمله‌ای‌های اصلاح شده لوکاس حالت تعمیم یافته چند نوع چندجمله‌ای می‌باشد که می‌توان ویژگی‌های مختلفی برای هر کدام از آنها بیان کرد. به عنوان مثال چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول که حالت خاصی از چندجمله‌ای‌های اصلاح شده لوکاس می‌باشد دارای ویژگی‌های متعددی است و کاربرد فراوانی در حل معادلات دیفرانسیل دارند. تعدادی از چندجمله‌ای‌های اصلاح شده لوکاس در جدول ۱ نشان داده شده است.

جدول ۱: تعدادی از چندجمله‌ای‌های لوکاس

$n$	$\phi_n^{a,b}$
2	$a^2x^2 + 2b$
3	$a^3x^3 + 3abx$
4	$a^4x^4 + 4a^2bx^2 + 2b^2$

از چندجمله‌ای‌های لوکاس به عنوان توابع چندجمله‌ای پایه، برای تقریب توابع استفاده می‌شود. فرض می‌کنیم تابع  $f$  روی  $L^2[0,1]$  تعریف شده باشد، در این صورت بسط تابع  $f$  بر حسب چندجمله‌ای لوکاس به شکل زیر بیان می‌شود

$$f(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \phi_k^{a,b}(\cdot). \quad (5)$$

اما در محاسبات، تعدادی متناهی از سری فوق به عنوان تقریب در نظر گرفته می‌شود، در نتیجه

$$f(\cdot) \approx f_M(\cdot) = \sum_{k=0}^M c_k \phi_k^{a,b}(\cdot) = C^T \Phi(\cdot) \quad (6)$$

که در آن  $C^T = [c_0, c_1, \dots, c_M]$  و  $\Phi(\cdot) = [\phi_0^{a,b}(\cdot), \phi_1^{a,b}(\cdot), \dots, \phi_M^{a,b}(\cdot)]^T$

### ۳. حل معادله دیفرانسیل چند-مرتبه‌ای کسری

معادله دیفرانسیل چند-مرتبه‌ای کسری (۳) را در نظر می‌گیریم. این معادله ممکن است دارای شرایط اولیه یا مرزی باشد که با شرایط داده شده برای مسئله، این روش قابل اجرا می‌باشد. با توجه به رابطه (۶) تقریبی برای جواب معادله  $(y_M)$  به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$y(x) \approx y_M(x) = \sum_{k=0}^M c_k \phi_k^{a,b}(x). \quad (7)$$

اکنون تابع  $G$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$G(x, y(x), {}^c D_x^\alpha y(x), {}^c D_x^{\beta_1} y(x), {}^c D_x^{\beta_2} y(x), \dots, {}^c D_x^{\beta_k} y(x)) \\ = ({}^c D_x^\alpha y(x) - g(x, y(x), {}^c D_x^{\beta_1} y(x), {}^c D_x^{\beta_2} y(x), \dots, {}^c D_x^{\beta_k} y(x)))^2 = 0, \quad (8)$$

با استفاده از مسئله کمترین مربعات برای معادله (۸) می‌توان مسئله بهینه‌سازی زیر را در نظر گرفت

$$F[y] = \text{Min} \int_0^1 G(x, y(x), {}^c D_x^{\beta_1} y(x), {}^c D_x^{\beta_2} y(x), \dots, {}^c D_x^{\beta_k} y(x)) dx, \quad (9)$$

که دارای قیدهای زیر می‌باشد

$$y^{(i)}(0) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

و همان شرایط اولیه معادله می‌باشند.

اکنون تقریب (۷) را در مسئله بالا جای گذاری می‌کنیم

$$F[y_M] = \text{Min} \int_0^1 G(x, y_M(x), {}^c D_x^{\beta_1} y_M(x), {}^c D_x^{\beta_2} y_M(x), \dots, {}^c D_x^{\beta_k} y_M(x)) dx, \quad (10)$$

واضح است

که حاصل انتگرال فوق تابعی بر حسب متغیرها و ضرایب  $c_k$  می‌باشد. برای محاسبه انتگرال فوق از روش انتگرال گیری عددی گاوس استفاده می‌کنیم.

$$F \approx \frac{1}{2} \sum_{q=1}^L w_q ({}^c D_x^\alpha y_M(\gamma_q) - g(\gamma_q, y_M(\gamma_q), {}^c D_x^{\beta_1} y_M(\gamma_q), {}^c D_x^{\beta_2} y_M(\gamma_q), \dots, {}^c D_x^{\beta_k} y_M(\gamma_q)))^2,$$

که در آن  $\gamma_q = \frac{\tau_q + 1}{2}$  و به ازای  $q = 1, 2, \dots, L$ ،  $\tau_q$  ریشه‌های چندجمله‌ای لژاندر از درجه  $L$  می‌باشد

و  $w_q$  ضرایب انتگرال گیری گاوس می‌باشند که از رابطه زیر به دست می‌آیند [۲۵، ۲۴].

$$w_q = \frac{-2}{(L+1)P'_L(\tau_q)P_{L+1}(\tau_q)}. \quad (11)$$

شرایط اولیه داده شده به ازای  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$  را با توجه به تقریب در نظر گرفته شده به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$y^{(i)}(0) - y_i \approx y_M^{(i)}(0) - y_i = 0. \quad (12)$$

که در آن  $y_M(x) = \sum_{k=0}^M c_k \phi_k^{a,b}(x)$  بردار سطری  $n$  بعدی  $\Lambda$  را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\Lambda^T = [y_M(0) - y_0, y_M^{(1)}(0) - y_1, \dots, y_M^{(n-1)}(0) - y_{n-1}] \quad (13)$$

اکنون مسأله جدید زیر در نظر می‌گیریم

$$F^*[c_0, c_1, \dots, c_M, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n] = F[c_0, c_1, \dots, c_M] + \Lambda^T \lambda, \quad (14)$$

که در آن  $\lambda^T = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$  بردار ضرائب لاگرانژ می‌باشد. با در نظر گرفتن مسأله بهینه‌سازی با شرایط فوق می‌توان شرط لازم بهینگی برای تعیین جواب را بررسی و به صورت زیر بیان کرد.

$$\frac{\partial F^*}{\partial c_k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, M, \quad \frac{\partial F^*}{\partial \lambda_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (15)$$

که یک دستگاه معادلات جبری با  $(M+n+1)$  معادله و  $(M+n+1)$  مجهول می‌باشد. با حل دستگاه فوق با روش تکراری نیوتن و تعیین مقادیر مجهول، جواب تقریبی برای معادله حاصل می‌شود. اگر برای به دست آوردن جواب تقریبی، از  $M$  چند جمله‌ای اصلاح شده لوکاس و انتگرال گیری گاوس  $L$  نقطه‌ای استفاده کنیم، آن‌گاه جواب تقریبی را با  $y_M^L(x)$  نشان می‌دهیم.

#### ۴. آنالیز همگرایی

در این بخش همگرایی روش بیان شده را بررسی می‌کنیم و چند قضیه در زمینه همگرایی و کران بالای خطا بیان و اثبات می‌کنیم.

نرم سوبولوف را به ازای مقادیر صحیح  $\mu \geq 0$  روی  $(0,1)$ ، به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|y\|_{W^{\mu}(0,1)} = \left( \sum_{i=0}^{\mu} \int_0^1 |y^{(i)}(x)| dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{i=0}^{\mu} \|y^{(i)}\|_{L^2(0,1)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (16)$$



که در آن  $y^{(i)}$  مشتق مرتبه  $i$  از تابع  $y$  می باشد. را به صورت زیر تعریف می کنیم [۲۶]

$$|y|_{W^{\mu;M}(0,1)} = \left( \sum_{i=\text{Min}(\mu, M+1)}^{\mu} \|y^{(i)}\|_{L^2(0,1)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (17)$$

قضیه زیر کران بالایی برای ضرائب تقریب (۵) بیان می کند.

**قضیه ۱:** فرض می کنیم  $f$  روی  $[۱, ۰]$  تعریف شده باشد و برای  $i \geq 0$  داشته باشیم  $f^{(i)}(0) \leq \Delta^i$  که  $\Delta$  ضریبی مثبت است و  $M \in N$ ، در این صورت اگر  $f$  به صورت (۵) بسط داده شود، آن گاه داریم

$$|c_k| \leq \frac{|a|^{-k} \Delta^k \cosh\left(2|a|^{-1} b^{\frac{1}{2}} \Delta\right)}{k!}, \quad (18)$$

و

$$|f(x) - f_M(x)| < \frac{2e^{\Delta S} + \cosh(2\Delta S) S^{M+1}}{(M+1)!}, \quad (19)$$

که در آن  $S = 1 + \sqrt{1 + a^{-2}b}$ .

**برهان.** اثبات در [۲۱].

■

قضیه فوق بیان می کند که ضرائب موجود در بسط یک تابع که به صورت رابطه (۵) بسط داده می شود دارای یک کران بالا می باشد که با افزایش  $k$  این ضرائب کوچک تر می شوند. همچنین خطای مطلق تقریب با افزایش  $M$  مقدار کاهش می یابد. در واقع، بیان کننده کوچک شدن خطا با افزایش تعداد جملات تقریب می باشد.

**قضیه ۲:** فرض می کنیم  $f$  روی  $[۱, ۰]$  تعریف شده و  $E_N(f)$  خطای حاصل از به کارگیری روش انتگرال گیری گاوس با  $N$  نقطه برای  $f$  روی  $[۱, ۰]$  باشد، در این صورت اگر  $f' \in C[0,1]$  باشد، آن گاه

$$E_N(f) = \frac{3\pi}{N} \int_0^1 |f'(t)| \sqrt{1 - (2t-1)^2} dt. \quad (20)$$

**برهان.** اثبات در [۲۷].

■

قضیه فوق بیان می کند که خطای روش انتگرال گیری گاوس که ما در حل معادله به کار می بریم با افزایش تعداد نقاط انتگرال گیری ( $N$ ) کاهش می یابد و ضریب اطمینان روش بالا می رود.

**قضیه ۳:** فرض می کنیم  $y \in W^{\mu}[0,1]$  به طوری که  $\mu \geq 0$  و  $\mathcal{Y}_M$  بهترین تقریب برای  $y$  باشد، در این صورت

$$\|y - y_M\|_{L^2(0,1)} \leq cM^{-\mu} |y|_{W^{\mu;M}(0,1)}, \quad (21)$$

و برای  $1 \leq s < \mu$

$$\|y - y_M\|_{W^s(0,1)} \leq cM^{2s-\frac{1}{2}-\mu} \|y\|_{W^{\mu;M}(0,1)}, \quad (22)$$

که  $c$  به  $\mu$  وابسته است.

برهان. اثبات در [۲۶, ۲۸].

■

نتیجه ۱: از آن جا که بهترین تقریب منحصر به فرد است پس تقریب با چند جمله‌ای‌های لوکاس نیز دارای کران بالا به صورت زیر می‌باشد

$$\|y - y_M\|_{L^2(0,1)} \leq cM^{-\mu} \|y^{(\mu)}\|_{L^2(0,1)}, \quad (23)$$

و برای  $1 \leq s \leq \mu$

$$\|y - y_M\|_{W^s(0,1)} \leq cM^{2s-\frac{1}{2}-\mu} \|y^{(\mu)}\|_{L^2(0,1)}. \quad (24)$$

در قضیه زیر کران بالا برای تفاضل مشتق‌های کسری تابع  $y$  و تقریب آن به کمک چندجمله‌ای‌های لوکاس را به دست می‌آوریم.

قضیه ۴: فرض می‌کنیم  $y \in W^\mu[0,1]$  به طوری  $\mu \geq 0$  و  $M \geq s-1$  و  $n_\alpha - 1 < \alpha \leq n_\alpha \leq s$  در این صورت

$$\|{}_0^C D_x^\alpha y - {}_0^C D_x^\alpha y_M\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{cM^{2s-\frac{1}{2}-\mu} \|y^{(\mu)}\|_{L^2(0,1)}}{\Gamma(n_\alpha - \alpha + 1)}, \quad (25)$$

که در آن  $1 \leq s < \mu$ .

برهان. با توجه به خواص مشتق و انتگرال کسری می‌توان نوشت  ${}_a^C D_x^\alpha f(x) = I_x^{n-\alpha} {}_a^C D_x^n f(x)$  از طرف دیگر

می‌دانیم  $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$  که در آن  $*$  ضرب پیچشی دو تابع  $f$  و  $g$  می‌باشد.

$$\begin{aligned} & \left\| {}_0^C D_x^\alpha y - {}_0^C D_x^\alpha y_M \right\|_{L^2(0,1)}^2 \\ &= \left\| I_x^{n-\alpha} \left( {}_0^C D_x^{n_\alpha} y - {}_0^C D_x^{n_\alpha} y_M \right) \right\|_{L^2(0,1)}^2 \\ &= \left\| \frac{1}{x^{1+\alpha-n_\alpha} \Gamma(n_\alpha - \alpha)} * \left( {}_0^C D_x^{n_\alpha} y - {}_0^C D_x^{n_\alpha} y_M \right) \right\|_{L^2(0,1)}^2, \end{aligned}$$

که در آن  $\ast$  نماد ضرب پیچشی دو تابع و  $n_\alpha \geq 1$  عددی صحیح است. لذا مطابق با  $\|f \ast g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$  می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{x^{1+\alpha-n_\alpha} \Gamma(n_\alpha - \alpha)} \ast \left( {}^C D_x^{n_\alpha} y - {}^C D_x^{n_\alpha} y_M \right) \right\|_{L^2(0,1)}^2 \\ & \leq \left( \frac{1}{(n_\alpha - \alpha) \Gamma(n_\alpha - \alpha)} \right)^2 \left\| \left( {}^C D_x^{n_\alpha} y - {}^C D_x^{n_\alpha} y_M \right) \right\|_{L^2(0,1)}^2 \\ & = \left( \frac{1}{\Gamma(n_\alpha - \alpha + 1)} \right)^2 \left\| \left( {}^C D_x^{n_\alpha} (y - y_M) \right) \right\|_{L^2(0,1)}^2, \end{aligned}$$

با توجه به تعریف نرم سوبولوف در رابطه (۱۶) و این که  $1 \leq n_\alpha \leq s$  است، داریم

$$\left\| \left( {}^C D_x^{n_\alpha} (y - y_M) \right) \right\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \sum_{i=0}^s \left\| \left( {}^C D_x^i (y - y_M) \right) \right\|_{L^2(0,1)}^2 = \|y - y_M\|_{W^s(0,1)}^2,$$

لذا با توجه به نتیجه ۱ می‌توان نوشت

$$\left\| {}^C D_x^\alpha y - {}^C D_x^\alpha y_M \right\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \left( \frac{\|y - y_M\|_{W^s(0,1)}}{\Gamma(n_\alpha - \alpha + 1)} \right)^2 \leq \left( \frac{cM^{2s-\frac{1}{2}} \|y^{(\mu)}\|_{L^2(0,1)}}{\Gamma(n_\alpha - \alpha + 1)} \right)^2.$$

در نهایت با جذرگیری از طرفین نامساوی فوق رابطه (۲۵) حاصل می‌شود.

■

**قضیه ۵:** فرض می‌کنیم  $y \in W^\mu[0,1]$  به طوری  $\mu \geq 0$  و  $M \geq s-1$  و تابع  $G$  در  $(\lambda)$  لپشیتز با ضریب  $\eta$  باشد، در این صورت کران بالای خطای روش ارائه شده  $E_M$  به صورت زیر می‌باشد.

$$\|E_M\|_{L^2(0,1)} \leq \eta c M^{-\mu} \left( 1 + \frac{M^{2s-\frac{1}{2}}}{\Gamma(n_\alpha - \alpha + 1)} + \sum_{i=1}^k \frac{M^{2s-\frac{1}{2}}}{\Gamma(n_{\beta_i} - \beta_i + 1)} \right) \|y^{(\mu)}\|_{L^2(0,1)} \quad (26)$$

که در آن  $1 \leq s < \mu$ .

**برهان.** ابتدا  $E_M$  را به صورت زیر قرار می‌دهیم

$$\|E_M\|_{L^2(0,1)} = \|F[y] - F[y_M]\|_{L^2(0,1)}, \quad (27)$$

با توجه به رابطه (9) می‌توان نوشت

$$\|E_M\|_{L^2(0,1)} = \left\| \int_0^1 G dx - \int_0^1 G_M dx \right\|_{L^2(0,1)}, \quad (28)$$

که در آن

$$G = G(x, y(x), {}^C_0D_x^\alpha y(x), {}^C_0D_x^{\beta_1} y(x), {}^C_0D_x^{\beta_2} y(x), \dots, {}^C_0D_x^{\beta_k} y(x)), \quad (29)$$

و

$$G_M = G(x, y_M(x), {}^C_0D_x^\alpha y_M(x), {}^C_0D_x^{\beta_1} y_M(x), {}^C_0D_x^{\beta_2} y_M(x), \dots, {}^C_0D_x^{\beta_k} y_M(x)), \quad (30)$$

از آن جا که فرض کرده بودیم تابع  $G$  لیبشیتز با ضریب  $\eta$  می‌باشد، پس داریم:

$$\begin{aligned} \|E_M\|_{L^2(0,1)} &\leq \eta \int_0^1 \|y - y_M\|_{L^2(0,1)} dx + \eta \int_0^1 \| {}^C_0D_x^\alpha y - {}^C_0D_x^\alpha y_M \|_{L^2(0,1)} dx \\ &\quad + \eta \sum_{i=1}^k \int_0^1 \| {}^C_0D_x^{\beta_i} y - {}^C_0D_x^{\beta_i} y_M \|_{L^2(0,1)} dx. \end{aligned} \quad (31)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \|E_M\|_{L^2(0,1)} &\leq \eta \|y - y_M\|_{L^2(0,1)} + \eta \| {}^C_0D_x^\alpha y - {}^C_0D_x^\alpha y_M \|_{L^2(0,1)} \\ &\quad + \eta \sum_{i=1}^k \| {}^C_0D_x^{\beta_i} y - {}^C_0D_x^{\beta_i} y_M \|_{L^2(0,1)}. \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \|E_M\|_{L^2(0,1)} &\leq \eta c M^{-\mu} \|y^{(\mu)}\|_{L^2(0,1)} + \eta \frac{c M^{2s-\frac{1}{2}-\mu} \|y^{(\mu)}\|_{L^2(0,1)}}{\Gamma(n_\alpha - \alpha + 1)} \\ &\quad + \eta \sum_{i=1}^k \frac{c M^{2s-\frac{1}{2}-\mu} \|y^{(\mu)}\|_{L^2(0,1)}}{\Gamma(n_{\beta_i} - \beta_i + 1)} \end{aligned} \quad (33)$$

اکنون با توجه به نتیجه ۱ و قضیه ۴ داریم

در نتیجه

$$\|E_M\|_{L^2(0,1)} \leq \eta c M^{-\mu} \left( 1 + \frac{M^{2s-\frac{1}{2}}}{\Gamma(n_\alpha - \alpha + 1)} + \sum_{i=1}^k \frac{M^{2s-\frac{1}{2}}}{\Gamma(n_{\beta_i} - \beta_i + 1)} \right) \|y^{(\mu)}\|_{L^2(0,1)} \quad (34)$$

و اثبات قضیه تمام است.

■

تذکر: در صورتی که جواب دقیق معادله مشخص نباشد، برای تحلیل خطا در رابطه (۳۴) روش‌های متفاوتی برای تقریب مشتق نظیر ایده‌های عددی مربوط به خواص تابع میتاگ لفلر و بهره جویی از خواص آن وجود دارد. از آن جمله می‌توان مقاله‌های [۲۹, ۳۰] را ملاحظه نمود.

## ۵. مثال های عددی

در این بخش چند معادله دیفرانسیل کسری و چند-مرتبه‌ای کسری را در نظر می‌گیریم و روش بیان شده در این مقاله را برای حل آنها به کار می‌بریم. نتایج عددی به دست آمده را با نتایج عددی سایر روش‌ها و جواب دقیق معادله مقایسه می‌کنیم. با توجه به نتایج به دست آمده مشخص می‌باشد که این روش، روشی مؤثر و کارا برای حل معادله دیفرانسیل چند-مرتبه‌ای کسری می‌باشد.

**مثال ۱:** معادله دیفرانسیل چند-مرتبه‌ای کسری غیرخطی زیر را با شرایط اولیه در نظر می‌گیریم.

$$a_1 {}^C D_x^\alpha y(x) + a_2 {}^C D_x^{\beta_1} y(x) + a_3 {}^C D_x^{\beta_2} y(x) + a_4 (y(x))^3 = f(x),$$

$$0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0,$$

که در آن

$$f(x) = \frac{2a_1 x^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + \frac{2a_2 x^{3-\beta_1}}{\Gamma(4-\beta_1)} + \frac{2a_3 x^{3-\beta_2}}{\Gamma(4-\beta_2)} + \frac{a_4 x^9}{27}.$$

جواب دقیق این معادله  $y(x) = \frac{x^3}{3}$  است. روش ارائه شده در این مقاله را برای حل معادله به کار می‌بریم. برای این منظور فرض می‌کنیم  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$  و  $\beta_2 = 0.75$  و  $\alpha = 2.2$ ,  $\beta_1 = 1.25$  باشند، در این صورت تقریب زیر را برای جواب معادله در نظر می‌گیریم

$$y_M(x) \approx \sum_{k=0}^M c_k \phi_k^{a,b}(x). \quad (35)$$

تقریب فوق را در معادله قرار می‌دهیم و به مساله زیر می‌رسیم

$$\text{Min} \int_0^1 \left( {}^C D_x^\alpha y_M(x) + {}^C D_x^{\beta_1} y_M(x) + {}^C D_x^{\beta_2} y_M(x) + (y_M(x))^3 - f(x) \right)^2 dx, \quad (36)$$

با قید های زیر

$$\begin{aligned} \Lambda_1 & \equiv y_M(0) = 0, \\ \Lambda_2 & \equiv y'_M(0) = 0, \\ \Lambda_3 & \equiv y''_M(0) = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

اکنون چند جمله‌ای‌های لوکاس را به ازای  $a = b = 1$  در نظر می‌گیریم و انتگرال (۳۶) را با روش انتگرال گیری گاوس به ازای  $L = 10$  به دست می‌آوریم. در نهایت با در نظر گرفتن  $M = 4$  مساله کمینه (۳۶) با قیده‌های (۳۷) به یک مساله بهینه‌سازی مقید تبدیل می‌شود. با توجه به قضیه ضرائب لاگرانژ و اعمال شرط لازم بهینگی مساله ضرائب زیر حاصل می‌شود. همه محاسبات با بسته نرم افزاری Maple انجام شده است.

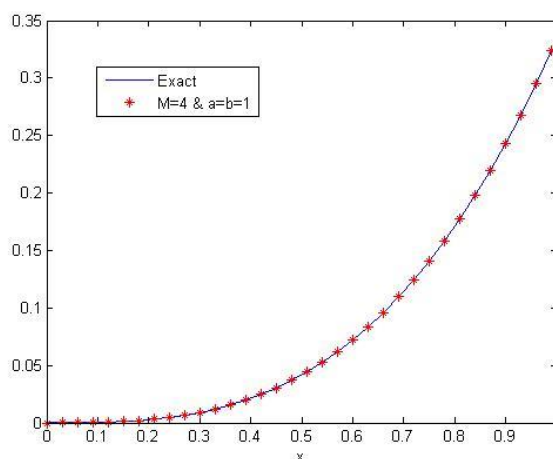
$$\begin{aligned} c_0 &= 4.918801 \times 10^{-18}, & c_1 &= -1.000000, \\ c_2 &= -6.545069 \times 10^{-18}, & c_3 &= 0.333333, \\ c_4 &= 1.636267 \times 10^{-18}, & \Lambda_1 &= -7.542383 \times 10^{-19}, \\ \Lambda_2 &= 1.744496 \times 10^{-18}, & \Lambda_3 &= -7.580112 \times 10^{-19}. \end{aligned}$$

در جدول ۲ خطای مطلق به ازای  $M = 4$  نمایش داده شده است و با خطای مطلق سایر روش‌ها در دیگر مقالات مقایسه شده است. همچنین واضح است که در این روش با انتخاب تعداد کمی چندجمله‌ای اصلاح شده لوکاس به عنوان پایه، تقریب مناسب و خوبی به دست می‌آید که به جواب دقیق معادله بسیار نزدیک است.

جدول ۲: خطای مطلق به ازای  $M = 4$  و مقایسه با سایر روش‌ها در مثال ۱

$x$	روش این مقاله	روش مقاله [17]	روش مقاله [20]
0.1	$5.18 \times 10^{-21}$	$3.291 \times 10^{-6}$	$4.79 \times 10^{-6}$
0.2	$9.70 \times 10^{-21}$	$6.614 \times 10^{-6}$	$8.11 \times 10^{-6}$
0.3	$4.52 \times 10^{-20}$	$9.672 \times 10^{-6}$	$1.189 \times 10^{-5}$
0.4	$1.01 \times 10^{-19}$	$1.241 \times 10^{-5}$	$1.835 \times 10^{-5}$
0.5	$1.86 \times 10^{-19}$	$1.481 \times 10^{-5}$	$2.357 \times 10^{-5}$
0.6	$2.89 \times 10^{-19}$	$1.688 \times 10^{-5}$	$2.608 \times 10^{-5}$
0.7	$4.10 \times 10^{-19}$	$1.865 \times 10^{-5}$	$2.442 \times 10^{-5}$
0.8	$4.50 \times 10^{-19}$	$2.014 \times 10^{-5}$	$2.689 \times 10^{-5}$
0.9	$6.30 \times 10^{-19}$	$2.136 \times 10^{-5}$	$3.577 \times 10^{-5}$

در شکل ۱ جواب دقیق و جواب تقریبی معادله به ازای  $M = 4$  رسم شده است.



شکل ۱: جواب دقیق و جواب تقریبی به ازای  $M = 4$  در مثال ۱

مثال ۲: معادله دیفرانسیل چند-مرتبه‌ای کسری زیر را با شرایط اولیه در نظر می‌گیریم.

$$a_1 {}_0^C D_x^2 y(x) + a_2 (x) {}_0^C D_x^{\beta_1} y(x) + a_3 (x) {}_0^C D_x^{\beta_2} y(x) + a_4 (x) {}_0^C D_x^{\beta_3} y(x) + a_5 (x) y(x) = f(x),$$

$$0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0,$$

که در آن

$$f(x) = -a_1 - \frac{a_2(x)x^{2-\beta_1}}{\Gamma(3-\beta_1)} - \frac{a_3(x)x^{2-\beta_2}}{\Gamma(3-\beta_2)} - \frac{a_4(x)x^{2-\beta_3}}{\Gamma(3-\beta_3)} + a_5(x) \left( 2 - \frac{x^2}{2} \right).$$

به سادگی می‌توان بررسی کرد که جواب دقیق این معادله  $y(x) = 2 - \frac{x^2}{2}$  فرض می‌کنیم

و  $\beta_1 = 1.234, \beta_2 = 1$  مقادیر  $a_1 = 1, a_2(x) = \sqrt{x}, a_3(x) = \sqrt[3]{x}, a_4(x) = \sqrt[4]{x}, a_5(x) = \sqrt[5]{x}$

$\beta_3 = 0.333$  را در نظر می‌گیریم.

با قرار دادن تقریب (35) در معادله به مساله بهینه سازی مقید زیر می‌رسیم.

$$\text{Min} \int_0^1 G^2 dx \quad (38)$$

که در آن

$$G = {}_0^C D_x^2 y_M(x) + \sqrt{x} {}_0^C D_x^{\beta_1} y_M(x) + \sqrt[3]{x} {}_0^C D_x^{\beta_2} y_M(x) + \sqrt[4]{x} {}_0^C D_x^{\beta_3} y_M(x) + \sqrt[5]{x} y_M(x) - f(x),$$

با قید های

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &::= y_M(0) - 2 = 0, \\ \Lambda_2 &::= y'_M(0) = 0. \end{aligned} \quad (39)$$

چند جمله‌ای‌های لوکاس را به ازای  $a = b = 1$  در نظر می‌گیریم و انتگرال (38) را با روش انتگرال‌گیری گاوس به ازای  $L = 10$  محاسبه می‌کنیم و نتایج زیر به ازای  $M = 3$  به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} c_0 &= 1.500000, & c_1 &= -3.864313 \times 10^{-19}, \\ c_2 &= -0.500000, & c_3 &= 1.288104 \times 10^{-19}, \\ \Lambda_1 &= 3.819954 \times 10^{-19}, & \Lambda_2 &= 5.584117 \times 10^{-19}. \end{aligned}$$

همچنین چند جمله‌ای‌های لوکاس را به ازای  $a = 3$  و  $b = -2$  در نظر می‌گیریم و انتگرال (38) را با روش انتگرال‌گیری گاوس به ازای  $L = 10$  محاسبه می‌کنیم و نتایج زیر به ازای  $M = 3$  به دست می‌آیند.

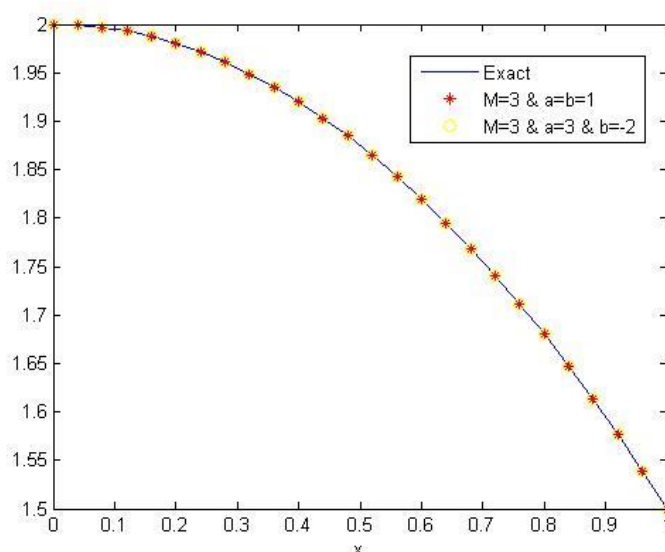
$$\begin{aligned} c_0 &= 0.888889, & c_1 &= -3.465092 \times 10^{-20}, \\ c_2 &= -0.055556, & c_3 &= -5.775154 \times 10^{-21}, \\ \Lambda_1 &= -3.345665 \times 10^{-19}, & \Lambda_2 &= -4.890734 \times 10^{-19}. \end{aligned}$$

در جدول ۳ خطای مطلق به ازای  $M = 3$  و دو حالت در نظر گرفته شده برای چند جمله‌ای‌های لوکاس نمایش داده شده است و با خطای مطلق روش ارائه شده در مقاله [۱۷] مقایسه شده است. همچنین واضح است که در این روش با انتخاب تعداد کمی جمله می‌توان تقریب مناسب و خوبی به دست آورد و به جواب دقیق معادله همگرا است.

جدول ۳: خطای مطلق به ازای  $M = 3$  و مقایسه با سایر روش‌ها در مثال ۲

$x$	روش این مقاله به ازای $a = b = 1$	روش این مقاله به ازای $b = -2$ و $a = 3$	روش مقاله [۱۷]
0.1	0	0	$8.13767 \times 10^{-6}$
0.2	0	0	$8.20893 \times 10^{-6}$
0.3	0	0	$8.20212 \times 10^{-6}$
0.4	0	0	$8.11286 \times 10^{-6}$
0.5	0	0	$7.94738 \times 10^{-6}$
0.6	$1 \times 10^{-19}$	0	$7.71643 \times 10^{-6}$
0.7	$1 \times 10^{-19}$	0	$7.43254 \times 10^{-6}$
0.8	0	$1 \times 10^{-19}$	$7.10847 \times 10^{-6}$
0.9	0	$1 \times 10^{-19}$	$6.75633 \times 10^{-6}$

در شکل ۲ جواب دقیق و جواب تقریبی معادله به ازای  $M = 3$  رسم شده است.



شکل ۲: جواب دقیق و جواب تقریبی به ازای  $M = 3$  در مثال ۲

مثال ۳: معادله دیفرانسیل چند-مرتبه‌ای کسری زیر را با شرایط اولیه در نظر می‌گیریم.

$${}_0^C D_x^2 y(x) + x^{3.5} {}_0^C D_x^{1.5} y(x) + (y(x))^2 = x^4 \left( \frac{4}{\sqrt{\pi}} + 1 \right) + 2,$$

$$0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

به سادگی می‌توان بررسی کرد که جواب دقیق این معادله  $y(x) = x^2$  می‌باشد. با قرار دادن تقریب (35) در معادله به مساله بهینه‌سازی مقید زیر می‌رسیم.

$$\text{Min} \int_0^1 \left( {}_0^C D_x^2 y(x) + x^{3.5} {}_0^C D_x^{1.5} y(x) + (y(x))^2 - x^4 \left( \frac{4}{\sqrt{\pi}} + 1 \right) - 2 \right)^2 dx. \quad (40)$$

با قید های

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &::= y_M(0) = 0, \\ \Lambda_2 &::= y'_M(0) = 0. \end{aligned} \quad (41)$$

در ادامه سه حالت را برای چند جمله‌ای‌های لوکاس در نظر می‌گیریم و با به کار بردن روش انتگرال‌گیری گاوس به ازای  $L = 10$  نتایج زیر برای  $M = 2$  حاصل می‌شود.

حالت اول: به ازای  $a = b = 1$

$$\begin{aligned} c_0 &= -1, & c_1 &= 0, & c_2 &= 1, \\ \Lambda_1 &= -8.120673 \times 10^{-19}, & \Lambda_2 &= -6.574732 \times 10^{-19}, \end{aligned}$$

حالت دوم: به ازای  $a = 3$  و  $b = -2$

$$\begin{aligned} c_0 &= 0.222222, & c_1 &= 0, & c_2 &= 0.111111, \\ \Lambda_1 &= 1.940284 \times 10^{-19}, & \Lambda_2 &= -1.032524 \times 10^{-20}, \end{aligned}$$



حالت سوم: به ازای  $a = 2$  و  $b = 1$

$$c_0 = -0.25, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 0.25,$$

$$\Lambda_1 = -1.461476 \times 10^{-19}, \quad \Lambda_2 = -2.493420 \times 10^{-20}.$$

جدول ۴ خطای مطلق به ازای  $M = 2$  و حالت های مختلف برای چندجمله ای های لوکاس نمایش داده شده است. این مثال در [۲۱] حل و بررسی شده است و با استفاده از ماتریس های عملیاتی چندجمله ای های لوکاس جواب دقیق  $y(x) = x^2$  حاصل شده است. همچنین روش هم مکانی با پایه چندجمله ای های ژاکوبی از مرتبه دلخواه و انتقال یافته برای حل این معادله در [۳۱] به کار رفته است و خطای مطلق گزارش شده با خطای مطلق این روش در جدول ۵ مقایسه شده است.

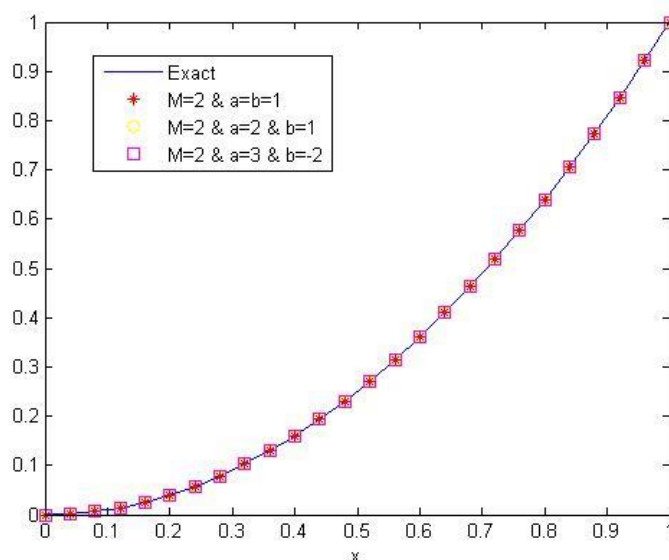
جدول ۴: خطای مطلق به ازای  $M = 2$  و حالت های مختلف چندجمله ای لوکاس در مثال ۲

$x$	روش این مقاله به ازای $a = b = 1$	روش این مقاله به ازای $b = -2$ و $a = 3$	روش این مقاله به ازای $b = 1$ و $a = 2$
0.1	0	0	0
0.2	0	0	0
0.3	0	0	0
0.4	0	0	0
0.5	0	0	0
0.6	0	0	0
0.7	0	0	0
0.8	0	$1 \times 10^{-20}$	0
0.9	0	$1 \times 10^{-20}$	0

جدول ۵: خطای مطلق به ازای  $M = 2$  در مثال ۳ و مقایسه با سایر روش ها

$x$	روش این مقاله به ازای $a = b = 1$	روش این مقاله به ازای $b = -2$ و $a = 3$	روش مقاله [۳۱]
0.0	0	0	$9.71 \times 10^{-17}$
0.2	0	0	$1.20 \times 10^{-17}$
0.4	0	0	$2.76 \times 10^{-17}$
0.6	0	0	$5.63 \times 10^{-17}$
0.8	0	$1 \times 10^{-20}$	$8.64 \times 10^{-17}$
1.0	0	$1 \times 10^{-20}$	$1.24 \times 10^{-16}$

در شکل ۳ جواب دقیق و جواب تقریبی معادله به ازای  $M = 2$  و حالت های مختلف چند جمله ای های لوکاس رسم شده است.



شکل ۳: جواب دقیق و جواب تقریبی به ازای  $M = 2$  در مثال ۳

مثال ۴: معادله دیفرانسیل کسری زیر را با شرط اولیه در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned} {}_0^C D_x^{0.5} y(x) + y(x) &= e^x (\operatorname{erf}(\sqrt{x}) + 1), \\ 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) &= 1. \end{aligned}$$

که در آن  $\operatorname{erf}(x)$  تابع خطا می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

به سادگی می‌توان بررسی کرد که  $y(x) = e^x$  جواب دقیق معادله است. با قرار دادن تقریب (۳۵) در معادله به مسأله بهینه‌سازی با قید  $\Lambda_1 \equiv y_M(0) = 1$  می‌رسیم.

$$\operatorname{Min} \int_0^1 \left( {}_0^C D_x^{0.5} y(x) + y(x) - e^x (\operatorname{erf}(\sqrt{x}) + 1) \right)^2 dx.$$

برای حل این مسأله چندجمله‌ای‌های لوکاس را با مقادیر  $a = b = 1$  در نظر می‌گیریم و روش ارائه شده را به ازای  $M = 2, 4, 6, 10$  به کار می‌بریم. نتایج حاصل در جدول ۶ نشان داده شده است و ملاحظه می‌شود با افزایش مقدار  $M$  خطای مطلق کاهش می‌یابد.

جدول ۶: خطای مطلق به ازای مقادیر مختلف  $M$  در مثال ۴

$x$	روش این مقاله به ازای $M = 2$	روش این مقاله به ازای $M = 4$	روش این مقاله به ازای $M = 6$	روش این مقاله به ازای $M = 10$
0.1	$8.3 \times 10^{-3}$	$3.5 \times 10^{-5}$	$1.4 \times 10^{-8}$	$4.0 \times 10^{-12}$
0.2	$1.1 \times 10^{-2}$	$5.2 \times 10^{-6}$	$3.5 \times 10^{-8}$	$4.7 \times 10^{-12}$
0.3	$1.0 \times 10^{-2}$	$2.2 \times 10^{-5}$	$1.3 \times 10^{-8}$	$2.1 \times 10^{-12}$
0.4	$6.1 \times 10^{-3}$	$2.1 \times 10^{-5}$	$4.2 \times 10^{-8}$	$1.7 \times 10^{-12}$
0.5	$5.8 \times 10^{-4}$	$2.4 \times 10^{-6}$	$1.4 \times 10^{-9}$	$4.4 \times 10^{-12}$
0.6	$4.8 \times 10^{-3}$	$2.5 \times 10^{-5}$	$3.8 \times 10^{-8}$	$1.7 \times 10^{-12}$
0.7	$8.3 \times 10^{-3}$	$2.5 \times 10^{-5}$	$8.0 \times 10^{-9}$	$2.3 \times 10^{-12}$
0.8	$8.0 \times 10^{-3}$	$2.6 \times 10^{-5}$	$4.2 \times 10^{-8}$	$4.3 \times 10^{-12}$
0.9	$1.9 \times 10^{-3}$	$3.9 \times 10^{-5}$	$1.0 \times 10^{-8}$	$4.2 \times 10^{-12}$

از طرف دیگر این معادله در مرجع [۲۱] با استفاده از ماتریس‌های عملیاتی حل و بررسی شده است. بیشترین مقدار خطای مطلق روش حاضر و روش ارائه شده در مقاله [۲۱] در جدول ۷ گزارش و مقایسه شده است.

جدول ۷: مقایسه بیشترین خطای مطلق این روش و روش مقاله [۲۱] در مثال ۴

$a$	$b$	روش این مقاله به ازای $M = 6$	روش مقاله [۲۱] به ازای $M = 6$	روش این مقاله به ازای $M = 10$	روش مقاله [۲۱] به ازای $M = 10$
1	1	$4.21 \times 10^{-8}$	$2.34 \times 10^{-4}$	$4.69 \times 10^{-12}$	$6.91 \times 10^{-10}$
2	1	$4.21 \times 10^{-8}$	$5.26 \times 10^{-4}$	$2.97 \times 10^{-14}$	$2.21 \times 10^{-9}$
2	-1	$4.21 \times 10^{-8}$	$4.33 \times 10^{-4}$	$2.82 \times 10^{-14}$	$1.15 \times 10^{-9}$
3	-2	$5.87 \times 10^{-5}$	$6.21 \times 10^{-4}$	$3.04 \times 10^{-14}$	$8.12 \times 10^{-9}$

مثال ۵: معادله دیفرانسیل کسری زیر را با شرط اولیه در نظر می‌گیریم.

$${}_0^C D_x^\alpha y(x) + {}_0^C D_x^{0.5} y(x) - 2y(x) = 0,$$

$$0 < x \leq 1, \quad y(0) = 1.$$

جواب دقیق معادله فوق به ازای  $\alpha = 1$  و شرط اولیه داده شده، به صورت زیر می‌باشد

$$y(x) = \frac{2}{3\sqrt{x}} E_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\sqrt{x}) - \frac{1}{6\sqrt{x}} E_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(-2\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{\pi x}},$$

که در آن  $E_{\lambda, \mu}$  تابع میتاک-لفلر با پارامترهای  $\lambda$  و  $\mu > 0$  می‌باشد.

$$E_{\lambda, \mu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\lambda k + \mu)}, \quad (\lambda > 0, \mu > 0).$$

واضح است که این معادله در بازه  $[0, 1]$  جواب غیر هموار دارد. برای حل این معادله چندجمله‌ای‌های لوکاس را با مقادیر  $a = b = 1$  در نظر می‌گیریم و روش ارائه شده را به ازای  $M = 2, 4, 7$  به کار می‌بریم. نتایج حاصل در جدول ۸ نشان داده شده است و ملاحظه می‌شود با افزایش مقدار  $M$  خطای مطلق کاهش می‌یابد.

جدول ۸: خطای مطلق به ازای مقادیر مختلف  $M$  در مثال ۵

$x$	روش این مقاله به ازای $M = 2$	روش این مقاله به ازای $M = 4$	روش این مقاله به ازای $M = 7$
0.1	$2.4 \times 10^{-2}$	$1.3 \times 10^{-3}$	$1.8 \times 10^{-4}$
0.2	$3.0 \times 10^{-2}$	$9.1 \times 10^{-4}$	$3.3 \times 10^{-4}$
0.3	$2.7 \times 10^{-2}$	$1.2 \times 10^{-3}$	$4.1 \times 10^{-4}$
0.4	$1.9 \times 10^{-2}$	$2.0 \times 10^{-4}$	$6.5 \times 10^{-5}$
0.5	$8.8 \times 10^{-3}$	$1.1 \times 10^{-3}$	$3.4 \times 10^{-5}$
0.6	$8.1 \times 10^{-3}$	$1.8 \times 10^{-3}$	$3.3 \times 10^{-4}$
0.7	$7.1 \times 10^{-3}$	$1.5 \times 10^{-3}$	$4.5 \times 10^{-4}$
0.8	$7.3 \times 10^{-3}$	$5.6 \times 10^{-4}$	$2.3 \times 10^{-4}$
0.9	$1.6 \times 10^{-3}$	$2.2 \times 10^{-4}$	$2.5 \times 10^{-4}$

این مثال در مقاله [۳۲] با روش شبه-طیفی تعمیم یافته حل و بررسی شده است. در جدول ۹ مقدار تقریبی بدست آمده به ازای مقادیر مختلف  $M$  برای جواب در نقطه  $x = 1$  با نتایج مقاله [۳۲] مقایسه شده است.

جدول ۹: مقایسه جواب دقیق و جواب تقریبی بدست آمده در این مقاله و مقاله [۳۲] در نقطه  $x = 1$  در مثال ۵

روش ارائه شده در مقاله [۳۲]		روش ارائه شده در این مقاله	
$n$	مقدار تقریبی در $x = 1$	$M$	مقدار تقریبی در $x = 1$
5	2.714336	2	3.401544
10	3.426525	4	3.423628
15	3.424960	7	3.424090
20	3.424807	10	3.424098
مقدار دقیق در $x = 1$	3.42445	مقدار دقیق در $x = 1$	3.42445

تذکر: با توجه به مثال‌های ارائه شده قابل مشاهده می‌باشد که با در نظر گرفتن تعداد کمی جمله از چندجمله‌ای‌های لوکاس تقریب مناسبی برای جواب حاصل می‌گردد. لذا می‌توان این روش را برای حل معادلات دیفرانسیل کسری و چند-مرتبه‌ای کسری در دو بعد و بالاتر تعمیم داد و به کار برد. همچنین این روش برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری می‌تواند مناسب باشد که در مطالعات آینده امکان بررسی آن‌ها وجود خواهد داشت.

## ۶. بحث و نتیجه گیری

در این مقاله، ما یک روش ساده و مؤثر را برای حل معادله دیفرانسیل کسری و چند-مرتبه‌ای کسری ارائه نموده‌ایم. با استفاده از چندجمله‌ای‌های لوکاس به عنوان پایه برای جواب تقریبی به صورت چندجمله‌ای، معادله دیفرانسیل را به یک مسأله کمترین مربعات تبدیل می‌کنیم. استفاده از فرمول انتگرال‌گیری گاوس-لژاندر برای محاسبه انتگرال و اعمال شرایط اولیه و مرزی داده شده برای معادله، مسأله را به یک مسأله بهینه‌سازی مقید تبدیل می‌کند. یکی از مزایای این روش همگرایی سریع به جواب دقیق می‌باشد که در مثال‌ها به خوبی نشان داده شده است. به سادگی مشاهده می‌شود که با انتخاب تعداد کمی چندجمله‌ای لوکاس به عنوان تقریب، جواب تقریبی مناسبی حاصل می‌شود. همچنین بیشترین زمان حل مثال‌های این مقاله مطابق با الگوریتم ارائه شده در جدول ۱۰ نشان داده شده است که مشخص است برای حل مثال‌ها زمان اندکی مورد نیاز است. لذا این روش را می‌توان برای حل سایر معادلات دیفرانسیل کسری به کار برد.

جدول ۱۰: بیشترین زمان اجرای مثال‌های مقاله

شماره مثال	بیشترین زمان اجرای مثال (ثانیه)
۱	۱۶,۷۰
۲	۱
۳	۱,۰۹
۴	۱,۳۷
۵	۱,۴۶

## References

1. Kulish V.V., Lage J.L., "Application of fractional calculus to fluid mechanics", J. Fluid. Eng., 124 (2002) 803-806.
2. Sayevand K., Rostami M.R., "Fractional optimal control problems: Optimality conditions and numerical solution", IMA J. Math. Control I., doi:10.1093/imamci/dnw041.
3. Calderon A.J., Vinagre B.M., Feliu V., "Fractional order control strategies for power electronic buck converters", Signal Process., 86 (2006) 2803–2819.
4. Machado J. T., "Fractional order description of DNA, Applied Mathematical Modelling", 39 (14) (2015) 4095–4102.

5. Inc M., Yusuf A., Aliyu A.I., Baleanu D., "Soliton structures to some time-fractional nonlinear differential equations with conformable derivative", *Opt. Quantum Electron.*, 50 (2018) Doi:10.1007/s11082-017-1287-x.
6. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J., "Theory and Applications of Fractional Differential Equations", in *North–Holland Mathematics Studies*, Vol. 204, Elsevier Science B.V., Amsterdam (2006).
7. Podlubny I., "Fractional Differential Equations", Academic Press, New York (1999).
8. Firoozjaee M.A., Yousefi S.A., Jafari H., Baleanu D., "On a numerical approach to solve multi order fractional differential equations with boundary initial conditions", *J. Comput. Nonlinear Dyn.*, (2015) Doi: 10.1115/1.4029785.
9. Hesameddini E., Rahimi A., Asadollahifard E., "On the convergence of a new reliable algorithm for solving multi-order fractional differential equations", *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 34 (2016) 154–164.
10. Dabiri A., Butcher E.A., "Stable fractional Chebyshev differentiation matrix for the numerical solution of multi-order fractional differential equations", *Nonlinear Dyn.*, 90(1) (2017) 185–201.
11. Han W., Chen Y., Liu D., Li X., Boutat D., "Numerical solution for a class of multi-order fractional differential equations with error correction and convergence analysis", *Adv. Differ. Equ.*, (2018) <https://doi.org/10.1186/s13662-018-1702-z>.
12. Aphithana A., Ntouyas S. K., Tariboon J., "Existence and uniqueness of symmetric solutions for fractional differential equations with multi-order fractional integral conditions", *Bound. Value Probl.*, (2015) Doi:10.1186/s13661-015-0329-1.
13. Bolandtalat A., Babolian E., Jafari H., "Numerical solutions of multi-order fractional differential equations by Boubaker polynomials", *Open Phys.*, 14 (2016) 226–230.
14. Rostamy D., Jafari H., Alipour M., Khalique C. M., "Computational Method Based on Bernstein Operational Matrices for Multi-Order Fractional Differential Equations", *Filomat*, 28(3) (2014) 591–601.

15. Saeedi H., "A fractional-order operational method for numerical treatment of multi-order fractional partial differential equation with variable coefficients", *SeMA J.*, 7 (2017) 1–13.
  16. Dabiri A., Butcher E.A., "Numerical solution of multi-order fractional differential equations with multiple delays via spectral collocation methods", *Appl. Math. Model.*, 56 (2018) 424–448.
  17. Maleknejad K., Nouri K., Torkzadeh L., "Study on multi-order fractional differential equations via operational matrix of hybrid basis functions", *Bull. Iranian Math. Soc.*, 43 (2) (2017) 307-318.
  18. Chen Y.M., Han X.N., Liu L.C., "Numerical solution for a class of linear system of fractional differential equations by the Haar wavelet method and the convergence analysis", *Comput. Model. Eng. Sci.*, 97(5) (2014) 391–405.
  19. Chen Y.M., Sun L., Liu L.L., Xie J.Q., "The Chebyshev wavelet method for solving fractional integral and differential equations of Bratu-type", *J. Comput. Inf. Syst.*, 9(14) (2013) 5601–5609.
  20. Li Y., Zhao W., "Haar wavelet operational matrix of fractional order integration and its applications in solving the fractional order differential equations", *Appl. Math. Comput.*, 216 (2010) 2276–2285.
  21. Abd-Elhameed W.M., Youssri Y.H., "Generalized Lucas polynomial sequence approach for fractional differential equations", *Nonlinear Dyn.*, 89(2) (2017) 1341–1355.  
<https://doi.org/10.1007/s11071-017-3519-9>.
۲۲. علی پور محسن، حسینی پاشا کلایی سیده ساجده، حل عددی معادله تلگراف دوبعدی با مشتقات کسری فضا-زمان با استفاده از ماتریس‌های عملیاتی لژاندر انتقال یافته، پژوهش‌های ریاضی، جلد ۴، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۳۹۷.
23. Lee G., Asci M., "Some Properties of the  $(p, q)$ -Fibonacci and  $(p, q)$ -Lucas Polynomials", *J. Appl. Math.*, (2012), Doi:10.1155/2012/264842.
  24. Golub G. H., Welsch J. H., "Calculation of gauss quadrature rules", *Math. Comput.*, 23 (106) (1969) 221–230.
  25. Davis P. J., Rabinowitz P., "Numerical Integration", Blaisdell, Waltham, Mass., 1967.

26. Mashayekhi S., Razzaghi M., Wattanataweekul M., "Analysis of multi-delay and piecewise constant delay systems by hybrid functions approximation", *Differ. Equ. Dyn. Syst.*, 24 (2016) 1–20.
27. Devore R.A., Scott L.R., "Error bounds for Gaussian quadrature and weighted-L1 polynomial approximation", *SIAM J. Numer. Anal.*, 21 (1984) 400–412.
28. Canuto C., Hussaini M.Y., Quarteroni A., Zang T. A., "Spectral Methods, Fundamentals in Single Domains", Springer, Berlin (2006).
29. Diethelm K., J. Ford N., "Multi-order fractional differential equations and their numerical solution", *Appl. Math. Comput.*, 154 (2004) 621–640.
30. Khader M. M., "Numerical treatment for solving fractional Riccati differential equation", *J. Egypt. Math. Soc.*, 21 (2013) 32–37.
31. Bhrawy A.H., Zaky M.A., "A Shifted Fractional-Order Jacobi Orthogonal Functions: An Application for System of Fractional Differential Equations", *Appl. Math. Model.*, (2015) Doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2015.06.012>.
32. Esmaili S., Shamsi M., "A pseudo-spectral scheme for the approximate solution of a family of fractional differential equations", *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 16 (2011) 3646–3654.