(نشریه علوم دانشگاه خوارزمی)

تابع یکنوای عملگری و تحدب نرم مشتق‌های آن

زهرا رحیمی چگنی[۱]، امیرقاسم غضنفری*[۲]، کمال فلاحی[۱]
۱. دانشگاه پیام نور، گروه ریاضی، تهران،
۲. دانشگاه لرستان، گروه ریاضی

دریافت ۹۸/۰۵/۲۰ پذیرش ۹۸/۱۱/۲۷

چکیده

فرض کنید f یک تابع یکنوای عملگری روی $(0,\infty)$ و A یک عملگرمثبت وارون‌پذیر روی فضای هیلبرت H باشد. نشان می‌دهیم اگر $|||.|||$ یک نرم یکانی پایا باشد، آن‌گاه برای هر عدد صحیح مثبت n،

$$|||D^n f(A)||| \leq \left\|f^{(n)}(A)\right\|$$

ثابت می‌کنیم تابع $\left\|f^{(n)}(.)\right\|$ روی مجموعهٔ همهٔ عملگرهای مثبت وارون‌پذیر در $B(H)$ شبه‌محدب است. و هم‌چنین نشان می‌دهیم

$$|||f(A)-f(B)||| \leq max\left\{\left\|f^{'}(A)\right\|,\left\|f^{'}(B)\right\|\right\}|||\,A-B|||\,,$$

که این یک تظریف از نتیجه معروف زیر است:

$$|||f(A)-f(B)||| \leq f^{'}(a)\;|||\,A-B|||,$$

که در آن a یک عدد حقیقی مثبت و $A,B \geq a1_H$

در این مقاله برخی تقریب‌ها از طرف راست نامساوی‌های نوع ارمیت–ادامارد که شامل توابع مشتق‌پذیرند و نرم نگاشت‌های القاءشده به‌وسیلهٔ مشتق آنها روی مجموعه تمام عملگرهای خودالحاق، محدب یا شبه محدب یا s–محدب هستند، به‌دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: نامساوی ارمیت - ادامارد، توابع مشتق پذیر، نرم یکانی پایا، تابع یکنوای عملگری.

معرفی و مقدمه

به‌ازای هر تابع محدب f روی $\mathbb{R}$ و $a,b \in \mathbb{R}$ که $a<b$ نامساوی (۱) همواره برقرار است:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \qquad (۱)$$

که این نامساوی به نامساوی ارمیت-ادامارد[۱] معروف است و عکس آن برای تابع مقعر f برقرار است.

قابل ذکراست که نامساوی ارمیت ادامارد ممکن است به‌عنوان یک تظریف[۲] از مفهوم تحدب در نظر گرفته شود که به‌راحتی از نامساوی ینسن[۳] نتیجه می‌شود. در سال‌های اخیر چندین گسترش و تعمیم برای تحدب کلاسیک مطرح شده‌اند (برای اطلاعات بیش‌تر به [۱]، [۲]، [۳] و مراجع ذکر شده در آنها مراجعه شود.)

اکنون با توجه به این‌که تعاریف تابع‌های شبه‌محدب و s–محدب تعمیمی از تعریف تابع محدب هستند، آنها را در ادامه بیان می‌کنیم.

*نویسنده مسئول ghazanfari.a@lu.ac.ir

1. Hermite-Hadamard
2. refinement
3. Jensen

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.15.1]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.43]

تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ روی $[a,b]$شبه‌محدب گفته می‌شود، هرگاه به‌ازای هر x و y عضو $[a,b]$ و $0\le\lambda\le1$ داشته باشیم:

$$f\big((1-\lambda)x+\lambda y\big)\le max\{f(x),f(y)\}.$$

و برای یک ثابت $s\in(0,1]$ تابع f از $(0,\infty)$ به $\mathbb{R}$ ، $s-$محدب به مفهوم دوم در [۴]، گفته می‌شود، هرگاه برای هر x و y عضو $(0,\infty)$ و $0\le\lambda\le1$ داشته باشیم :

$$f\big((1-\lambda)x+\lambda y\big)\le(1-\lambda)^s f(x)+\lambda^s f(y).$$

قبل از بیان نتایج، بربیان ترتیب عملگری در $B(H)$ و تعاریف تابع‌های یکنوای عملگری و محدب عملگری مروری داریم.

به‌ازای عملگرهای خودالحاق A و B در $B(H)$ می‌نویسیم$A\le B$، (یا $B\ge A$)، هرگاه برای هر بردار$h\in H$ داشته باشیم :

$$\langle Ah,h\rangle\le\langle Bh,h\rangle,$$

که این نامساوی را ترتیب عملگری می‌نامیم.

فرض کنید I یک بازه در $\mathbb{R}$ باشد و

$$\sigma(I)=\Big\{A\in B(H):\ \text{خودالحاق}A\text{و}\ \ sp(A)\subseteq I\Big\}.$$

تابع پیوستهٔ حقیقی مقدار f روی بازهٔ I محدب عملگری[1](مقعر عملگری[2]) گفته می‌شود، هرگاه در ترتیب عملگری$B(H)$، به‌ازای هر$\lambda\in[0,1]$ و هر عملگر خودالحاق کراندار A و B در $\sigma(I)$ داشته باشیم:

$$f\big((1-\lambda)A+\lambda B\big)\le(\ge)(1-\lambda)f(A)+\lambda f(B).$$

تابع پیوستهٔ حقیقی مقدار f روی یک بازهٔ Iیکنوای عملگری[3] نامیده می‌شود، هرگاه نسبت به‌ترتیب عملگری یکنوا باشد؛ به‌عبارت دیگر برای عملگرهایA وB عضو$\sigma(I)$ داشته باشیم:

$$A\le B\Longrightarrow f(A)\le f(B)\,.$$

برای مشاهده و بررسی بعضی نتایج اساسی در مورد توابع محدب (مقعر) و یکنوای عملگری به [۵]، [۶] مراجعه شود.

فرض کنیدf یک تابع حقیقی روی $(0,\infty)$ و$f^{(n)}$ مشتق n–ام آن باشد. هم‌چنین فرض کنید f نگاشت القا شده به‌وسیلهٔ f روی عملگرهای مثبت باشد و $D^nf(A)$ مشتق فرشهٔ مرتبه n–ام این نگاشت در نقطهٔ A باشد.

برای هرA، مشتق $D^nf(A)$ یک عملگر n–خطی روی فضای همه عملگرهای خودالحاق است که نرم برای این عملگرها بدین‌صورت تعریف شده است:

$$\|D^nf(A)\|=sup\{\|D^nf(A)(B_1,\dots,B_n)\|:\ \|B_1\|=\dots=\|B_n\|=1\}.$$

نرم $|||.|||$ روی $B(H)$ نرم یکانی پایا نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $A\in B(H)$ وهرعملگر یکانی U وV عضو $B(H)$، داشته باشیم $|||UAV|||=|||A|||$.

در صورتی که $|||.|||$یک نرم یکانی پایا روی فضای عملگرهای خودالحاق باشد، دراین‌صورت طبق این نرم، نرم مربوط به عملگر n–خطی $D^nf(A)$ بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$|||D^nf(A)|||=sup\{|||D^nf(A)(B_1,\dots,B_n)|||:|||B_1|||=1,\dots,|||B_n|||=1\}.$$

1. Operator Convex
2. Operator Concave
3. Operator Monotone

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.15.1]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.43]

چون $f^{(n)}(A)=D^nf(A)(1_H,\dots,1_H)$ دراین صورت داریم:

$$\|f^{(n)}(A)\|=\|D^nf(A)(1_H,\dots,1_H)\|\leq\|D^nf(A)\|.$$

حال اگر تعریف کنیم:

$$D^{(n)}=\left\{f:\ \|D^nf(A)\|=\|f^{(n)}(A)\|\qquad \text{برای هر عملگر مثبت } A\right\}.$$

با توجه به [۷] هر تابع یکنوای عملگری به‌ازای $n=1,2,\dots$ در $D^{(n)}$ است. هم‌چنین در [۸] نشان داده شده است که به‌ازای $n=2,3,\dots$ تابع $f(t)=t^n$ و تابع با ضابطهٔ $f(t)=\exp(t)$ در $D^{(1)}$ هستندکه هیچ‌کدام از آنها یکنوای عملگری نیستند.

به‌علاوه در [۹] نشان داده شده است که تابع توانی $f(t)=t^p$ به‌ازای تمامی $p\in(-\infty,1]\cup[2,\infty)$ به‌جز $p\in(1,\sqrt{2})$ در $D^{(1)}$ است.

در این مقاله نگاشت‌های مشتق‌پذیری که نرم نگاشت‌های القاء شده به‌وسیلهٔ مشتق آنها روی مجموعه عملگرهای خودالحاق، محدب یا شبه‌محدب یا s−محدب است را در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که هرگاه f یک تابع یکنوای عملگری روی $(0,\infty)$، A یک عملگر مثبت وارون پذیر و$|||.|||$ یک *نرم یکانی پایا باشد، آن‌گاه برای هر عدد صحیح مثبت* n *داریم:*

$$|||D^nf(A)|||\leq\|f^{(n)}(A)\|.$$

هم‌چنین ثابت می‌کنیم $\|f^{(n)}(.)\|$ (نرم نگاشت القاء شده به‌وسیلهٔ مشتق مرتبهٔ n-ام تابع یکنوای عملگری f روی $(0,\infty)$ برای عدد صحیح مثبت n) یک تابع شبه‌محدب است. در ادامه مثال‌ها و کاربردها برای حالت‌های خاص نیز برای علاقه‌مندان آن آورده شده است. در پایان یک تخمین خطا برای فرمول سیمپسون ارائه می‌دهیم.

نتایج اصلی

۱. تابع‌های شبه‌محدب و یکنوای عملگری :

در بعضی مسائل در نظریه‌های تقریب[۱] و اختلال[۲] وقتی با نرم توابع سرو کار داریم، برخورداربودن خود توابع از ویژگی‌هایی مانند محدب بودن، یکنوایی، شبه‌محدب و s−محدب ضروری نیست و فقط داشتن این خواص برای نرم آن توابع کافی است.

فرض کنید f یک تابع حقیقی روی بازهٔ I در $\mathbb{R}$ باشد. در ادامه این مقاله تابع $\|f(.)\|$، نرم نگاشت القاء شده به‌وسیلهٔ f روی مجموعهٔ همهٔ عملگرهای خودالحاق بدین‌صورت است:

$$\|f(.)\|:\sigma(I)\to[0,\infty),$$
$$A\to\|f(A)\|.$$

مثال ۱. الف) فرض کنید f یک تابع حقیقی مثبت روی $I\subseteq\mathbb{R}$ باشد. دراین صورت اگر fمحدب عملگری باشد، آن‌گاه $\|f(.)\|$ روی $\sigma(I)$ محدب است، چون

$$0\leq f\big((1-t)A+tB\big)\leq(1-t)f(A)+tf(B),$$

و بنابراین

1. Approximation theory
2. Perturbation theory

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.15.1]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.43]

$$\|f((1-t)A+tB)\| \leq (1-t)\|f(A)\|+t\|f(B)\|.$$

در نتیجه اگر r یک عدد حقیقی در $[-1,0] \cup [1,2]$ باشد، چون تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^r$ یک تابع محدب عملگری روی $(0,\infty)$ است، آن‌گاه به‌ازای هر $I \subseteq (0,\infty)$، تابع $\|f(.)\|$ روی $\sigma(I)$ محدب است.

و از آن‌جاکه اگر r یک عدد حقیقی با شرط $r \geq 2$ باشد، دراین‌صورت تابع حقیقی با ضابطهٔ $f(x)=x^r$ روی $(0,\infty)$ محدب است و

$$\begin{aligned}\left\|\left((1-t)A+tB\right)^r\right\| &= \|(1-t)A+tB\|^r\\ &\leq \left((1-t)\|A\|+t\|B\|\right)^r\\ &\leq (1-t)\|A\|^r+t\|B\|^r.\end{aligned}$$

پس اگر r یک عدد حقیقی در بازهٔ $[-1,0] \cup [1,\infty)$ باشد، آن‌گاه به‌ازای هر بازهٔ $I \subseteq (0,\infty)$، تابع $\|f(.)\|$ روی $\sigma(I)$ محدب است.

ب) فرض کنید f یک تابع حقیقی مثبت روی $I \subseteq (0,\infty)$ باشد. اگر f یکنوای عملگری باشد، آن‌گاه $\|f(.)\|$ روی $\sigma(I)$ شبه محدب است .چون:

$$\begin{aligned}\left\|f\left((1-t)A+tB\right)\right\| &= f(\|(1-t)A+tB\|)\\ &\leq f\left((1-t)\|A\|+t\|B\|\right)\\ &\leq f(max\{\|A\|,\|B\|\})\\ &= max\{f(\|A\|),f(\|B\|)\}\\ &= max\{\|f(A)\|,\|f(B)\|\}.\end{aligned}$$

فرض کنید $0 \leq r \leq 1$ و $f(x)=x^r$ که در آن $0<x<\infty$. نامساوی زیر نیز نتیجه می‌دهدکه $\|f(.)\|$ روی $\sigma(I)$ برای هر بازهٔ $I \subseteq (0,\infty)$، شبه‌محدب است.

$$\left\|\left((1-t)A+tB\right)^r\right\| = \|(1-t)A+tB\|^r \leq (max\{\|A\|,\|B\|\})^r = max\{\|A\|^r,\|B\|^r\}.$$

ج) برای $f(x)=-x^2+1$ روی $\mathbb{R}$، تابع $\|f(.)\|$ شبه‌محدب نیست، زیرا:

$$1=\|f(0)\|=\left\|f(\frac{-1_H+1_H}{2})\right\| \nleq max\{\|f(-1_H)\|,\|f(1_H)\|\}=0.$$

که چون هر تابع محدب، شبه‌محدب نیز است می‌توان نتیجه گرفت که این تابع محدب هم نیست.

قضیهٔ ۱. فرض کنید f یک تابع یکنوای عملگری روی $(0,\infty)$ و n یک عدد صحیح مثبت باشد، در این‌صورت $\left\|f^{(n)}(.)\right\|$ شبه‌محدب است؛ یعنی به‌ازای تمامی عملگرهای مثبت و معکوس‌پذیر A و B و $0 \leq v \leq 1$ داریم:

$$\left\|f^{(n)}\left((1-v)A+vB\right)\right\| \leq max\left\{\left\|f^{(n)}(A)\right\|,\left\|f^{(n)}(B)\right\|\right\}. \tag{۲}$$

اثبات. می‌دانیم که هرتابع یکنوای عملگری f روی $(0,\infty)$ یک نمایش انتگرالی به‌صورت (۳) دارد:

$$f(t)=\alpha+\beta t+\int_0^\infty\left(\frac{\lambda}{\lambda^2+1}-\frac{1}{\lambda+t}\right)d\mu(\lambda), \tag{۳}$$

که در آن α و β اعداد حقیقی، $\beta \geq 0$ و μ یک اندازه مثبت روی $(0,\infty)$ است $[5,(V.49)]$، که:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\lambda^2+1}d\mu(\lambda)<\infty\,.$$

نمایش انتگرالی (۳) نتیجه می‌دهد که هر تابع یکنوای عملگری روی $(0,\infty)$ بی‌نهایت مشتق‌پذیر است، بنابراین

$$f(A)=\alpha 1_H+\beta A+\int_0^\infty\left[\frac{\lambda}{\lambda^2+1}1_H-(\lambda+A)^{-1}\right]d\mu(\lambda). \tag{۴}$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.15.1]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.43]

به‌علاوه از نمایش انتگرالی رابطهٔ (۵) به‌دست می‌آید:

$$f'(t) = \beta + \int_0^\infty \frac{1}{(\lambda+t)^2} d\mu(\lambda). \tag{۵}$$

در نتیجه:

$$\left\|f'(\mathrm{A})\right\| = \left\|\beta 1_H + \int_0^\infty (\lambda + A)^{-2}\, d\mu(\lambda)\right\|.$$

حال فرض کنید $a_0 = inf\{\langle Ax,x\rangle : \|x\| = 1\}$ و $b_0 = inf\{\langle Bx,x\rangle : \|x\| = 1\}$. *دراین‌صورت* چون $\beta \geq 0$ داریم :

$$\left\|f'(A)\right\| = \beta + \int_0^\infty (\lambda + a_0)^{-2}\, d\mu(\lambda) = \beta + \int_0^\infty \|(\lambda + A)^{-1}\|^2\, d\mu(\lambda),$$

و به‌طور مشابه،

$$\left\|f'(B)\right\| = \beta + \int_0^\infty (\lambda + b_0)^{-2}\, d\mu(\lambda) = \beta + \int_0^\infty \|(\lambda + B)^{-1}\|^2 d\mu(\lambda).$$

فرض کنید $a_0 \leq b_0$.دراین‌صورت،

$$a_0 \leq (1-\upsilon)a_0 + \upsilon b_0 \leq \inf\{\langle[(1-\upsilon)A + \upsilon B]x, x\rangle : \|x\| = 1\},$$

که این نتیجه می‌دهد:

$$\left\|f'(A)\right\| \geq \left\|f'\big((1-\upsilon)A + \upsilon B\big)\right\|,$$

و نامساوی (۲) برای $n = 1$ ثابت می‌شود.

به‌طور مشابه برای $n \geq 2$ داریم:

$$\|f^{(n)}(A)\| = \left\|(-1)^{n+1} n! \int_0^\infty (\lambda + A)^{-n-1}\, d\mu(\lambda)\right\|$$
$$= n! \int_0^\infty \|(\lambda + A)^{-1}\|^{n+1}\, d\mu(\lambda).$$

به‌کمک روند مشابه می‌توان نشان داد که در این حالت دوباره نامساوی (۲) برقرار است و این اثبات را کامل می کند.

قضیهٔ ۲. فرض کنید f یک تابع یکنوای عملگری روی $(0,\infty)$ و $|||.|||$ یک نرم یکانی پایا است. اگر A یک عملگر مثبت وارون‌پذیرباشد، آن‌گاه برای هر عدد صحیح مثبت n این رابطه برقرار است:

$$|||D^n f(A)||| \leq \left\|f^{(n)}(A)\right\|,$$

و در نتیجه $f \in D^{(n)}$.

اثبات. از رابطهٔ (۴) داریم:

$$Df(A)(B) = \beta B + \int_0^\infty (\lambda + A)^{-1} B (\lambda + A)^{-1} d\mu(\lambda)\,.$$

چون طبق [(*IV* ،۴۰)، ۵] داریم:

$$|||(\lambda + A)^{-1} B (\lambda + A)^{-1}\ ||| \leq \|(\lambda + A)^{-1}\|\ |||B|||\ \ \|(\lambda + A)^{-1}\|,$$

بنابراین:

$$|||\ Df(A)(B)||| \leq \beta + \int_0^\infty \|(\lambda + A)^{-1}\|^2\, d\mu(\lambda) = \left\|f'(A)\right\|.$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.15.1]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.43]

هم‌چنین به‌ازای هر $n \geq 2$ داریم:

$$D^n f(A)(B_1, B_2, \dots, B_n) =$$
$$(-1)^{n+1} \int_0^\infty \left[\sum_\sigma \left((\lambda + A)^{-1} B_{\sigma(1)} (\lambda + A)^{-1} \dots (\lambda + A)^{-1} B_{\sigma(n)} (A + \lambda)^{-1} \right) \right] d\mu(\lambda).$$

با استفاده از (IV ،۴۰) در [۵] به‌دست می‌آوریم:

$$|||D^n f(A)||| \leq \; n! \int_0^\infty \|(\lambda + A)^{-1}\|^{n+1} \, d\mu(\lambda) = \left\| f^{(n)}(A) \right\|.$$

و این اثبات را کامل می کند.

۲. نامساوی‌های از نوع ارمیت-ادامارد:

تعمیم ها و تظریف‌های زیادی از نامساوی ارمیت- ادامارد (۱) به‌دست آمده است، که از میان آنها می‌توان به تعمیم این نامساوی برای توابع مشتق‌پذیری که قدرمطلق مشتق آنها توابعی محدب هستند، اشاره کرد.

دراگومیر و آگروال [۱۰]، نشان می‌دهند برای $a, b \in \mathbb{R}$ اگر $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ یک تابع مشتق‌پذیر روی (a,b) باشد و اگر $\left|f'\right|$ بر $[a,b]$ محدب باشد، آن‌گاه

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \frac{(b-a)\left(\left|f'(a)\right| + \left|f'(b)\right| \right)}{8}.$$

که برای اثبات این نامساوی از این رابطه استفاده کرده‌اند:

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx = \frac{b-a}{2} \int_0^1 (1-2t) \, f'(ta + (1-t)b) dt.$$

هم‌چنین این بخش را با بیان لم کاربردی ۱ ادامه می‌دهیم تا بتوانیم نتایج به‌دست آمده به وسیلهٔ آنها را به عملگرهای خودالحاق روی یک فضای هیلبرت تعمیم دهیم.

لم ۱. [**۱۱ لم ۱**]، فرض کنید $I \subseteq \mathbb{R}$ یک بازهٔ باز و f از I به $\mathbb{R}$ یک تابع مشتق‌پذیر از مرتبهٔ دوم روی I است، به‌طوری‌که f'' روی I پیوسته باشد. هرگاه A و B عملگرهای خودالحاق در $\sigma(I)$ باشند و $\upsilon \in [0,1]$، آن‌گاه:

$$\int_0^1 (t - \upsilon) Df\big((1-t)A + tB\big)(B - A) dt =$$
$$\upsilon f(A) + (1-\upsilon) f(B) - \int_0^1 f\big((1-t)A + tB\big) \, dt. \tag{۶}$$

گزاره ۱. فرض کنید f یک تابع حقیقی روی فاصلهٔ باز $I \subseteq (0, \infty)$ باشد، هم‌چنین فرض کنید $f \in c^2(I) \cap D^{(1)}$ و $\left\|f'(.)\right\|$ روی $\sigma(I)$ محدب باشد، دراین‌صورت به‌ازای هر A و B در $\sigma(I)$ داریم:

$$\left\| \upsilon f(A) + (1-\upsilon) f(B) - \int_0^1 f\big((1-t)A + tB\big) \, dt \right\|$$
$$\leq \frac{1}{6} \left[2(1-\upsilon)^3 - 3(1-\upsilon) + 2 \right] \left\| f'(A) \right\| \, \|A - B\|$$
$$+ \tfrac{1}{6} (2\upsilon^3 - 3\upsilon + 2) \left\| f'(B) \right\| \, \|A - B\|, \tag{۷}$$

اثبات. با استفاده از لم ۱، و چون $\left\|f'(.)\right\|$ محدب است داریم:

$$\left\| \upsilon f(A) + (1-\upsilon) f(B) - \int_0^1 f\big((1-t)A + tB\big) \, dt \right\|$$

$$= \left\| \int_0^1 (t-\upsilon) Df\big((1-t)A+tB\big)(A-B)\,dt \right\|$$
$$\leq \|A-B\| \int_0^1 |t-\upsilon| \big\|Df\big((1-t)A+tB\big)\big\|\,dt$$
$$= \|A-B\| \int_0^1 |t-\upsilon| \left\|f'\big((1-t)A+tB\big)\right\|\,dt$$
$$\leq \|A-B\| \int_0^1 |t-\upsilon| \left((1-t)\left\|f'(A)\right\| + t\left\|f'(B)\right\|\right)dt\,,$$

حال به‌کمک این تساوی می‌توان نامساوی رابطۀ (۷) را نتیجه گرفت

$$\int_0^1 |\mathrm{t}-\upsilon|\,tdt = \frac{1}{6}(2\upsilon^3-3\upsilon+2).$$

با بحثی مشابه در اثبات گزارۀ ۱، یک نامساوی جدید از نامساوی ارمیت –ادامارد به‌دست می‌آوریم که آن را در نتیجۀ ۱ بیان می‌کنیم:

نتیجۀ ۱. فرض کنید f یک تابع حقیقی روی یک بازۀ باز $I \subseteq (0,\infty)$ باشد ، $f \in C^2(I) \cap D^{(1)}$ و هم‌چنین فرض کنید:

$$X = \upsilon f(A) + (1-\upsilon) f(B) - \int_0^1 f\big((1-t)A+tB\big)\,dt$$

الف) اگر $\left\|f'(.)\right\|$ روی $\sigma(I)$ شبه‌محدب باشد، آن‌گاه به‌ازای هر A و B عضو $\sigma(I)$:

$$\|X\| \leq \left(\upsilon^2-\upsilon+\tfrac{1}{2}\right)\|A-B\| max\left\{\left\|f'(A)\right\|, \left\|f'(B)\right\|\right\}. \tag{۸}$$

ب) اگر $\left\|f'(.)\right\|$ روی $\sigma(I)$ ، s–محدب باشد، آن‌گاه به‌ازای هر A و B عضو $\sigma(I)$:

$$\|X\| \leq \left(\frac{1}{s+2} - \frac{1-\upsilon}{s+1} + \frac{2(1-\upsilon)^{s+2}}{(s+1)(s+2)}\right)\left\|f'(A)\right\| \|A-B\|$$
$$+ \left(\tfrac{1}{s+2} - \tfrac{\upsilon}{s+1} + \tfrac{2\upsilon^{s+2}}{(s+1)(s+2)}\right)\left\|f'(B)\right\| \|A-B\|. \tag{۹}$$

ج) فرض کنید f یک تابع یکنوای عملگری روی $(0,\infty)$ باشد. دراین صورت به‌ازای هر نرم یکانی پایای $|||\cdot|||$ و هر A و B عضو $\sigma(I)$:

$$|||X||| \leq \left(\upsilon^2-\upsilon+\tfrac{1}{2}\right)|||A-B||| max\left\{\left\|f'(A)\right\|, \left\|f'(B)\right\|\right\}. \tag{۱۰}$$

۳. کاربردها

به‌عنوان یک کاربرد مهم از نتایج این مقاله، کران‌هایی برای $\|f(A)-f(B)\|$ باتوجه به $\|A-B\|$ می‌یابیم که یکی از مسائل اصلی در قضیۀ اختلال است.

نامساوی‌های زیر، نامساوی‌های مرتبط با (X، ۴۶)-[X، ۴۳) در [۵] است که برای توابع یکنوای عملگری برقرارهستند.

نتیجۀ ۲. الف) فرض کنید f یک تابع حقیقی روی بازۀ باز $I \subseteq (0,\infty)$ باشد و $f \in C^2(I) \cap D^{(1)}$ در این‌صورت به‌ازای هر $A,B \in \sigma(I)$

اگر $\left\|f'(.)\right\|$ روی $\sigma(I)$ محدب باشد، آن‌گاه:

$$\|f(A)-f(B)\| \leq \tfrac{1}{2}\left(\left\|f'(A)\right\| + \left\|f'(B)\right\|\right)\|A-B\|, \tag{۱۱}$$

اگر $\left\|f'(.)\right\|$ روی $\sigma(I)$ شبه‌محدب باشد، آن‌گاه:

$$\|f(A)-f(B)\| \leq max\left\{\left\|f'(A)\right\|,\left\|f'(B)\right\|\right\}\|A-B\|, \qquad (۱۲)$$

اگر $\left\|f'(.)\right\|$ روی $\sigma(I)$، $s-$محدب باشد، آن‌گاه:

$$\|f(A)-f(B)\| \leq \frac{1}{s+1}\left(\left\|f'(A)\right\|+\left\|f'(B)\right\|\right)\|A-B\|, \qquad (۱۳)$$

ب) فرض کنید f یک تابع یکنوای عملگری روی $(0,\infty)$ باشد. در این‌صورت برای هر نرم یکانی پایای $|||.|||$ و هر A و B عضو $\sigma(I)$:

$$|||f(A)-f(B)||| \leq \ max\left\{\left\|f'(A)\right\|,\left\|f'(B)\right\|\right\}|||A-B|||. \qquad (۱۴)$$

اثبات: الف) فرض کنید $\left\|f'(.)\right\|$ روی $\sigma(I)$ محدب باشد، با استفاده از (۷) برای $\upsilon=1$ و $\upsilon=0$، این نامساوی‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\left\|f(A)-\int_0^1 f\big((1-t)A+tB\big)\,dt\right\| \leq \left(\frac{1}{3}\left\|f'(A)\right\|+\frac{1}{6}\left\|f'(B)\right\|\right)\|A-B\|$$

و

$$\left\|f(B)-\int_0^1 f\big((1-t)A+tB\big)\,dt\right\| \leq \left(\frac{1}{6}\left\|f'(A)\right\|+\frac{1}{3}\left\|f'(B)\right\|\right)\|A-B\|.$$

حال در صورتی‌که $\left\|f'(.)\right\|$روی $\sigma(I)$ $s-$ شبه‌محدب یا محدب باشد، آن‌گاه از نامساوی (۸) یا (۹) برای $\upsilon=1$ و $\upsilon=0$، نامساوی‌های مطلوب در قسمت (الف) را به‌دست می‌آوریم.

ب) به‌کمک رابطهٔ (۱۰) برای $\upsilon=1$ و $\upsilon=0$، نامساوی‌های زیر را به‌دست می‌آوریم، که به نوع خود جالب هستند.

$$|||f(A)-\int_0^1 f\big((1-t)A+tB\big)\,dt||| \leq \frac{1}{2}|||A-B|||max\left\{\left\|f'(A)\right\|,\left\|f'(B)\right\|\right\},$$

$$|||f(B)-\int_0^1 f\big((1-t)A+tB\big)\,dt||| \leq \frac{1}{2}|||A-B|||max\left\{\left\|f'(A)\right\|,\left\|f'(B)\right\|\right\}.$$

بنابراین نامساوی مطلوب (۱۴) را به‌دست می‌آوریم و اثبات کامل می‌شود.

به‌کمک نتیجهٔ ۲، مثال ۲ را بیان می‌کنیم:

مثال۲. الف) برای $f(t)=t^{r+1}$که $0<r<1$ داریم:

$$\|A^{r+1}-B^{r+1}\| \leq \frac{(r+1)}{2}(\|A\|^r+\|B\|^r)\|B-A\|.$$

ب) برای $f(t)=t^r$که $0<r<1$ داریم:

$$|||A^r-B^r||| \leq \ r(max\{\|A^{-1}\|,\|B^{-1}\|\})^{1-r}|||A-B|||.$$

ج) برای $f(t)=\log t$ روی $(0,\infty)$،

$$|||\log(A)-\log(B)||| \leq (max\{\|A^{-1}\|,\|B^{-1}\|\})|||A-B|||.$$

تذکر۲ . فرض کنید که f یک تابع یکنوای عملگری روی $(0,,\infty)$ باشد و فرض کنیدA وB دو عملگر مثبت باشند به‌طوری‌که برای عدد مثبت a، $A \geq a1_H$ و $B \geq a1_H$.

به‌وسیلهٔ قضیهٔ [X، ۳.۸ از ۵]، برای هر نرم یکانی پایا نامساوی (۱۵) برقرار است:

$$|||f(A)-f(B)||| \leq f'(a)|||A-B|||. \qquad (۱۵)$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.15.1]

[DOI: 10.52547/mmr.7.1.43]

هم‌چنین از تساوی (۵)، داریم:

$$f'(A) = \beta 1_H + \int_0^\infty (\lambda + A)^{-2}\, d\mu(\lambda) \leq \beta 1_H + \left[\int_0^\infty (\lambda + a)^{-2}\, d\mu(\lambda)\right] I = f'(a) I$$

که این نتیجه می‌دهد:

$$max\left\{\left\|f'(A)\right\|, \left\|f'(B)\right\|\right\} \leq f'(a).$$

بنابراین نامساوی (۱۴) یک تظریف (۱۵) است. این تظریف می‌تواند اکید باشد، چون برای تابع $f(t) = t^r$ که $0 < r < 1$ و $A = B = b1_H$ با شرط $b > a$، داریم:

$$max\left\{\left\|f'(A)\right\|, \left\|f'(B)\right\|\right\} = r\, max\{\|A^{r-1}\|, \|B^{r-1}\|\} = rb^{r-1} < ra^{r-1} = f'(a).$$

در قضیهٔ ۳، فرمول سیمپسون برای توابع یکنوای عملگری را به‌دست می‌آوریم.

قضیهٔ ۳. فرض کنید f یک تابع یکنوای عملگری روی $(0, \infty)$ باشد. دراین‌صورت برای هر نرم یکانی پایای $|||.|||$ و هر $A, B \in \sigma(I)$ داریم:

$$|||\frac{f(A) + 4f\left(\frac{A+B}{2}\right) + f(B)}{6} - \int_0^1 f\big((1-t)A + tB\big)\, dt||| \leq$$
$$\frac{5}{72}|||A - B|||\left[max\left\{\left\|f'(A)\right\|, \left\|f'(\frac{A+B}{2})\right\|\right\} + max\left\{\left\|f'(\frac{A+B}{2})\right\|, \left\|f'(B)\right\|\right\}\right].$$

اثبات. چون

$$\int_0^1 f\big((1-t)A + tB\big)\, dt = \frac{1}{2}\int_0^1 f\left((1-t)A + t\frac{A+B}{2}\right) dt +$$
$$\frac{1}{2}\int_0^1 f\left((1-t)\frac{A+B}{2} + tB\right) dt,$$

بنابراین داریم:

$$|||\ \frac{f(A) + 4f\left(\frac{A+B}{2}\right) + f(B)}{6} - \int_0^1 f\big((1-t)A + tB\big)\, dt||| \leq$$
$$\frac{1}{2}|||\frac{f(A) + 2f\left(\frac{A+B}{2}\right)}{3} - \int_0^1 f\left((1-t)A \quad + t\frac{A+B}{2}\right) dt\ |||$$
$$+|||\ \frac{2f\left(\frac{A+B}{2}\right) + f(B)}{3} - \int_0^1 f\left((1-t)\frac{A+B}{2} + tB\right) dt|||\frac{1}{2}.$$

به‌کمک نامساوی (۱۴) به‌ازای $\upsilon = \frac{1}{3}$ و برای $\upsilon = \frac{2}{3}$ به‌دست می‌آوریم که:

$$|||\frac{f(A) + 4f\left(\frac{A+B}{2}\right) + f(B)}{6} - \int_0^1 f((1-t)A + B)\, dt|||$$
$$\leq \frac{5}{72}|||A - B|||\left[max\left\{\left\|f'(A)\right\|, \left\|f'(\frac{A+B}{2})\right\|\right\} + max\left\{\left\|f'(B)\right\|, \left\|f'(\frac{A+B}{2})\right\|\right\}\right].$$

و اثبات کامل می‌شود.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.15.1]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.43]

منابع

1. Barnet N. S., Cerone P., Dragomir S. S., "Some new inequalities for Hermite-Hadamard divergence in information theory", Stochastic analysis and applications. Vol. 3, Nova Sci. Publ., Hauppauge, NY (2003) 7-19.
2. Dragomir S. S., Pearce C. E. M., "Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications", (RGMIA Monographs http:// rgmia.Vu.Edu.au/ monographs/ Hermite hadamard. Html), Victoria University (2000).
3. Wu S., "On the weighted generalization of the Hermite-Hadamard inequality and its applications", Rocky Mountain J. Math. 39 (5) (2009) 1741-1749.
4. Hudzik H., Maligranda L., "Some remarks on s-convex functions", Aequationes Math., 48 (1994) 100-111.
5. Bhatia R., "Matrix analysis", Springer-verlag, New York (1997).
6. Furuta T., Micic Hot J., Pecaric J., Seo Y., "Mond-Pecaric Method in Operator Inequalities (Inequalities for bounded self adjoint operators on a Hilbert space)", Monographs in Inequalities, Vol. 1. Element, Zagreb (2005).
7. Bhatia R., "Perturbation bounds for the operator absolute value", Linear Algebra Appl. 226 (1995) 539-545.
8. Bhatia R., "First and second order perturbation bounds for the operator absolute value", Linear Algebra Appl. 208 (1994) 367-376.
9. Bhatia R., Sinha K. B., "Variation of real powers of positive operators", Indiana Univ. Math. J. 43 (1994) 913-925.
10. Dragomir S. S., Agarwal R. P., "Tow inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula", Appl. Math. Lett. 11(5) (1998) 91-95.
11. Ghazanfari A. G., "Hermite-Hadamard type inequalities for functions whose derivatives are operator convex", Complex Anal. Oper. Theory 10 (8) (2016) 1695-1703.