

تابع یکنوای عملگری و تحدب نرم مشتق‌های آن

زهرا رحیمی چگنی^۱، امیرقاسم غضنفری^{۲*}، کمال فلاحی^۱
۱. دانشگاه پیام نور، گروه ریاضی، تهران،
۲. دانشگاه لرستان، گروه ریاضی

دریافت ۹۸/۰۵/۲۰ پذیرش ۹۸/۱۱/۲۷

چکیده

فرض کنید f یک تابع یکنوای عملگری روی $(0, \infty)$ و A یک عملگر مثبت وارون‌پذیر روی فضای هیلبرت H باشد. نشان می‌دهیم اگر $\|f\|$ یک نرم یکانی پایا باشد، آن‌گاه برای هر عدد صحیح مثبت n

$$\|D^n f(A)\| \leq \|f^{(n)}(A)\|$$

ثابت می‌کنیم تابع $\|f^{(n)}(\cdot)\|$ روی مجموعه همه عملگرهای مثبت وارون‌پذیر در $B(H)$ شبه‌محدب است. و هم‌چنین نشان می‌دهیم

$$\|f(A) - f(B)\| \leq \max\{\|f'(A)\|, \|f'(B)\|\} \|A - B\|,$$

که این یک تعریف از نتیجه معروف زیر است:

$$\|f(A) - f(B)\| \leq f'(a) \|A - B\|,$$

که در آن a یک عدد حقیقی مثبت و $A, B \geq a1_H$

در این مقاله برخی تقریب‌ها از طرف راست نامساوی‌های نوع ارمیت-ادامارد که شامل توابع مشتق‌پذیرند و نرم نگاشت‌های القاء‌شده به‌وسیله مشتق آنها روی مجموعه تمام عملگرهای خودالحاق، محدب یا شبه‌محدب یا S -محدب هستند، به‌دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: نامساوی ارمیت - ادامارد، توابع مشتق‌پذیر، نرم یکانی پایا، تابع یکنوای عملگری.

معرفی و مقدمه

به‌ازای هر تابع محدب f روی \mathbb{R} و $a, b \in \mathbb{R}$ که $a < b$ نامساوی (۱) همواره برقرار است:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \quad (1)$$

که این نامساوی به نامساوی ارمیت-ادامارد^۱ معروف است و عکس آن برای تابع مقعر f برقرار است.

قابل ذکر است که نامساوی ارمیت ادامارد ممکن است به‌عنوان یک تعریف^۲ از مفهوم تحدب در نظر گرفته شود که به‌راحتی از نامساوی ینسن^۳ نتیجه می‌شود. در سال‌های اخیر چندین گسترش و تعمیم برای تحدب کلاسیک مطرح شده‌اند (برای اطلاعات بیشتر به [۱]، [۲]، [۳] و مراجع ذکر شده در آنها مراجعه شود).

اکنون با توجه به این‌که تعاریف تابع‌های شبه‌محدب و S -محدب تعمیمی از تعریف تابع محدب هستند، آنها را در ادامه بیان می‌کنیم.

*نویسنده مسئول ghazanfari.a@lu.ac.ir

1. Hermite-Hadamard
2. refinement
3. Jensen

تابع $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ روی $[a, b]$ شبه‌محدب گفته می‌شود، هرگاه به‌ازای هر x و y عضو $[a, b]$ و $0 \leq \lambda \leq 1$ داشته باشیم:

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq \max\{f(x), f(y)\}.$$

و برای یک ثابت $s \in (0, 1]$ تابع f از $(0, \infty)$ به \mathbb{R} ، s -محدب به مفهوم دوم در [۴]، گفته می‌شود، هرگاه برای هر x و y عضو $(0, \infty)$ و $0 \leq \lambda \leq 1$ داشته باشیم:

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)^s f(x) + \lambda^s f(y).$$

قبل از بیان نتایج، بر بیان ترتیب عملگری در $B(H)$ و تعاریف تابع‌های یکنوای عملگری و محدب عملگری مروری داریم.

به‌ازای عملگرهای خودالحاق A و B در $B(H)$ می‌نویسیم $A \leq B$ (یا $B \geq A$)، هرگاه برای هر بردار $h \in H$ داشته باشیم:

$$\langle Ah, h \rangle \leq \langle Bh, h \rangle,$$

که این نامساوی را ترتیب عملگری می‌نامیم.

فرض کنید I یک بازه در \mathbb{R} باشد و

$$\sigma(I) = \{A \in B(H) : A \text{ خودالحاق و } sp(A) \subseteq I\}.$$

تابع پیوسته حقیقی مقدار f روی بازه I محدب عملگری^۱ (مقعر عملگری^۲) گفته می‌شود، هرگاه در ترتیب عملگری $B(H)$ ، به‌ازای هر $\lambda \in [0, 1]$ و هر عملگر خودالحاق کراندار A و B در $\sigma(I)$ داشته باشیم:

$$f((1 - \lambda)A + \lambda B) \leq (\geq) (1 - \lambda)f(A) + \lambda f(B).$$

تابع پیوسته حقیقی مقدار f روی یک بازه I یکنوای عملگری^۳ نامیده می‌شود، هرگاه نسبت به ترتیب عملگری یکنوا باشد؛ به عبارت دیگر برای عملگرهای A و B عضو $\sigma(I)$ داشته باشیم:

$$A \leq B \implies f(A) \leq f(B).$$

برای مشاهده و بررسی بعضی نتایج اساسی در مورد توابع محدب (مقعر) و یکنوای عملگری به [۵]، [۶] مراجعه شود.

فرض کنید f یک تابع حقیقی روی $(0, \infty)$ و $f^{(n)}$ مشتق n -ام آن باشد. هم‌چنین فرض کنید f نگاشت القا شده به وسیله f روی عملگرهای مثبت باشد و $D^n f(A)$ مشتق فرشه^۴ مرتبه n -ام این نگاشت در نقطه A باشد.

برای هر A ، مشتق $D^n f(A)$ یک عملگر n -خطی روی فضای همه عملگرهای خودالحاق است که نرم برای این عملگرها بدین صورت تعریف شده است:

$$\|D^n f(A)\| = \sup\{\|D^n f(A)(B_1, \dots, B_n)\| : \|B_1\| = \dots = \|B_n\| = 1\}.$$

نرم $\|\cdot\|$ روی $B(H)$ نرم یکانی پایا نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $A \in B(H)$ و هر عملگر یکانی U و V عضو $B(H)$ ، داشته باشیم $\|UAV\| = \|A\|$.

در صورتی که $\|\cdot\|$ یک نرم یکانی پایا روی فضای عملگرهای خودالحاق باشد، در این صورت طبق این نرم، نرم مربوط به عملگر n -خطی $D^n f(A)$ بدین صورت تعریف می‌شود:

$$\|D^n f(A)\| = \sup\{\|D^n f(A)(B_1, \dots, B_n)\| : \|B_1\| = 1, \dots, \|B_n\| = 1\}$$

1. Operator Convex
2. Operator Concave
3. Operator Monotone

چون $f^{(n)}(A) = D^n f(A)(1_H, \dots, 1_H)$ در این صورت داریم:

$$\|f^{(n)}(A)\| = \|D^n f(A)(1_H, \dots, 1_H)\| \leq \|D^n f(A)\|.$$

حال اگر تعریف کنیم:

$$D^{(n)} = \left\{ f : \|D^n f(A)\| = \|f^{(n)}(A)\| \quad A \text{ برای هر عملگر مثبت} \right\}.$$

با توجه به [۷] هر تابع یکنوای عملگری به‌ازای $n = 1, 2, \dots$ در $D^{(n)}$ است. همچنین در [۸] نشان داده شده است که به‌ازای $n = 2, 3, \dots$ تابع $f(t) = t^n$ و تابع با ضابطه $f(t) = \exp(t)$ در $D^{(1)}$ هستند که هیچ‌کدام از آنها یکنوای عملگری نیستند.

به‌علاوه در [۹] نشان داده شده است که تابع توانی $f(t) = t^p$ به‌ازای تمامی $p \in (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$ به‌جز $p \in (1, \sqrt{2})$ در $D^{(1)}$ است.

در این مقاله نگاشت‌های مشتق‌پذیری که نرم نگاشت‌های القاء شده به‌وسیله مشتق آنها روی مجموعه عملگرهای خودالحاق، محدب یا شبه‌محدب یا S -محدب است را در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که هرگاه f یک تابع یکنوای عملگری روی $(0, \infty)$ ، A یک عملگر مثبت وارون‌پذیر و $\| \cdot \|$ یک نرم یکانی پایا باشد، آن‌گاه برای هر عدد صحیح مثبت n داریم:

$$\| \|D^n f(A)\| \| \leq \|f^{(n)}(A)\|.$$

همچنین ثابت می‌کنیم $\| \|f^{(n)}(\cdot) \| \|$ (نرم نگاشت القاء شده به‌وسیله مشتق مرتبه n -ام تابع یکنوای عملگری f روی $(0, \infty)$ برای عدد صحیح مثبت n) یک تابع شبه‌محدب است. در ادامه مثال‌ها و کاربردها برای حالت‌های خاص نیز برای علاقه‌مندان آن آورده شده است. در پایان یک تخمین خطا برای فرمول سیمپسون ارائه می‌دهیم.

نتایج اصلی

۱. تابع‌های شبه‌محدب و یکنوای عملگری :

در بعضی مسائل در نظریه‌های تقریب^۱ و اختلال^۲ وقتی با نرم توابع سرو کار داریم، برخورداربودن خود توابع از ویژگی‌هایی مانند محدب بودن، یکنوایی، شبه‌محدب و S -محدب ضروری نیست و فقط داشتن این خواص برای نرم آن توابع کافی است.

فرض کنید f یک تابع حقیقی روی بازه I در \mathbb{R} باشد. در ادامه این مقاله تابع $\| \|f(\cdot) \| \|$ ، نرم نگاشت القاء شده به‌وسیله f روی مجموعه همه عملگرهای خودالحاق بدین صورت است:

$$\| \|f(\cdot) \| \| : \sigma(I) \rightarrow [0, \infty),$$

$$A \rightarrow \| \|f(A)\| \|.$$

مثال ۱. الف) فرض کنید f یک تابع حقیقی مثبت روی $I \subseteq \mathbb{R}$ باشد. در این صورت اگر f محدب عملگری باشد، آن‌گاه $\| \|f(\cdot) \| \|$ روی $\sigma(I)$ محدب است، چون

$$0 \leq f((1-t)A + tB) \leq (1-t)f(A) + tf(B),$$

و بنابراین

1. Approximation theory
2. Perturbation theory

$$\|f((1-t)A + tB)\| \leq (1-t)\|f(A)\| + t\|f(B)\|.$$

در نتیجه اگر r یک عدد حقیقی در $[1, 2] \cup [-1, 0]$ باشد، چون تابع با ضابطه $f(x) = x^r$ یک تابع محدب عملگری روی $(0, \infty)$ است، آن‌گاه به‌ازای هر $I \subseteq (0, \infty)$ ، تابع $\|f(\cdot)\|$ روی I محدب است. و از آن‌جاکه اگر r یک عدد حقیقی با شرط $r \geq 2$ باشد، در این صورت تابع حقیقی با ضابطه $f(x) = x^r$ روی $(0, \infty)$ محدب است و

$$\begin{aligned} \|((1-t)A + tB)^r\| &= \|(1-t)A + tB\|^r \\ &\leq ((1-t)\|A\| + t\|B\|)^r \\ &\leq (1-t)\|A\|^r + t\|B\|^r. \end{aligned}$$

پس اگر r یک عدد حقیقی در بازه $[1, \infty) \cup [-1, 0]$ باشد، آن‌گاه به‌ازای هر بازه $I \subseteq (0, \infty)$ ، تابع $\|f(\cdot)\|$ روی I محدب است.

(ب) فرض کنید f یک تابع حقیقی مثبت روی $I \subseteq (0, \infty)$ باشد. اگر f یکنوای عملگری باشد، آن‌گاه $\|f(\cdot)\|$ روی I شبه محدب است. چون:

$$\begin{aligned} \|f((1-t)A + tB)\| &= f(\|(1-t)A + tB\|) \\ &\leq f((1-t)\|A\| + t\|B\|) \\ &\leq f(\max\{\|A\|, \|B\|\}) \\ &= \max\{f(\|A\|), f(\|B\|)\} \\ &= \max\{\|f(A)\|, \|f(B)\|\}. \end{aligned}$$

فرض کنید $0 \leq r \leq 1$ و $f(x) = x^r$ که در آن $0 < x < \infty$. نامساوی زیر نیز نتیجه می‌دهد که $\|f(\cdot)\|$ روی $I \subseteq (0, \infty)$ شبه‌محدب است.

$\|((1-t)A + tB)^r\| = \|(1-t)A + tB\|^r \leq (\max\{\|A\|, \|B\|\})^r = \max\{\|A\|^r, \|B\|^r\}$.
(ج) برای $f(x) = -x^2 + 1$ روی \mathbb{R} ، تابع $\|f(\cdot)\|$ شبه‌محدب نیست، زیرا:

$$1 = \|f(0)\| = \left\| f\left(\frac{-1_H + 1_H}{2}\right) \right\| \not\leq \max\{\|f(-1_H)\|, \|f(1_H)\|\} = 0.$$

که چون هر تابع محدب، شبه‌محدب نیز است می‌توان نتیجه گرفت که این تابع محدب هم نیست.
قضیه ۱. فرض کنید f یک تابع یکنوای عملگری روی $(0, \infty)$ و n یک عدد صحیح مثبت باشد، در این صورت $\|f^{(n)}(\cdot)\|$ شبه‌محدب است؛ یعنی به‌ازای تمامی عملگرهای مثبت و معکوس‌پذیر A و B و $0 \leq v \leq 1$ داریم:

$$\|f^{(n)}((1-v)A + vB)\| \leq \max\{\|f^{(n)}(A)\|, \|f^{(n)}(B)\|\}. \quad (۲)$$

اثبات. می‌دانیم که هر تابع یکنوای عملگری f روی $(0, \infty)$ یک نمایش انتگرالی به صورت (۳) دارد:

$$f(t) = \alpha + \beta t + \int_0^\infty \left(\frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} - \frac{1}{\lambda + t} \right) d\mu(\lambda), \quad (۳)$$

که در آن α و β اعداد حقیقی، $\beta \geq 0$ و μ یک اندازه مثبت روی $(0, \infty)$ است [5, (V. 49)]، که:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\lambda^2 + 1} d\mu(\lambda) < \infty.$$

نمایش انتگرالی (۳) نتیجه می‌دهد که هر تابع یکنوای عملگری روی $(0, \infty)$ بی‌نهایت مشتق‌پذیر است، بنابراین

$$f(A) = \alpha 1_H + \beta A + \int_0^\infty \left[\frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} 1_H - (\lambda + A)^{-1} \right] d\mu(\lambda). \quad (۴)$$

به‌علاوه از نمایش انتگرالی رابطه (۵) به‌دست می‌آید:

$$f'(t) = \beta + \int_0^\infty \frac{1}{(\lambda+t)^2} d\mu(\lambda). \quad (5)$$

در نتیجه:

$$\|f'(A)\| = \left\| \beta 1_H + \int_0^\infty (\lambda + A)^{-2} d\mu(\lambda) \right\|.$$

حال فرض کنید $a_0 = \inf\{\langle Ax, x \rangle : \|x\| = 1\}$ و $b_0 = \inf\{\langle Bx, x \rangle : \|x\| = 1\}$ در این صورت چون $\beta \geq 0$ داریم:

$$\|f'(A)\| = \beta + \int_0^\infty (\lambda + a_0)^{-2} d\mu(\lambda) = \beta + \int_0^\infty \|(\lambda + A)^{-1}\|^2 d\mu(\lambda),$$

و به‌طور مشابه،

$$\|f'(B)\| = \beta + \int_0^\infty (\lambda + b_0)^{-2} d\mu(\lambda) = \beta + \int_0^\infty \|(\lambda + B)^{-1}\|^2 d\mu(\lambda).$$

فرض کنید $a_0 \leq b_0$ در این صورت،

$$a_0 \leq (1-v)a_0 + vb_0 \leq \inf\{\langle [(1-v)A + vB]x, x \rangle : \|x\| = 1\},$$

که این نتیجه می‌دهد:

$$\|f'(A)\| \geq \|f'((1-v)A + vB)\|,$$

و نامساوی (۲) برای $n = 1$ ثابت می‌شود.

به‌طور مشابه برای $n \geq 2$ داریم:

$$\begin{aligned} \|f^{(n)}(A)\| &= \left\| (-1)^{n+1} n! \int_0^\infty (\lambda + A)^{-n-1} d\mu(\lambda) \right\| \\ &= n! \int_0^\infty \|(\lambda + A)^{-1}\|^{n+1} d\mu(\lambda). \end{aligned}$$

به‌کمک روند مشابه می‌توان نشان داد که در این حالت دوباره نامساوی (۲) برقرار است و این اثبات را کامل می‌کند. **قضیه ۲.** فرض کنید f یک تابع یکنوای عملگری روی $(0, \infty)$ و $\| \cdot \|$ یک نرم یکانی پایا است. اگر A یک عملگر مثبت وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه برای هر عدد صحیح مثبت n این رابطه برقرار است:

$$\| \|D^n f(A)\| \| \leq \|f^{(n)}(A)\|,$$

و در نتیجه $f \in D^{(n)}$.

اثبات. از رابطه (۴) داریم:

$$Df(A)(B) = \beta B + \int_0^\infty (\lambda + A)^{-1} B (\lambda + A)^{-1} d\mu(\lambda).$$

چون طبق [۵، (IV، ۴۰)] داریم:

$$\| \|(\lambda + A)^{-1} B (\lambda + A)^{-1} \| \| \leq \|(\lambda + A)^{-1}\| \| \|B\| \| \|(\lambda + A)^{-1}\|,$$

بنابراین:

$$\| \|Df(A)(B)\| \| \leq \beta + \int_0^\infty \|(\lambda + A)^{-1}\|^2 d\mu(\lambda) = \|f'(A)\|.$$

هم‌چنین به‌ازای هر $n \geq 2$ داریم:

$$D^n f(A)(B_1, B_2, \dots, B_n) = (-1)^{n+1} \int_0^\infty \left[\sum_{\sigma} ((\lambda + A)^{-1} B_{\sigma(1)} (\lambda + A)^{-1} \dots (\lambda + A)^{-1} B_{\sigma(n)} (A + \lambda)^{-1}) \right] d\mu(\lambda).$$

با استفاده از [IV, ۴۰] در [۵] به‌دست می‌آوریم:

$$\| \|D^n f(A)\| \| \leq n! \int_0^\infty \|(\lambda + A)^{-1}\|^{n+1} d\mu(\lambda) = \|f^{(n)}(A)\|.$$

و این اثبات را کامل می‌کند.

۲. نامساوی‌های از نوع ارمیت-ادامارد:

تعمیم‌ها و تعریف‌های زیادی از نامساوی ارمیت-ادامارد (۱) به‌دست آمده است، که از میان آنها می‌توان به تعمیم این نامساوی برای توابع مشتق‌پذیری که قدرمطلق مشتق آنها توابعی محدب هستند، اشاره کرد.

دراگومیر و آگروال [۱۰]، نشان می‌دهند برای $a, b \in \mathbb{R}$ اگر $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع مشتق‌پذیر روی (a, b) باشد و اگر $|f'|$ بر $[a, b]$ محدب باشد، آن‌گاه

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)(|f'(a)| + |f'(b)|)}{8}.$$

که برای اثبات این نامساوی از این رابطه استفاده کرده‌اند:

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_0^1 (1-2t) f'(ta + (1-t)b) dt.$$

هم‌چنین این بخش را با بیان لم کاربردی ۱ ادامه می‌دهیم تا بتوانیم نتایج به‌دست آمده به وسیله آنها را به عملگرهای خودالحاق روی یک فضای هیلبرت تعمیم دهیم.

لم ۱. [۱۱ لم ۱]، فرض کنید $I \subseteq \mathbb{R}$ یک بازه باز و f از I به \mathbb{R} یک تابع مشتق‌پذیر از مرتبه دوم روی I است، به‌طوری‌که f'' روی I پیوسته باشد. هرگاه A و B عملگرهای خودالحاق در $\sigma(I)$ باشند و $v \in [0, 1]$ ، آن‌گاه:

$$\int_0^1 (t-v) Df((1-t)A + tB)(B-A) dt = v f(A) + (1-v) f(B) - \int_0^1 f((1-t)A + tB) dt. \quad (۶)$$

گزاره ۱. فرض کنید f یک تابع حقیقی روی فاصله باز $I \subseteq (0, \infty)$ باشد، هم‌چنین فرض کنید

$f \in C^2(I) \cap D(1)$ و $\|f'(\cdot)\|$ روی $\sigma(I)$ محدب باشد، در این صورت به‌ازای هر A و B در $\sigma(I)$ داریم:

$$\begin{aligned} & \left\| v f(A) + (1-v) f(B) - \int_0^1 f((1-t)A + tB) dt \right\| \\ & \leq \frac{1}{6} [2(1-v)^3 - 3(1-v) + 2] \|f'(A)\| \|A - B\| \\ & \quad + \frac{1}{6} (2v^3 - 3v + 2) \|f'(B)\| \|A - B\|, \end{aligned} \quad (۷)$$

اثبات. با استفاده از لم ۱، و چون $\|f'(\cdot)\|$ محدب است داریم:

$$\left\| v f(A) + (1-v) f(B) - \int_0^1 f((1-t)A + tB) dt \right\|$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \int_0^1 (t-v) Df((1-t)A + tB)(A-B) dt \right\| \\
&\leq \|A-B\| \int_0^1 |t-v| \|Df((1-t)A + tB)\| dt \\
&= \|A-B\| \int_0^1 |t-v| \|f'((1-t)A + tB)\| dt \\
&\leq \|A-B\| \int_0^1 |t-v| \left((1-t) \|f'(A)\| + t \|f'(B)\| \right) dt,
\end{aligned}$$

حال به کمک این تساوی می‌توان نامساوی رابطه (۷) را نتیجه گرفت

$$\int_0^1 |t-v| t dt = \frac{1}{6} (2v^3 - 3v + 2).$$

با بحثی مشابه در اثبات گزاره ۱، یک نامساوی جدید از نامساوی ارمیت - ادامارد به دست می‌آوریم که آن را در نتیجه ۱ بیان می‌کنیم:

نتیجه ۱. فرض کنید f یک تابع حقیقی روی یک بازه $I \subseteq (0, \infty)$ باشد، $f \in C^2(I) \cap D^{(1)}$ و همچنین فرض کنید:

$$X = vf(A) + (1-v)f(B) - \int_0^1 f((1-t)A + tB) dt$$

الف) اگر $\|f'(\cdot)\|$ روی $\sigma(I)$ شبه‌محدب باشد، آن‌گاه به ازای هر A و B عضو $\sigma(I)$:

$$\|X\| \leq \left(v^2 - v + \frac{1}{2}\right) \|A - B\| \max\{\|f'(A)\|, \|f'(B)\|\}. \quad (۸)$$

ب) اگر $\|f'(\cdot)\|$ روی $\sigma(I)$ s -محدب باشد، آن‌گاه به ازای هر A و B عضو $\sigma(I)$:

$$\begin{aligned}
\|X\| &\leq \left(\frac{1}{s+2} - \frac{1-v}{s+1} + \frac{2(1-v)^{s+2}}{(s+1)(s+2)} \right) \|f'(A)\| \|A-B\| \\
&\quad + \left(\frac{1}{s+2} - \frac{v}{s+1} + \frac{2v^{s+2}}{(s+1)(s+2)} \right) \|f'(B)\| \|A-B\|. \quad (۹)
\end{aligned}$$

ج) فرض کنید f یک تابع یکنوای عملگری روی $(0, \infty)$ باشد. در این صورت به ازای هر نرم یکانی پایای $\|\cdot\|$ و هر A و B عضو $\sigma(I)$:

$$\| \|X\| \| \leq \left(v^2 - v + \frac{1}{2}\right) \| \|A - B\| \| \max\{\|f'(A)\|, \|f'(B)\|\}. \quad (۱۰)$$

۳. کاربردها

به عنوان یک کاربرد مهم از نتایج این مقاله، کران‌هایی برای $\|f(A) - f(B)\|$ با توجه به $\|A - B\|$ می‌یابیم که یکی از مسائل اصلی در قضیه اختلال است. نامساوی‌های زیر، نامساوی‌های مرتبط با $(X, ۴۶)$ - $(X, ۴۳)$ در [۵] است که برای توابع یکنوای عملگری برقرار هستند.

نتیجه ۲. الف) فرض کنید f یک تابع حقیقی روی بازه $I \subseteq (0, \infty)$ باشد و $f \in C^2(I) \cap D^{(1)}$ در این صورت به ازای هر $A, B \in \sigma(I)$:

اگر $\|f'(\cdot)\|$ روی $\sigma(I)$ محدب باشد، آن‌گاه:

$$\|f(A) - f(B)\| \leq \frac{1}{2} \left(\|f'(A)\| + \|f'(B)\| \right) \|A - B\|, \quad (۱۱)$$

اگر $\|f'(\cdot)\|$ روی $\sigma(I)$ شبه‌محدب باشد، آن‌گاه:

$$\|f(A) - f(B)\| \leq \max\{\|f'(A)\|, \|f'(B)\|\} \|A - B\|, \quad (۱۲)$$

اگر $\|f'(\cdot)\|$ روی $\sigma(I)$ s -محدب باشد، آن‌گاه:

$$\|f(A) - f(B)\| \leq \frac{1}{s+1} (\|f'(A)\| + \|f'(B)\|) \|A - B\|, \quad (۱۳)$$

(ب) فرض کنید f یک تابع یکنوای عملگری روی $(0, \infty)$ باشد. در این صورت برای هر نرم یکانی پایای $\|\cdot\|$ و هر A و B عضو $\sigma(I)$:

$$\| \|f(A) - f(B)\| \| \leq \max\{\|f'(A)\|, \|f'(B)\|\} \| \|A - B\| \| . \quad (۱۴)$$

اثبات: (الف) فرض کنید $\|f'(\cdot)\|$ روی $\sigma(I)$ محدب باشد، با استفاده از (۷) برای $v = 1$ و $v = 0$ ، این نامساوی‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\left\| f(A) - \int_0^1 f((1-t)A + tB) dt \right\| \leq \left(\frac{1}{3} \|f'(A)\| + \frac{1}{6} \|f'(B)\| \right) \|A - B\|$$

و

$$\left\| f(B) - \int_0^1 f((1-t)A + tB) dt \right\| \leq \left(\frac{1}{6} \|f'(A)\| + \frac{1}{3} \|f'(B)\| \right) \|A - B\|.$$

و $v = 1$ محدب باشد، آن‌گاه از نامساوی (۸) یا (۹) برای s -شبه‌محدب یا $\sigma(I)$ روی $\|f'(\cdot)\|$ حال در صورتی که نامساوی‌های مطلوب در قسمت (الف) را به‌دست می‌آوریم. $v = 0$

(ب) به‌کمک رابطه (۱۰) برای $v = 1$ و $v = 0$ ، نامساوی‌های زیر را به‌دست می‌آوریم، که به نوع خود جالب هستند.

$$\| \|f(A) - \int_0^1 f((1-t)A + tB) dt \| \| \leq \frac{1}{2} \| \|A - B\| \| \max\{\|f'(A)\|, \|f'(B)\|\},$$

$$\| \|f(B) - \int_0^1 f((1-t)A + tB) dt \| \| \leq \frac{1}{2} \| \|A - B\| \| \max\{\|f'(A)\|, \|f'(B)\|\}.$$

بنابراین نامساوی مطلوب (۱۴) را به‌دست می‌آوریم و اثبات کامل می‌شود.

به‌کمک نتیجه ۲، مثال ۲ را بیان می‌کنیم:

مثال ۲. (الف) برای $f(t) = t^{r+1}$ که $0 < r < 1$ داریم:

$$\|A^{r+1} - B^{r+1}\| \leq \frac{(r+1)}{2} (\|A\|^r + \|B\|^r) \|B - A\|.$$

(ب) برای $f(t) = t^r$ که $0 < r < 1$ داریم:

$$\| \|A^r - B^r \| \| \leq r (\max\{\|A^{-1}\|, \|B^{-1}\|\})^{1-r} \| \|A - B\| \|.$$

(ج) برای $f(t) = \log t$ روی $(0, \infty)$.

$$\| \| \log(A) - \log(B) \| \| \leq (\max\{\|A^{-1}\|, \|B^{-1}\|\}) \| \|A - B\| \|$$

تذکره ۲. فرض کنید که f یک تابع یکنوای عملگری روی $(0, \infty)$ باشد و فرض کنید A و B دو عملگر مثبت باشند

به‌طوری‌که برای عدد مثبت a ، $A \geq a1_H$ و $B \geq a1_H$.

به‌وسیله قضیه [۳.۸، X از ۵]، برای هر نرم یکانی پایا نامساوی (۱۵) برقرار است:

$$\| \|f(A) - f(B) \| \| \leq f'(a) \| \|A - B\| \| . \quad (۱۵)$$

هم‌چنین از تساوی (۵)، داریم:

$$f'(A) = \beta 1_H + \int_0^\infty (\lambda + A)^{-2} d\mu(\lambda) \leq \beta 1_H + \left[\int_0^\infty (\lambda + a)^{-2} d\mu(\lambda) \right] I = f'(a)I$$

که این نتیجه می‌دهد:

$$\max \left\{ \|f'(A)\|, \|f'(B)\| \right\} \leq f'(a).$$

بنابراین نامساوی (۱۴) یک تعریف (۱۵) است. این تعریف می‌تواند اکید باشد، چون برای تابع $f(t) = t^r$ که $0 < r < 1$ و $A = B = b1_H$ با شرط $b > a$ ، داریم:

$$\max \left\{ \|f'(A)\|, \|f'(B)\| \right\} = r \max \{ \|A^{r-1}\|, \|B^{r-1}\| \} = rb^{r-1} < ra^{r-1} = f'(a).$$

در قضیه ۳، فرمول سیمپسون برای توابع یکنوای عملگری را به‌دست می‌آوریم.

قضیه ۳. فرض کنید f یک تابع یکنوای عملگری روی $(0, \infty)$ باشد. در این صورت برای هر نرم یکانی پایای $\|\cdot\|$ و هر $A, B \in \sigma(I)$ داریم:

$$\left\| \frac{f(A) + 4f\left(\frac{A+B}{2}\right) + f(B)}{6} - \int_0^1 f((1-t)A + tB) dt \right\| \leq \frac{5}{72} \|A - B\| \left[\max \left\{ \left\| f'(A) \right\|, \left\| f'\left(\frac{A+B}{2}\right) \right\| \right\} + \max \left\{ \left\| f'\left(\frac{A+B}{2}\right) \right\|, \left\| f'(B) \right\| \right\} \right].$$

اثبات. چون

$$\int_0^1 f((1-t)A + tB) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 f\left((1-t)A + t\frac{A+B}{2}\right) dt + \frac{1}{2} \int_0^1 f\left((1-t)\frac{A+B}{2} + tB\right) dt,$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{f(A) + 4f\left(\frac{A+B}{2}\right) + f(B)}{6} - \int_0^1 f((1-t)A + tB) dt \right\| \leq \\ & \frac{1}{2} \left\| \frac{f(A) + 2f\left(\frac{A+B}{2}\right)}{3} - \int_0^1 f\left((1-t)A + t\frac{A+B}{2}\right) dt \right\| \\ & + \left\| \frac{2f\left(\frac{A+B}{2}\right) + f(B)}{3} - \int_0^1 f\left((1-t)\frac{A+B}{2} + tB\right) dt \right\| \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

به کمک نامساوی (۱۴) به‌زای $v = \frac{1}{3}$ و برای $v = \frac{2}{3}$ به‌دست می‌آوریم که:

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{f(A) + 4f\left(\frac{A+B}{2}\right) + f(B)}{6} - \int_0^1 f((1-t)A + tB) dt \right\| \\ & \leq \frac{5}{72} \|A - B\| \left[\max \left\{ \left\| f'(A) \right\|, \left\| f'\left(\frac{A+B}{2}\right) \right\| \right\} + \max \left\{ \left\| f'(B) \right\|, \left\| f'\left(\frac{A+B}{2}\right) \right\| \right\} \right]. \end{aligned}$$

و اثبات کامل می‌شود.

منابع

1. Barnett N. S., Cerone P., Dragomir S. S., "Some new inequalities for Hermite-Hadamard divergence in information theory", Stochastic analysis and applications. Vol. 3, Nova Sci. Publ., Hauppauge, NY (2003) 7-19.
2. Dragomir S. S., Pearce C. E. M., "Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications", (RGMIA Monographs <http://rgmia.Vu.Edu.au/monographs/Hermitehadamard.html>), Victoria University (2000).
3. Wu S., "On the weighted generalization of the Hermite-Hadamard inequality and its applications", Rocky Mountain J. Math. 39 (5) (2009) 1741-1749.
4. Hudzik H., Maligranda L., "Some remarks on s-convex functions", Aequationes Math., 48 (1994) 100-111.
5. Bhatia R., "Matrix analysis", Springer-verlag, New York (1997).
6. Furuta T., Micic Hot J., Pecaric J., Seo Y., "Mond-Pecaric Method in Operator Inequalities (Inequalities for bounded self adjoint operators on a Hilbert space)", Monographs in Inequalities, Vol. 1. Element, Zagreb (2005).
7. Bhatia R., "Perturbation bounds for the operator absolute value", Linear Algebra Appl. 226 (1995) 539-545.
8. Bhatia R., "First and second order perturbation bounds for the operator absolute value", Linear Algebra Appl. 208 (1994) 367-376.
9. Bhatia R., Sinha K. B., "Variation of real powers of positive operators", Indiana Univ. Math. J. 43 (1994) 913-925.
10. Dragomir S. S., Agarwal R. P., "Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula", Appl. Math. Lett. 11(5) (1998) 91-95.
11. Ghazanfari A. G., "Hermite-Hadamard type inequalities for functions whose derivatives are operator convex", Complex Anal. Oper. Theory 10 (8) (2016) 1695-1703.