مقایسه‌های تصادفی بین افزونگی مؤلفه و دستگاه، برای دستگاه‌های سری مونتاژشده

ابراهیم امینی سرشت
دانشگاه بوعلی سینا، گروه آمار
قباد برمال زن
دانشگاه زابل، گروه آمار

دریافت ۹۸/۰۶/۲۳ پذیرش ۹۹/۰۱/۲۴

چکیده

در این مقاله، به مقایسهٔ تصادفی افزونگی فعال در سطح مؤلفه، در مقابل به سطح دستگاه می‌پردازیم. هم‌چنین به مقایسهٔ تصادفی طول عمر دستگاه‌های سری با استفاده از ترتیب‌های تصادفی معمولی، نرخ خطر و نرخ خطر معکوس در دو حالت (الف) مؤلفه‌های یدکی و اصلی هم توزیع و مستقل و (ب) مؤلفه‌های یدکی و اصلی غیر هم توزیع و وابسته، می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: ترتیب‌های تصادفی، تخصیص افزونگی، دستگاه‌های منسجم.

مقدمه و تعاریف مورد نیاز

امروزه در مهندسی قابلیت اعتماد عمده‌ترین مشخصه‌ای که برای دستگاه‌ها بررسی می‌شود طول عمر دستگاه، یا به‌عبارت دیگر، زمان شکست دستگاه و یا زمان از کارافتادگی دستگاه است. در این‌جا منظور از شکست حالتی است که دستگاه با مؤلفه‌های تشکیل‌دهندهٔ خود، نتواند وظیفه محوله را در زمان مورد نظر به‌طور رضایت‌بخشی انجام دهد. بنابراین، عملکرد دستگاه بستگی به عملکرد اجزاء و نحوهٔ اتصال آنها دارد. با مشخص شدن ساختار کلی دستگاه، می‌توان اطلاعات بسیار مهمی از نحوهٔ عملکرد دستگاه به‌دست آورد. لازم به ذکر است که با گذشت زمان، مؤلفه‌های دستگاه دچار سال‌خوردگی (کهنگی) می‌شوند و نیاز به جای‌گزینی با مؤلفه‌های جدید دارند، بنابراین ممکن است طول عمر دستگاه را با ترکیب کردن مؤلفه‌های اصلی دستگاه با قطعاتی یدکی افزایش داد. مسئلهٔ مورد علاقه که اکنون مطرح است این است که در کجا و چگونه قطعات یدکی به دستگاه افزوده شوند تا منجر به افزایش طول عمر دستگاه شوند. مهندسان طراح عموماً بر این باور هستند که افزونگی در سطح مؤلفه‌ها (هر مؤلفه با مؤلفه‌های دیگر، به‌طور موازی به‌هم متصل شوند) نسبت به افزونگی در سطح دستگاه‌ها (مؤلفه‌های یدکی تشکیل یک دستگاه جدا دهند و سپس به‌عنوان یک دستگاه به دستگاه اصلی متصل شوند) منجر به افزایش طول عمر دستگاه می‌شود. افزونگی در دستگاه‌ها معمولاً بر دو نوع است: ۱. افزونگی فعال یا افزونگی موازی، ۲. افزونگی آماده به‌کار. لازم به ذکر است که در افزونگی فعال، جای‌گزینی قطعات در طول بهره‌برداری از دستگاه، غیرممکن است و در این نوع، قطعات یدکی به‌صورت

*نویسنده مسئول ghobad.barmalzan@gmail.com

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.249]

موازی با قطعات اصلی در دستگاه قرار می‌گیرند که منجر به حداکثر شدن طول عمر می‌شوند. در افزونگی آماده به‌کار هنگامی که قابلیت اعتماد سوئیچینگ به اندازه کافی نباشد، افزونگی موازی ترجیح داده می‌شود و هنگامی که جزئی از دستگاه خراب شود، جزء آماده به‌کار به‌طور موازی به قطعه یا دستگاه برای حداکثر شدن طول عمر متصل می‌شود در این مقاله، فقط به بررسی افزونگی فعال در سطح مؤلفه‌ها نسبت به دستگاه‌ها می‌پردازیم.

فرض کنید بردار متغیرهای تصادفی $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ معرف طول عمر مؤلفه‌های اصلی[1] یک دستگاه و بردار متغیرهای تصادفی $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ نیز معرف طول عمر مؤلفه‌های یدکی[2] باشند. اکنون قرار دهید

$$X \vee Y = (X_1 \vee Y_1, \dots, X_n \vee Y_n) \text{ و } X \wedge Y = (X_1 \wedge Y_1, \dots, X_n \wedge Y_n)$$

که در آن عملگرهای $\wedge$ و $\vee$ به‌ترتیب به معنای کمینه و بیشینه هستند. اگر طول عمر یک دستگاه متشکل از مؤلفه‌های $\mathbf{X}$ با $\tau(\mathbf{X})$ نمایش داده شود آن‌گاه $\tau(X \vee Y)$ بیان‌گر طول عمر دستگاهی (دستگاه مونتاژ[3] شده) با افزونگی فعال در سطح مؤلفه‌ها و $\tau(X) \vee \tau(Y)$ طول عمر دستگاهی (دستگاه مونتاژ شده) با افزونگی فعال در سطح دستگاه است. سوالی که اکنون مطرح است این است که تحت چه شرایطی می‌توان نشان داد:

$$\tau(X \vee Y) \leq_* (\geq_*)\ \tau(X) \ \vee\ \tau(Y) \qquad (۱)$$

که در آن نماد $*$ می‌تواند انواع ترتیب‌های تصادفی مانند ترتیب تصادفی معمولی، ترتیب تصادفی نرخ خطر و یا ترتیب تصادفی نرخ خطر معکوس باشد که در ادامه این بخش به تعریف آنها می‌پردازیم. رابطهٔ $\leq_*$ نشان‌دهندهٔ این است که افزونگی فعال در سطح دستگاه‌ها بر حسب ترتیب تصادفی $*$ بهتر باشد و رابطهٔ $(\geq_*)$ بیان‌گر این باشد که افزونگی فعال در سطح مؤلفه‌ها بر حسب ترتیب تصادفی $*$ بهتر است. توجه کنیم که در افزونگی فعال، قطعات یدکی با قطعات اصلی دستگاه به‌طور موازی بهم متصل می‌شوند، بنابراین طول عمر دستگاه، برابر بیشینهٔ طول عمر مؤلفه‌های اصلی و یدکی است. در این مقالهٔ رابطهٔ (۱) را در نظر گرفته و نتایجی را بیان و اثبات می‌کنیم.

مقایسهٔ تصادفی دستگاه‌ها با توجه به نوع افزونگی فعال، در چند دههٔ اخیر مورد توجه بسیاری از پژوهش‌گران بوده است و نتایج جالبی از مقایسه دستگاه‌ها بر حسب افزونگی فعال در سطح مؤلفه‌ها نسبت به سطح دستگاه‌ها به‌دست آمده است، برای مثال، می‌توان به بولند[4] و همکاران (۱۹۹۲)، سینگ[5] و میسرا[6] (۱۹۹۴)، سینگ و سینگ (۱۹۹۷)، ولدز[7] و زکیورا[8] (۲۰۰۶)، داکوستا بونو[9] و دوکارمو[10] (۲۰۰۷)، هو[11] و ونگ[12] (۲۰۰۹)، ژائو[13] و همکاران (۲۰۱۲) و لانیادو[14] و لیلو[15] (۲۰۱۴) مراجعه کرد.

بولند و ال‌نیوهی[16] (۱۹۹۵) برای دستگاه‌های سری نشان دادند افزونگی فعال در سطح مؤلفه‌ها بهتر از افزونگی فعال در سطح دستگاه‌ها از لحاظ ترتیب تصادفی معمولی است و هم‌چنین نشان دادند که این نتیجه برای دستگاه‌های

1. Parent components
2. Spare components
3. Assembly system
4. Boland
5. Singh
6. Misra
7. Valdez
8. Zequeira
9. Da costa Bueno
10. Do carmo
11. Hu
12. Wang
13. Zhao
14. Laniado
15. Lillo
16. El-Neweihi

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.249]

موازی، بر عکس است. فرض کنید متغیرهای مستقل X_1 و X_2 بیان‌گر طول عمرهای دو مؤلفه اصلی از یک دستگاه باشند که ممکن است هم‌توزیع نباشند و متغیرهای مستقل Y_1 و Y_2 نیز بیان‌گر طول عمرهای دو مؤلفه یدکی باشند که ممکن است هم توزیع نباشند. هم‌چنین فرض می‌کنیم مؤلفه‌های اصلی و یدکی مستقل از هم کار کنند. اکنون متغیرهای تصادفی $U_1 =\wedge \{\vee \{X_1, Y_1\}, X_2\}$ و $U_2 =\wedge \{X_1, \vee \{X_2, Y_1\}\}$ را به‌عنوان طول عمرهای دو دستگاه در نظر بگیرید. چنان‌که مشاهده می‌شود در دستگاه اول و دوم یک مؤلفه یدکی وجود دارد. برای اولین بار، بولند و همکاران (۱۹۹۲) نشان دادند اگر $(X_2 \geq_{st} X_1)$، آن‌گاه $(U_1 \geq_{st} U_2)$ و این نتیجه مشخص می‌کند تخصیص مؤلفه یدکی به دستگاه باید به‌صورت موازی و با ضعیف‌ترین مؤلفه باشد، که به‌صورت شهودی این موضوع نیز قابل تجسم است. والدز و زکیورا (۲۰۰۳) نتیجه بولند و همکاران (۱۹۹۲) را برای ترتیب تصادفی نرخ خطر برای دستگاه‌هایی با طول عمرهای $U_1 =\wedge \{\vee \{X_1, Y_1\}, X_2\}$ و $U_2 =\wedge \{X_1, \vee \{X_2, Y_2\}\}$ تقویت بخشیدند. آنها نشان دادند:

$$X_2 \geq_{st[hr]} X_1 , \quad Y_1 \geq_{st[hr]} Y_2 \implies U_1 \geq_{st[hr]} U_2$$

در این نتیجه نیز مؤلفه یدکی باید به‌صورت موازی به ضعیف‌ترین مؤلفه، تخصیص داده شود. لازم به ذکر است که در این حالت در هر کدام از دستگاه‌ها، مؤلفه‌های یدکی، متفاوت هستند.

دو دستگاه با طول عمرهای $U_1 =\wedge \{\vee \{X_1, Y_1\}, \vee \{X_2, Y_2\}\}$ و $U_2 =\wedge \{\vee \{X_1, Y_2\}, \vee \{X_2, Y_1\}\}$ در نظر بگیرید. بولند و همکاران (۱۹۸۸) رابطه زیر را ثابت کردند:

$$X_1 \leq_{st} X_2 , \quad Y_1 \leq_{st} Y_2 \implies U_1 \leq_{st} U_2 ,$$

با توجه به این رابطه، مشخص می‌شود تخصیص بهینه از دو مؤلفه یدکی زمانی حاصل می‌شود که قوی‌ترین مؤلفه یدکی با ضعیف‌ترین مؤلفه اصلی دستگاه و ضعیف‌ترین مؤلفه یدکی با قوی‌ترین مؤلفه اصلی دستگاه، به‌طور موازی متصل شود. والدز و زکیورا (۲۰۰۶) تحت شرایطی نشان دادند که $U_1 \leq_{hr} U_2$. سپسناندا[1] و هازرا[2] (۲۰۱۳) نتایج نتایج به‌دست آمده را برای حالتی که n مؤلفه وجود داشته باشد تعمیم دادند. هم‌چنین میسرا و همکاران (۲۰۰۹) مسئله افزونگی را وقتی مؤلفه‌های یدکی و اصلی مستقل و غیر هم‌توزیع باشند را بررسی کردند و تحت شرایطی روی تابع توزیع مؤلفه‌های یدکی و اصلی، به مقایسهٔ تصادفی افزونگی دستگاه‌های سری در سطح مؤلفه‌ها نسبت به سطح دستگاه، پرداختند. برای اولین بار، شیکد و شانتیکومار (۱۹۹۲) مسئله افزونگی تعداد مؤلفه‌های تصادفی فعال به یک دستگاه سری با n مؤلفه وقتی که طول عمر مؤلفه‌های اصلی و یدکی هم توزیع و مستقل باشند، بررسی کردند. بعد از آن، دینگ و لی (۲۰۱۲) نتایج به‌دست آمده را در حالت کلی برای دستگاه‌های k از n بسط دادند و با استفاده از ترتیب بیشاندن بین تعداد مؤلفه‌های تصادفی یدکی، طول عمر دو دستگاه k از n را بر حسب ترتیب تصادفی نرخ خطر ارزیابی کردند. هم‌چنین دا و دینگ (۲۰۱۶) نتایج مذکور را برای دو دستگاه k از n و l از m بسط دادند و به مقایسه تصادفی طول عمر این دو دستگاه بر حسب ترتیب تصادفی درست‌نمایی پرداختند.

مقایسهٔ طول عمر دستگاه‌ها اغلب برای طراحی و برنامه‌ریزی قابلیت اعتماد آنها مورد نیاز است. یک طراح شاید نیاز به چگونگی تخصیص اجزاء یک دستگاه در سطح مؤلفه‌ها در مقابل به سطح دستگاه داشته باشد. برای مقایسه معناداری بین دستگاه‌ها، به مفاهیم مختلفی از ترتیب‌های تصادفی از قبیل ترتیب تصادفی معمولی، ترتیب تصادفی نرخ خطر و ترتیب تصادفی نرخ خطر معکوس نیاز داریم. در ادامه، بعضی از تعاریف و علامت‌گذاری‌ها در ترتیب‌های تصادفی

1. Nanda
2. Hazra

که در این مقاله استفاده می‌شود بیان شده است. لازم به ذکر است در این مقاله، صعودی به‌معنای « غیر نزولی» و نزولی به معنای « غیر صعودی» و $\mathcal{R}^+ = [۰, \infty)$ است.

فرض کنید متغیرهای تصادفی نامنفی X و Y به‌ترتیب دارای توابع چگالی احتمال f_X و f_Y، توابع توزیع تجمعی F_X و F_Y، توابع بقای $\bar{F}_X = 1 - F_X$ و $\bar{F}_Y = 1 - F_Y$ ، توابع نرخ خطر $h_X = \frac{f_X}{\bar{F}_X}$ و $h_Y = \frac{f_Y}{\bar{F}_Y}$ و توابع نرخ خطر معکوس $\tilde{h}_X = \frac{f_X}{F_X}$ و $\tilde{h}_Y = \frac{f_Y}{F_Y}$ باشند.

تعریف ۱. متغیر تصادفی X در ترتیب تصادفی معمولی کوچک‌تر از متغیر تصادفی Y است $(X \leq_{st} Y)$ اگر و تنها اگر برای همه $x \in \mathcal{R}^+$, $\bar{F}_X(x) \leq \bar{F}_Y(x)$.

تعریف ۲. متغیر تصادفی X در ترتیب تصادفی نرخ خطر کوچک‌تر از متغیر تصادفی Y است $(X \leq_{hr} Y)$ اگر و تنها اگر نسبت $\frac{\bar{F}_Y(x)}{\bar{F}_X(x)}$ تابعی صعودی نسبت به $x \in \mathcal{R}^+$ باشد. یا به‌طور معادل، $h_X(x) \geq h_Y(x)$.

تعریف ۳. متغیر تصادفی X در ترتیب تصادفی نرخ خطر معکوس کوچک‌تر از متغیر تصادفی Y است $(X \leq_{hr} Y)$ اگر و فقط اگر نسبت $\frac{F_Y(x)}{F_X(x)}$ تابعی صعودی نسبت به $x \in \mathcal{R}^+$ باشد. یا به‌طور معادل، نابرابری $\tilde{h}_X(x) \leq \tilde{h}_Y(x)$ برقرار باشد.

برای بررسی بیش‌تر در زمینهٔ ترتیب‌های تصادفی و کاربردهای آنها می‌توان به کتاب شیکد[۱] و شانتیکومار[۲] (۲۰۰۷) مراجعه کرد.

پژوهش‌های مطرح شده در این مقاله، برای حالت‌هایی هستند که هدف افزودن تعدادی مؤلفه یدکی به دستگاه است. بنابراین با استفاده از یک دستگاه، اثر افزونگی تعداد مؤلفه یدکی تصادفی با مؤلفه‌های اصلی دستگاه، را روی طول عمر دستگاه ارزیابی کردند. در این مقاله، به مقایسهٔ تأثیر این نوع افزونگی روی طول عمر دستگاه سری در خانواده توزیع‌های با نرخ خطر متناسب (برای تعریف خانواده توزیع‌های با نرخ خطر متناسب به ابتدای بخش دوم مراجعه شود) در سطح مؤلفه‌ها در مقابل به سطح دستگاه، بر حسب برخی ترتیب‌های تصادفی، پرداخته شده است. هم‌چنین برای حالتی که مؤلفه‌های یدکی مستقل نیست و بلکه وابسته باشند نتایج زیادی در ادبیات موضوع وجود دارد، که اکثر این نتایج برای حالت‌هایی بیان می‌شود که توزیع مؤلفه‌های اصلی و یدکی یکسان باشند. به‌عنوان مثال، گوپتا و کومار (۲۰۱۴)، در حالت خاص، وقتی که دستگاه سری از دو مؤلفه وابسته تشکیل می‌شود به مقایسه تصادفی افزونگی فعال در سطح دستگاه و در سطح مؤلفه‌ها، تحت این فرض که مؤلفه‌های یدکی و اصلی، وابسته و هم توزیع باشند، پرداختند.

در این مقاله دو وضعیت در نظر گرفته شده است: در وضعیت اول، مؤلفه‌های اصلی و یدکی به‌صورت هم‌توزیع و مستقل هستند و در وضعیت دیگر مؤلفه‌های اصلی وابسته و هم‌توزیع و مؤلفه‌های یدکی نیز وابسته و هم‌توزیع هستند و توزیع مؤلفه‌های اصلی و یدکی متفاوت هستند. بنابراین توجه خود را به دو وضعیت مذکور معطوف کرده و نتایجی در ارتباط با مقایسه تصادفی افزونگی دستگاه‌ها در سطح مؤلفه‌ها در مقابل به سطح دستگاه‌ها ارایه می‌شود. در بخش ۲، وضعیتی که مؤلفه‌های اصلی و یدکی مستقل از هم باشند بررسی شده و نتایجی را در حالتی که مؤلفه‌ها دارای طول عمرهایی از مدل نرخ خطر متناسب معکوس باشند بیان شده است. در بخش ۳، وضعیتی که مؤلفه‌های اصلی و

1. Shaked
2. Shanthikumar

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.249]

یدکی وابسته باشند در نظر گرفته شده و در حالت کلی نتایجی در ارتباط با مقایسه‌های تصادفی این‌گونه دستگاه‌ها بر حسب ترتیب تصادفی معمولی، ترتیب تصادفی نرخ خطر و ترتیب تصادفی نرخ خطر معکوس بیان شده است.

مؤلفه‌های اصلی و یدکی هم‌توزیع و مستقل

در این بخش، وضعیتی که در آن طول عمر مؤلفه‌های اصلی دستگاه و یدکی مستقل باشند در نظر گرفته شده است و نتایجی در ارتباط با ترتیب تصادفی نرخ خطر و نرخ خطر معکوس برای دستگاه‌های مونتاژ شده در خانواده توزیع‌هایی با نرخ خطر متناسب معکوس، بیان می‌شود. در اولین قضیه، حالتی در نظر می‌شود که مؤلفه‌های اصلی دستگاه و مؤلفه‌های یدکی به‌صورت متناظر، هم توزیع باشند. قبل از بیان قضیه، یادآوری می‌شود که متغیر تصادفی X دارای نرخ خطر متناسب معکوس است هرگاه تابع توزیع آن بدین‌صورت باشد:

$$F(x;\lambda)=F^{\lambda}(x), \qquad \lambda\geq 0\ ,$$

که در آن F را تابع توزیع پایه و λ را پارامتر مدل می‌نامند.

قضیهٔ ۱. فرض کنید متغیرهای تصادفی مستقل $X_1,\dots,X_n$ بیانگر طول عمر مؤلفه‌های یک دستگاه به‌ترتیب با تابع توزیع‌های $F^{\lambda_1},\dots,F^{\lambda_n}$ باشند. هم‌چنین فرض کنید متغیرهای تصادفی مستقل $Y_1,\dots,Y_n$ بیان‌گر طول عمر مؤلفه‌های یدکی به‌ترتیب با تابع توزیع‌های $F^{\lambda_1},\dots,F^{\lambda_n}$ باشند. آن‌گاه

$$\tau(\mathbf{X}\vee\mathbf{Y})\geq_{hr}\ \tau(\mathbf{X})\vee\tau(\mathbf{Y}).$$

برهان: برای اثبات، به پیوست ۱ مراجعه شود.

در قضیهٔ ۲، حالتی که مؤلفه‌های اصلی دستگاه و مؤلفه‌های یدکی، غیر هم‌توزیع باشند در نظر گرفته می‌شود و نتیجه‌ای در ارتباط با ترتیب تصادفی نرخ خطر معکوس بیان می‌شود.

قضیهٔ ۲. فرض کنید متغیرهای تصادفی مستقل $X_1,\dots,X_n$ بیانگر طول عمر مؤلفه‌های اصلی یک دستگاه با تابع توزیع مشترک F^{λ_1} باشند. هم‌چنین فرض کنید متغیرهای تصادفی مستقل $Y_1,\dots,Y_n$ بیان‌گرطول عمر مؤلفه‌های یدکی با تابع توزیع مشترک F^{λ_2} باشند. آن‌گاه

$$\tau(\mathbf{X}\vee\mathbf{Y})\geq_{rh}\tau(\mathbf{X})\vee\tau(\mathbf{Y}).$$

برهان: برای اثبات، به پیوست ۲ مراجعه شود.

مؤلفه‌های اصلی و یدکی غیرهم‌توزیع و وابسته

در این بخش، وضعیتی بررسی می‌شود که طول عمر مؤلفه‌های اصلی دستگاه و مؤلفه‌های یدکی به هم وابسته باشند. قبل از بیان نتایج به‌دست آمده، مروری مختصر بر تابع قابلیت اعتماد دستگاه‌ها با مؤلفه‌های وابسته داریم. در حالت کلی، یک دستگاه منسجم با تابع ساختار ϕ متشکل از n مؤلفه با بردار طول عمر $\boldsymbol{X}=(X_1,\dots,X_n)$ را در نظر بگیرید. هم‌چنین فرض کنید مؤلفه‌های دستگاه دارای طول عمرهای هم توزیع و وابسته از توزیع F و با تابع قابلیت اعتماد $\bar{F}$ باشند. تابع قابلیت اعتماد بردار $\mathbf{X}$ را می‌توان بدین‌صورت نوشت:

$$\bar{F}_{\mathrm{X}}(x_1,\dots,x_n)=P\left(X_{۱}>x_1,\dots,X_n>x_n\right)=\mathbb{C}\big(\bar{F}(x_1),\dots,\bar{F}(x_n)\big),$$

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.249]

که در آن $\mathbb{C}$ را تابع قابلیت اعتماد چند متغیره مفصل[1] می‌نامند به‌طوری‌که $\mathbb{C}(\cdot,\dots,\cdot)=1$ و $\mathbb{C}$ دارای توزیع‌های حاشیه‌ای از توزیع یکنواخت روی فاصله $(\cdot,1)$ باشد. یادآوری می‌شود، اگر طول عمر مؤلفه‌های دستگاه مستقل از هم باشند آن‌گاه $\mathbb{C}$ برابر حاصل‌ضرب تابع قابلیت اعتماد مؤلفه‌های دستگاه است. برای بررسی بیش‌تر در ارتباط با توابع مفصل و کاربردهای آن، به هوفدینگ[2] (۱۹۴۰)، نلسن (۲۰۰۶)، والدز و شو[3] (۲۰۱۱)، وو[4] (۲۰۱۴) و اسکلار[5] (۱۹۵۹) مراجعه کنید.

ناوارو[6] و همکاران (۲۰۱۲) نشان دادند، تابع قابلیت اعتماد دستگاه ϕ ، متشکل از مؤلفه‌های $\boldsymbol{X}$ را می توان بدین‌صورت نوشت:

$$\bar{F}_\tau(t)=P(\tau(\boldsymbol{X})>t)=h\big(\bar{F}(t)\big),$$

که در آن h را تابع تحریف[7] (ساختار وابستگی) می‌نامند و به تابع ساختار دستگاه و تابع قابلیت اعتماد مفصل، $\mathbb{C}$، وابسته است. به‌عنوان مثال، اگر برای دستگاهی که از سه مؤلفه غیر هم‌توزیع X_3,X_2,X_1 تشکیل شده است و طول عمر دستگاه با توجه به ساختار آن به‌صورت $\tau(X)=\min(X_1,\max(X_2,X_3))$ باشد، آن‌گاه تابع قابلیت اعتماد آن را می‌توان به‌صورت محاسبه کرد:

$$\begin{aligned}\bar{F}_\tau(t)&=\bar{F}(t,t,1)+\bar{F}(t,1,t)-\bar{F}(t,t,t)\\&=\mathbb{C}\,(\bar{F}_1(t),\bar{F}_2(t),1)+\mathbb{C}\left(\bar{F}_1(t),1,\bar{F}_3(t)\right)-\mathbb{C}\left(\bar{F}_1(t),\bar{F}_2(t),\bar{F}_3(t)\right)\\&=:h\big(\bar{F}_1(t)\bar{F}_2(t)\bar{F}_3(t)\big),\end{aligned}$$

که در آن برای همهٔ $p_1,p_2,p_3\in(0,1)$، داریم:

$$h(p_1,p_2,p_3)=\mathbb{C}(p_1,p_2,1)+\mathbb{C}(p_1,1,p_3)-\mathbb{C}(p_1,p_2,p_3).$$

اگر فرض کنیم مؤلفه‌ها هم‌توزیع با تابع توزیع مشترک F باشند آن‌گاه به‌ازای همهٔ $p\in(0,1)$ داریم:

$$h(p)=h(p,p,p)=\mathbb{C}(p,p,1)+\mathbb{C}(p,1,p)-\mathbb{C}(p,p,p).$$

اگر در این حالت، تابع مفصل $\mathbb{C}$ دارای خاصیت تغییر پذیری[8] نیز باشد آن‌گاه تابع h را می‌توان بدین‌صورت بازنویسی کرد:

$$h(p)=2\mathbb{C}(p,p,1)-\mathbb{C}(p,p,p),$$

به‌ویژه، اگر فرض کنیم مؤلفه‌های دستگاه، مستقل نیز باشند آن‌گاه تابع h بدین‌صورت است:

$$h(p)=2p^2-p^3.$$

اکنون در حالت کلی فرض کنید متغیرهای تصادفی وابسته $X_1,\dots,X_n$ بیانگر طول عمر مؤلفه‌های اصلی یک دستگاه با تابع توزیع مشترک F باشند. هم‌چنین فرض کنید متغیرهای تصادفی وابسته $Y_1,\dots,Y_n$ بیان‌گر طول عمر مؤلفه‌های یدکی با تابع توزیع مشترک G باشند. در دو حالت زیر، تابع قابلیت اعتماد طول عمر دستگاه‌های مونتاژ شده بررسی شده است:

---
1. Capula
1. Hoeffding
2. Xiao
3. Wu
4. Sklar
5. Navarro
6. Distorted
8. Exchangeable

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.249]

مونتاژ کردن دستگاه اصلی به‌صورت موازی در سطح مؤلفه‌ها و در سطح دستگاه‌ها:

در این حالت تابع قابلیت اعتماد طول عمر دستگاه مونتاژ شده با افزونگی فعال در سطح مؤلفه‌ها که با $\tau c = \tau(X \vee Y)$ نمایش داده می‌شود بدین‌صورت است:

$$\bar{F}_C(x) = h\left(1 - \left(1 - \bar{F}(t)\right)\left(1 - \bar{G}(t)\right)\right).$$

به‌طور مشابه تابع قابلیت اعتماد طول عمر دستگاه مونتاژ شده با افزونگی فعال در سطح دستگاه‌ها که با $\tau\mathrm{s} = \tau(\mathrm{X}) \vee \tau(\mathrm{Y})$ نمایش داده می‌شود عبارت است از:

$$\bar{F}_S(t) = 1 - h\left(1 - \left(1 - \bar{F}(t)\right)\right) h\left(1 - \left(1 - \bar{G}(t)\right)\right).$$

مونتاژ کردن دستگاه اصلی به‌صورت سری در سطح مؤلفه‌ها و در سطح دستگاه‌ها:

در این حالت تابع قابلیت اعتماد طول عمر دستگاه مونتاژ شده با افزونگی فعال در سطح مؤلفه‌ها که با $\tau_C^* = \tau(\mathrm{X} \wedge \mathrm{Y})$ نمایش داده می‌شود بدین‌صورت است:

$$\bar{F}^*{}_C(t) = h\left(\bar{F}(t)\bar{G}(t)\right),$$

و به‌طور مشابه تابع قابلیت اعتماد طول عمر دستگاه مونتاژ شده با افزونگی فعال در سطح دستگاه‌ها که با $\tau_S^* = \tau(\mathrm{X}) \wedge \tau(\mathrm{Y})$ نمایش داده می‌شود عبارت است از:

$$\bar{F}^*{}_S(t) = h\left(\bar{F}(t)\right) h\left(\bar{G}(t)\right).$$

با توجه به توضیحات ارائه شده، قضیهٔ ۳ که در ارتباط با ترتیب تصادفی معمولی است نشان می‌دهد در اتصال موازی، افزونگی فعال در سطح مؤلفه‌ها بهتر از افزونگی فعال در سطح دستگاه‌ها است.

قضیهٔ ۳. فرض کنید $\tau(\mathrm{X})$ طول عمر یک دستگاه تشکیل شده از مؤلفه‌های وابسته و هم‌توزیع با تابع توزیع مشترک F باشند. هم‌چنین فرض کنید $\tau(\mathrm{Y})$ طول عمر یک دستگاه تشکیل شده از مؤلفه‌های یدکی وابسته و هم‌توزیع با تابع توزیع مشترک G باشند. آن‌گاه برای همه $p_۱, p_۲ \in (0,1)$ داریم:

$$h(p_1 + p_2 - p_1 p_2) \geq h(p_1) + h(p_2) - h(p_1)h(p_2) \Leftrightarrow \tau(\mathrm{X} \vee \mathrm{Y}) \geq_{st} \tau(\mathrm{X}) \vee \tau(\mathrm{Y})$$

مثال زیر شرط بیان شده در قضیهٔ ۳ را بررسی می‌کند.

مثال ۱. فرض کنید$\tau(\mathbf{X}) = \min(X_1, X_2)$ طول عمر دستگاهی باشد که از دو مؤلفه وابسته و هم‌توزیع X_1 و X_2 تشکیل شده است و تابع قابلیت اعتماد آنها با استفاده از تابع مفصل کلیتون-آواکس (CO) بدین‌صورت باشد:

$$\mathbb{C}(p_1, p_2) = \left({p_1}^{1-\theta} + {p_2}^{1-\theta} - 1\right)^{\frac{1}{1-\theta}}$$

که در آن $0 < p_i < 1$ و $\theta > 1$ یک مقدار ثابت است. با قرار دادن $\theta = 2$ تابع h برای دستگاه سری به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$h(p) = \mathbb{C}(p, p) = \frac{p}{2 - p}; \qquad 0 < p < 1,$$

از این‌رو، برای هر $p_1, p_2 \in (۰, 1)$ می‌توان نشان داد:

$$\begin{aligned} &h(p_1 + p_2 - p_1 p_2) - [h(p_1) + h(p_2) - h(p_1)h(p_2)] \\ &= \frac{p_1 + p_2 - p_1 p_2}{2 - (p_1 + p_2 - p_1 p_2)} - \left[\frac{p_1}{2 - p_1} + \frac{p_2}{2 - p_2} - \frac{p_1 p_2}{(2 - p_1)(2 - p_2)}\right] \end{aligned}$$

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.249]

$$
\begin{aligned}
&= \frac{p_1+p_2-p_1p_2}{2-(p_1+p_2-p_1p_2)} - \frac{2p_1+2p_2-3p_1p_2}{(2-p_1)(2-p_2)} \\
&\overset{sgn}{=} (p_1+p_2-p_1p_2)(2-p_1)(2-p_2) - (2p_1+2p_2-3p_1p_2)[2 \\
&\qquad - (p_1+p_2-p_1p_2)] \\
&= (p_1+p_2-p_1p_2)[p_1p_2+4-2(p_1+p_2)] \\
&\qquad - [2(p_1+p_2)-3p_1p_2][2-(p_1+p_2-p_1p_2)] \\
&= -4(p_1+p_2)+6p_1p_2+(p_1+p_2-p_1p_2)(4-2p_1p_2) \\
&= 2p_1p_2(1-p_1)(1-p_2) \geq 0,
\end{aligned}
$$

که نابرابری اخیر نتیجه می‌دهد:

$$\tau(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}) \geq_{st} \tau(\mathbf{X}) \vee \tau(\mathbf{Y})$$

قضیهٔ ۴، نشان می‌دهد در اتصال سری بر حسب ترتیب تصادفی معمولی، افزونگی فعال در سطح دستگاه‌ها بهتر از افزونگی فعال در سطح مؤلفه‌ها است.

قضیهٔ ۴. فرض کنید $\tau(\mathbf{X})$ طول عمر یک دستگاه تشکیل شده از مؤلفه‌های وابسته و هم‌توزیع با تابع توزیع مشترک F باشند. هم‌چنین فرض کنید $\tau(\mathbf{Y})$ طول عمر یک دستگاه تشکیل شده از مؤلفه‌های یدکی وابسته و هم‌توزیع با تابع توزیع مشترک G باشند. آن‌گاه برای همهٔ هر $p_1, p_2 \in (0,1)$ داریم:

$$h(p_1,p_2) \leq h(p_1)h(p_2) \Leftrightarrow \tau^*(\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}) \leq_{st} \tau^*(\mathbf{X}) \wedge \tau^*(\mathbf{Y})$$

مثال ۲ شرط بیان شده در قضیهٔ ۴ بررسی می‌شود.

مثال ۲. فرض کنید $\tau(\mathbf{X}) = \max(X_1, X_2)$ طول عمر دستگاهی باشد که از دو مؤلفه وابسته و هم توزیع X_1 و X_2 تشکیل شده است و تابع قابلیت اعتماد آنها با استفاده از تابع مفصل کلیتون-آواکس (CO) بدین‌صورت باشد:

$$\mathbb{C}\left(p_1, p_2\right) = \left({p_1}^{1-\theta} + {p_2}^{1-\theta} - 1\right)^{\frac{1}{1-\theta}}$$

با قرار دادن $\theta = 2$ و با توجه به نتایج ناوارو و گومیس (۲۰۱۵)، تابع h برای دستگاه‌های موازی بدین‌صورت است:

$$h(p) = \mathbb{C}(p,p) = \frac{p}{2-p}; \qquad p \in (0,1).$$

بنابراین برای هر $p_1, p_2 \in (0,1)$ می‌توان نشان داد:

$$
\begin{aligned}
&h(p_1)h(p_2) - h(p_1)h(p_2) \\
&= \frac{(3-2{p_1}^2)(3p_2-2{p_2}^2)}{(2-p_1)(2-p_2)} - \frac{3p_1p_2-2(p_1p_2)^2}{2-p_1p_2} \\
&= \frac{(3-2p_1)(3-2p_2)}{(2-p_1)(2-p_2)} - \frac{3-2p_1p_2}{2-p_1p_2} \\
&= \left(2-\frac{1}{2-p_1}\right)\left(2-\frac{1}{2-p_2}\right) - \left(2-\frac{1}{2-p_1p_2}\right) \\
&= 2-\frac{2}{2-p_1}-\frac{2}{2-p_2}+\frac{1}{(2-p_1)(2-p_2)}+\frac{1}{2-p_1p_2} \\
&= 2\left(1-\frac{1}{2-p_1}\right)\left(1-\frac{1}{2-p_2}\right)+\frac{1}{2-p_1p_2}-\frac{1}{(2-p_1)(2-p_2)}
\end{aligned}
$$

$$= 2\left(1-\frac{1}{2-p_1}\right)\left(1-\frac{1}{2-p_2}\right)+\frac{2(1-p_1)(1-p_2)}{(2-p_1p_2)(2-p_1)(2-p_2)}$$
$$\geq 0\ ,$$

که نتیجه می‌دهد $\tau^*(\mathbf{X}\wedge\mathbf{Y}) \leq_{st} \tau^*(\mathbf{X})\ \wedge\ \tau^*(\mathbf{Y})$.

قضیهٔ ۵، نشان می‌دهد ترتیب تصادفی نرخ خطر در اتصال سری، افزونگی فعال در سطح دستگاه‌ها بهتر از افزونگی فعال در سطح مؤلفه‌ها است.

قضیهٔ ۵. فرض کنید متغیرهای تصادفی وابسته $X_1,\dots,X_n$ بیان‌گر طول عمر مؤلفه‌های اصلی یک دستگاه با تابع توزیع مشترک F باشند. هم‌چنین فرض کنید $Y_1,\dots,Y_n$ بیان‌گر طول عمر مؤلفه‌های یدکی با تابع توزیع مشترک G باشند. اگر $\frac{ph\prime(p)}{h(p)}$ تابعی نزولی در p باشد، آن‌گاه:

$$\tau^*(\mathbf{X}\wedge\mathbf{Y}) \leq_{hr} \tau^*(\mathbf{X})\ \wedge\ \tau^*(\mathbf{Y})$$

برهان. برای اثبات، به پیوست ۳ مراجعه کنید.

در مثال ۳ نشان داده می‌شود که شرط " $\frac{ph\prime(p)}{h(p)}$ نزولی در $p\in(0,1)$ " برقرار است.

مثال ۳. تحت فرضیات در نظر گرفته شده در مثال ۱، می‌توان نشان داد:

$$\frac{ph'(p)}{h(p)}=\frac{2p^2-8p+6}{2p^2-7p+6}=1-\frac{1}{2p-\frac{6}{p}-7},$$

واضح است $\frac{ph\prime(p)}{h(p)}$ تابعی نزولی در $p\in(0,1)$ است.

مثال ۴. فرض کنید $\tau(\boldsymbol{X})=min\,(X_1,max\,(X_2,X_3))$ طول عمر یک دستگاه متشکل از مؤلفه‌های هم‌توزیع و وابسته X_3 ,X_2, X_1 با تابع توزیع مشترک F باشند. فرض کنید تابع قابلیت اعتماد بردار تصادفی $\boldsymbol{X}$ با استفاده از تابع مفصل فارلی-مورگنشترن بدین‌صورت بیان شود:

$$\mathbb{C}(\bar F(t_1),\bar F(t_2),\bar F(t_3))=\bar F(t_1)\bar F(t_2)\bar F(t_3)[1+\alpha(1-\bar F(t_1))(1-\bar F(t_2))(1-\bar F(t_3))]$$

که در آن $\alpha\epsilon[0,1]$. بنابراین با فرض این‌که برای هر $\bar F(t_i)=p_i\,;\,i=1,2,3$، آن‌گاه تابع قابلیت اعتماد مفصل را می‌توان بدین‌صورت بازنویسی کرد:

$$\mathbb{C}(p_1,p_2,p_3)=p_1p_2p_3[1+\alpha(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)].$$

با توجه به رابطهٔ (۲) تابع تحریف دستگاه عبارت است از:

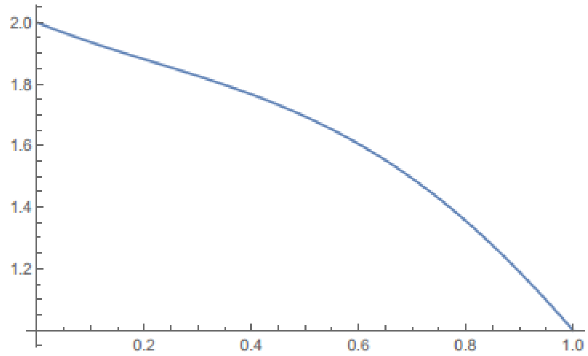
$$h(p)=2\mathbb{C}(p,p,1)-\mathbb{C}(p,p,p)=2p^2-p^3-\alpha p^3(1-p)^3.$$

بنابراین داریم:

$$\frac{ph'(p)}{h(p)}=\frac{4-3p-3\alpha p+12\alpha p^2-15\alpha p^3+6\alpha p^4}{2-p-\alpha p+3\alpha p^2-3\alpha p^3+\alpha p^4}$$

با استفاده از نرم‌افزار *Mathematica* شکل ۱ تابع $\frac{ph'(p)}{h(p)}$ را به ازای $\alpha=0.4$ و همه $p\in(0,1)$ نشان می‌دهد. واضح است که تابع مذکور، نسبت به p نزولی است.

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.249]



شکل ۱. $\frac{ph'(p)}{h(p)}\,; p \in (0,1)$

تذکر ۱. می‌توان نشان داد ترتیب تصادفی نرخ خطر معکوس، مشابه قضیهٔ ۵ و با توجه به مثال ۴٫۱ از مقاله ژائو و همکاران (۲۰۱۵) برای دستگاه های سری برقرار نیست.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، به مقایسهٔ تصادفی دستگاه‌های قابلیت اعتماد، در ارتباط با این‌که افزونگی فعال در سطح مؤلفه‌ها بهتر است یا در سطح دستگاه‌ها، پرداختیم و تحت شرایطی مشخص شد کدام نوع افزونگی می‌تواند وضعیت دستگاه را به معانی مختلف ترتیب‌های تصادفی بهبود بخشد. در ابتدا دستگاه‌های سری، در حالتی که مؤلفه‌های یدکی و اصلی مستقل از هم باشند، بررسی کردیم و نتایجی بر حسب ترتیب تصادفی نرخ خطر و ترتیب تصادفی نرخ خطر معکوس به‌دست آوردیم، سپس در بخش ۳ دستگاه‌های کلی را در حالتی که مؤلفه‌های آنها وابسته باشند در نظر گرفتیم و نتایجی بر حسب ترتیب تصادفی معمولی و ترتیب تصادفی نرخ خطر ارائه شد و تحت یک شرط لازم و کافی مشخص شد چه موقع افزونگی فعال در سطح مؤلفه‌ها و یا چه موقع افزونگی فعال در سطح دستگاه، منجر به افزایش تصادفی طول عمر تصادفی دستگاه می‌شود.

پیوست ۱

اثبات قضیهٔ ۱.

تابع قابلیت اعتماد $\tau(X \vee Y)$ و $\tau(X) \vee \tau(Y)$ به‌ترتیب عبارتند از:

$$\bar{F}_{\tau(X\vee Y)}(x;\boldsymbol{\lambda}) = \prod_{i=1}^{n}\left(1 - F^{2\lambda_i}(x)\right),$$

و

$$\bar{F}_{\tau(X)\vee\tau(Y)}(x;\boldsymbol{\lambda}) = 1 - [1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - F^{2\lambda_i}(x)\right)]^2 .$$

که در آن $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. فرض کنید برای هر $u = F(x), x \in \mathcal{R}^+$. با توجه به تعریف ترتیب تصادفی نرخ خطر کافی است ثابت کنیم تابع

$$\psi(u) = \frac{\prod_{i=1}^{n}\left(1 - u^{2\lambda_i}\right)}{1 - (1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - u^{\lambda_i}))^2}$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{n}\left(1+u^{\lambda_i}\right)\ \prod_{i=۱}^{n}\left(1-u^{\lambda_i}\right)}{2\ \prod_{i=1}^{n}(1-u^{\lambda_i}) - \prod_{i=۱}^{n}(1-u^{\lambda_i})^2}$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{n}\left(1+u^{\lambda_i}\right)}{2-\prod_{i=1}^{n}(1-u^{\lambda_i})}$$

$$=: \xi(u),$$

در $u \in (0,1)$ صعودی است. با مشتق‌گیری از تابع $\xi(u)$، نسبت به u داریم:

$$\xi'(u) \overset{sgn}{=} \prod_{i=1}^{n}\left(1+u^{\lambda_i}\right) \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i\, u^{\lambda_i-1}}{1+u^{\lambda_i}} \times [2-\prod_{i=1}^{n}\left(1-u^{\lambda_i}\right)]$$
$$-\prod_{i=1}^{n}\left(1-u^{\lambda_i}\right) \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i\, u^{\lambda_i-1}}{1-u^{\lambda_i}} \times \prod_{i=1}^{n}\left(1+u^{\lambda_i}\right)$$
$$=^{sgn} \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i\, u^{\lambda_i}}{1+u^{\lambda_i}} \times [2-\prod_{i=1}^{n}\left(1-u^{\lambda_i}\right)] - \prod_{i=1}^{n}\left(1-u^{\lambda_i}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i\, u^{\lambda_i}}{1-u^{\lambda_i}}$$
$$= 2\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i\, u^{\lambda_i}}{1+u^{\lambda_i}} - \prod_{i=1}^{n}\left(1-u^{\lambda_i}\right)\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i\, u^{\lambda_i}}{1+u^{\lambda_i}} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i\, u^{\lambda_i}}{1-u^{\lambda_i}}\right]$$
$$= 2\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i\, u^{\lambda_i}}{1+u^{\lambda_i}} - \prod_{i=1}^{n}\left(1-u^{\lambda_i}\right)\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{2\lambda_i\, u^{\lambda_i}}{1-u^{2\lambda_i}}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{2\lambda_i\, u^{\lambda_i}}{1-u^{2\lambda_i}}\left(1-u^{\lambda_i}\right) - \prod_{i=1}^{n}\left(1-u^{\lambda_i}\right)\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{2\lambda_i\, u^{\lambda_i}}{1-u^{2\lambda_i}}\right]$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{2\lambda_i\, u^{\lambda_i}}{1-u^{۲\lambda_i}}\left[\left(1-u^{\lambda_i}\right) - \prod_{i=1}^{n}\left(1-u^{\lambda_i}\right)\right] \geq 0,$$

بنابراین نتیجه مطلوب، حاصل می شود.

پیوست ۲

اثبات قضیهٔ ۲.

تابع قابلیت اعتماد $\tau(X \vee Y)$ و $\tau(X) \vee \tau(Y)$ به‌ترتیب عبارتند از:

$$\bar{F}_{\tau(X\vee Y)}(x;\lambda_1,\lambda_2) = (1-F^{\lambda_1+\lambda_2}(x))^n$$

و

$$\bar{F}_{\tau(X)\vee\tau(Y)}(x;\lambda_1) = 1-\left(1-\left(1-F^{\lambda_1}(x)\right)^n\right)\left(1-\left(1-F^{\lambda_1}(x)\right)^n\right).$$

فرض کنید برای هر $u = F(x), x \in \mathcal{R}^+$. با توجه به تعریف ترتیب تصادفی نرخ خطر معکوس، کافی است ثابت کنیم:

$$\varphi(u) = \frac{1-\left(1-u^{\lambda_1+\lambda_2}\right)^n}{(1-(1-u^{\lambda_1})^n)(1-(1-u^{\lambda_2})^n)}$$

در $u \in (0,1)$ تابعی صعودی است. با مشتق‌گیری از تابع $\varphi(u)$ نسبت به $u \in (0,1)$، داریم:

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.249]

$$\begin{aligned}\varphi'(u) &=^{sgn} n(\lambda_1+\lambda_2)u^{\lambda_1+\lambda_2-1}\left(1-u^{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-1}\left(1-\left(1-u^{\lambda_1}\right)^n\right)\\ &\times\left(1-\left(1-u^{\lambda_2}\right)^n\right)\\ &-\left[1-\left(1-u^{\lambda_1+\lambda_2}\right)^n\right]\{n\lambda_1u^{\lambda_1-1}\left(1-u^{\lambda_1}\right)^{n-1}\left(1-\left(1-u^{\lambda_2}\right)^n\right)\\ &+n\lambda_2u^{\lambda_2-1}\left(1-u^{\lambda_2}\right)^{n-1}\left(1-\left(1-u^{\lambda_1}\right)^n\right)\}\\ &=^{sgn} (\lambda_1+\lambda_2)u^{\lambda_1+\lambda_2}(1-u^{\lambda_1+\lambda_2})^{n-1}\left(1-\left(1-u^{\lambda_1}\right)^n\right)\\ &\times\left(1-\left(1-u^{\lambda_2}\right)^n\right)\\ &-\left[1-\left(1-u^{\lambda_1+\lambda_2}\right)^n\right]\{\lambda_1u^{\lambda_1}\left(1-u^{\lambda_1}\right)^{n-1}\left(1-\left(1-u^{\lambda_2}\right)^n\right)\\ &+\lambda_2u^{\lambda_2}\left(1-u^{\lambda_2}\right)^{n-1}\left(1-\left(1-u^{\lambda_1}\right)^n\right)\}\\ &=^{sgn} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)u^{\lambda_1+\lambda_2}(1-u^{\lambda_1+\lambda_2})^n}{1-(1-u^{\lambda_1+\lambda_2})^n}-\frac{\lambda_1u^{\lambda_1}\left(1-u^{\lambda_1}\right)^{n-1}}{1-(1-u^{\lambda_1})^n}\\ &-\frac{\lambda_2u^{\lambda_2}\left(1-u^{\lambda_2}\right)^{n-1}}{1-(1-u^{\lambda_2})^n}\\ &=\eta(\lambda_1+\lambda_2)-\eta(\lambda_1)-\eta(\lambda_2)\,,\end{aligned}$$

که در آن $\eta(\lambda)=\frac{\lambda u^{\lambda}\left(1-u^{\lambda}\right)^{n-1}}{1-(1-u^{\lambda})^n}$. به‌راحتی می‌توان نشان داد $\eta(\lambda)$، تابعی محدب در $\lambda>0$ برای همه $u\in(0,1)$ است، از این‌رو، با توجه به این واقعیت که خاصیت محدبی، خاصیت جمع‌پذیری را نتیجه می‌دهد (به کتاب نلسون[1] (۲۰۰۶) صفحه ۱۳۶، مراجعه شود)، داریم:

$$\eta(\lambda_1+\lambda_2)\geq\eta(\lambda_1)+\eta(\lambda_2).$$

بنابراین $\varphi'(x)\geq 0$ است و نتیجه مطلوب برقرار است.

پیوست۳.

اثبات قضیهٔ ۵.

تابع قابلیت اعتماد $\tau^*(X\wedge Y)$ و $\tau^*(X)\wedge\tau^*(Y)$ به‌ترتیب عبارتند از:

$$\bar{F}_C(t)=h\left(\bar{F}(t)\bar{G}(t)\right),$$

و

$$\bar{F}_S(t)=h\left(\bar{F}(t)\right)h\left(\bar{G}(t)\right).$$

نتیجه مطلوب هم ارز این است که نشان دهیم:

$$\Phi(t)=\frac{h\left(\bar{F}(t)\right)h\left(\bar{G}(t)\right)}{h\left(\bar{F}(t)\bar{G}(t)\right)}$$

در $t\in\mathcal{R}^+$ تابعی صعودی است. می‌توان مشاهده کرد که

$$\begin{aligned}\Phi'(t)&\overset{sgn}{=}\left[-f(t)h'\left(\bar{F}(t)\right)h\left(\bar{G}(t)\right)-g(t)h'\left(\bar{G}(t)\right)h\left(\bar{F}(t)\right)\right]h\left(\bar{F}(t)\bar{G}(t)\right)\\ &+[f(t)\bar{G}(t)+g(t)\bar{F}(t)]h'\left(\bar{F}(t)\bar{G}(t)\right)h\left(\bar{F}(t)\right)h\left(\bar{G}(t)\right)\\ &=f(t)h\left(\bar{G}(t)\right)\left[\bar{G}(t)h\left(\bar{F}(t)\right)h'\left(\bar{F}(t)\bar{G}(t)\right)-h'\left(\bar{F}(t)\right)h\left(\bar{F}(t)\bar{G}(t)\right)\right.\\ &\left.+g(t)h\left(\bar{F}(t)\right)\left[\bar{F}(t)h\left(\bar{G}(t)\right)h'\left(\bar{F}(t)\bar{G}(t)\right)-h'\left(\bar{G}(t)\right)h\left(\bar{F}(t)\bar{G}(t)\right)\right]\right.\end{aligned}$$

1. Nelsen

$$\frac{f(t)h(\bar{F}(t))h(\bar{G}(t))h(\bar{F}(t)\bar{G}(t))}{\bar{F}(t)}\left[\frac{\bar{F}(t)\bar{G}(t)h'(\bar{F}(t)\bar{G}(t))}{h(\bar{F}(t)\bar{G}(t))}-\frac{\bar{F}(t)h'(\bar{F}(t))}{h(\bar{F}(t))}\right] \geq 0,$$

که در آن نامنفی بودن نابرابری فوق با توجه به این واقعیت که $\bar{F}(t)\bar{G}(t) \leq \bar{F}(t)$ و $\bar{F}(t)\bar{G}(t) \leq \bar{G}(t)$ و با توجه به فرض قضیه که، $\frac{ph\prime(p)}{h(p)}$ تابعی نزولی در $p \in (0,1)$ است، برقرار می‌شود.

منابع

1. Boland P. J., El-Neweihi E., "Component redundancy versus system redundancy in the hazard rate ordering", IEEE Transactions on Reliability. 44 (1995) 614-619.
2. Boland P. J., El-Neweihi E., Proschan F., "Stochastic order for redundancy allocation in series and parallel systems", Advances in Applied Probability. 24 (1992) 161-171.
3. Da Costa Bueno V., Do Carmo I. M., "Active redundancy allocation for a k-out-of-n:F system of dependent components", European Journal of Operational Research. 176 (2007) 1041-1051.
4. Hoeffding W., "Masstabinvariante Korrelationstheorie", Schriften des Mathematischen Instituts und fur Angewandte Mathematik der Universitat Berlin. 5 (1940) 179-233.
5. Hu T., Wang T., "Optimal allocation of active redundancies of r-out-of-n systems", Journal of Statistical and Planning Inference, 139 (2009) 3733-3737.
6. Laniado H., Lillo R. E., "Allocation policies of redundancies in twoparallel-series and two-series-parallel systems", IEEE Transactions on Reliability. 63 (2014) 223-229.
7. Nanda K. A., Hazra K.N., "Some results on active redundancy at component level versus system level", Operations Research Letters. 41 (2013) 241-245.
8. Navarro J., Águila Y.del., Sordo, Suárez-liorens M. A., "Stochastic ordering properties for systems with dependent identically distributed components", 29 (2012) 264-278.
9. Nelsen R. B., "An introduction to copulas. 2nd edn", Springer Science Business Medical, Inc. New York (2006).
10. Sklar A., "Fonctions de 261epartition á n dimensions et leurs marges. Publications de l'Institut de Applied Stochastic Models in Business and Industry", Statistique de l'Université de Paris. 8 (1959) 229-231.
11. Singh H., Singh R. S., "On allocation of spares at component level versus system level", Journal of Applied Probability, 34 (1997) 283-287.
12. Singh H., Misra H., "On redundancy allocation in systems", Journal of Applied Probability, 31 (1994) 1004-1014.

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.249]

13. Valdés J. E., Zequeira R., "On the optimal allocation of two redundancies in a two-component series system", Operation Research Letter. 34 (2006) 49-52.
14. Valdéz E., Xiao Y., "On the distortion of a copula and its margins", Scandinavian Actuarial Journal. 4 (2006) 292-317.
15. Zhao P., Chan P., Ng H. K. T., "Optimal allocation of redundancies in series systems", European Journal of Operational Research. 220 (2012) 673-683.
16. Wu S., "Construction of asymmetric copulas and its application in two-dimensional reliability modeling", European Journal of Operational Research. 238 (2014) 476-485.

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.249]