Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

The (non-)existence of perfect codes in Lucas cubes

Azam Ghaleh Agha Babai[1], Khadijeh Fathalikhani[2]

1. Department Department of Mathematics, University of Qom, Qom, Iran.

E-mail: a_babai@aut.ac.ir

2. Department of Pure Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, University of Kashan, Kashan, Iran.

✉E-mail: fathalikhani.kh@gmail.com

Article Info

Article type:

Research Article

Article history:

Received:
30 September 2019
Revised form:
18 November 2020
Accepted:
23 November 2020
Published online:
22 November 2022

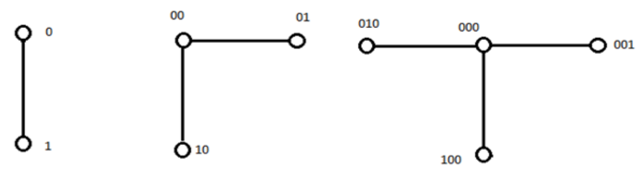
Keywords:
Perfect code;
Fibonacci cube;
Lucas cube.

ABSTRACT

Introduction

A Fibonacci string of length n is a binary string $b_1 \ldots b_n$ with $b_i \cdot b_{i+1} = 0$ for $1 \leq i < n$. In the other words, Fibonacci strings are thus binary strings that contain no consecutive 1s. A Fibonacci string of weight k is a Fibonacci string with precisely k ones. The Fibonacci cube Γ_n, $n \geq 1$, is the graph whose vertices are all the Fibonacci strings of length n, two vertices being adjacent if they differ in precisely one position. This cube was introduced by Hsu in 1993.

Munarini and others, introduced a new graph called the Lucas cube. The Lucas cube Λ_n is obtained from Γ_n by removing vertices that start and end with 1.



Lucas cube Λ_n, for $n = 1, 2, 3$.

A perfect code of a graph is a subset C of its vertex set such that every vertex of graph is either in C or adjacent to precisely one member of C.

The study of codes in graphs which was initiated by Biggs presents a generalization of the problem of the existence of (classical) error-correcting codes. For instance, Hamming codes and Lee codes correspond to codes in the

Cartesian product of complete graphs and cycles, respectively. Also, it is proved that Γ_n admits a perfect code if and only if $n \leq 3$.

Preliminaries and method

In this scheme, first we denote some new subset of vertex set of Λ_n. By $\Lambda_{n,k}$, we denote the vertices of Λ_n of weight k. For $i \in \{0, 1\}$ we denote by $\Lambda_{n,k}^i$ the vertices of $\Lambda_{n,k}$ that start with i. Observe that the vertices of $\Lambda_{n,k}^0$ are of the form 0α, where α is a Lucas string of weight k and length $n = 1$. We calculate that

$$|\Lambda_{n,k}| = \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k},$$
$$|\Lambda_{n,k}^0| = \binom{n-k}{k}, \qquad |\Lambda_{n,k}^1| = \binom{n-k-1}{k-1}.$$

Then, for the proof of the main theorem, we consider two cases, $0^n \notin C$ and $0^n \in C$, where C is a perfect code on Λ_n and we get contradiction for $n > 3$.

Conclusion

The following conclusion was drawn from this research.

- The Lucas cube Λ_n admits a perfect cod if and only if $n \leq 3$.

How to cite: Ghaleh Agha Babai, A., Fathalikhani, KH., (2022) The (non-)existence of perfect codes in Lucas cubes. *Mathematical Researches*, 8 (3), 172-179

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

بررسی وجود کد تام در مکعب لوکاس

اعظم قلعه آقابابایی[1] ✉، خدیجه فتحعلیخانی[2]

۱. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی، دانشکدهٔ علوم پایه، دانشگاه قم، ایران. پست الکترونیکی: a_babai@aut.ac.ir

۲. گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، ایران. پست الکترونیکی: fathalikhani.kh@gmail.com

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۷/۰۸
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۸/۲۸
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۹/۰۳
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۹/۰۱

واژه‌های کلیدی:
کد تام،
مکعب لوکاس،
مکعب فیبوناتچی.

چکیده

مکعب لوکاس Λ_n گرافی است که مجموعه رأس‌های آن همه رشته‌های دودویی به طول n است به طوری که این رشته‌ها دو ۱ متوالی ندارند و مؤلفهٔ ابتدایی و انتهایی آنها هم‌زمان ۱ نیستند. دو رأس از این مجموعه را با یک یال به هم متصل می‌کنیم، هرگاه به‌طور دقیق در یک مؤلفه متفاوت باشند. همچنین یک کد تام از یک گراف زیرمجموعه‌ای از رأس‌های گراف است به‌طوری که هر رأس از گراف یا عضوی از مجموعه کد است و یا به‌طور دقیق با یک عضو از مجموعه کد مجاور است. در این مقاله نشان می‌دهیم که مکعب لوکاس Λ_n تنها برای $n \leq 3$ کد تام دارد.

استناد: قلعه آقابابایی، اعظم؛ فتحعلیخانی، خدیجه؛ (۱۴۰۱). بررسی وجود کد تام در مکعب لوکاس. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۳)، ۱۷۹-۱۷۲.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه

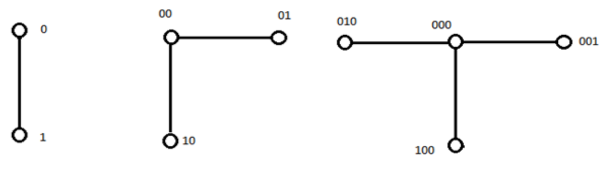
یک رشته فیبوناتچی به طول n یک رشته دودویی $b_1b_2 \ldots b_n$ است به طوری که برای هر $1 \leq i < n$، $b_ib_{i+1} = 0$. به عبارتی رشته‌های فیبوناتچی رشته‌های دودویی هستند که دو ۱ متوالی ندارند. یک رشته فیبوناتچی از وزن k، یک رشته فیبوناتچی است که به‌طور دقیق k تا ۱ دارد. مکعب فیبوناتچی n-بعدی Γ_n که در آن $n \geq 1$، گرافی است که مجموعه رأس‌های آن مجموعه همه رشته‌های فیبوناتچی به طول n است و دو رأس مجاورند اگر و تنها اگر به‌طور دقیق در یک مولفه متفاوت باشند. این مکعب‌ها در سال ۱۹۹۳ توسط هسو[1] تعریف شدند [۷].

در [۱۲] گراف جدیدی به نام مکعب لوکاس تعریف شد. اگر از Γ_n تمام رأس‌هایی که مؤلفهٔ ابتدایی و انتهایی آنها هم‌زمان ۱ هستند را حذف کنیم، زیرگرافی حاصل می‌شود که آن را مکعب لوکاس نامیده و با Λ_n نمایش می‌دهیم. (شکل ۱ را ببینید.) مکعب‌های لوکاس نیز کاربردهای بسیاری دارند. برای مطالعهٔ بیشتر، مراجع [۱،۲،۳،۸،۹] را توصیه می‌کنیم.

یک کد تام از یک گراف، زیرمجموعهٔ C از مجموعه رأس‌های آن است به طوری که هر رأس از گراف یا عضوی از C است و یا به طور دقیق با یک عضو C مجاور است. مطالعهٔ کدها در گراف برای نخستین بار توسط بیگز[2] آغاز شد. او به ارائه کلیاتی از مسأله وجود کدهای کلاسیک پرداخت [۶]. سپس این مفهوم مورد توجه عده زیادی از محققان قرار گرفت. از جمله می‌توان به مقالات [۱۰،۱۳] اشاره کرد که در آن کدها در ضرب مستقیم دورها بررسی شده‌اند. نتایجی از بررسی کدها بر روی ضرب قوی نیز به دست آمده است [۴]. در [۱۱] اثبات شد که کد تام برای گراف‌های دوبخشی کامل با حداقل ۳ رأس وجود ندارد. همچنین در [۵] اثبات شد که کد تام برای مکعب‌های فیبوناچی Γ_n، فقط در حالتی که $n \leq 3$ وجود دارد.

در این مقاله ما وجود کد تام برای مکعب‌های لوکاس را بررسی می‌کنیم. در واقع هدف این مقاله اثبات قضیهٔ زیر است.

قضیهٔ اصلی. کد تام برای مکعب لوکاس Λ_n وجود دارد اگر و تنها اگر $n \leq 3$.



شکل ۱. مکعب Λ_n برای $n = 1, 2, 3$

[1] Hsu
[2] Biggs

نتایج ابتدایی

رأس‌های مکعب لوکاس Λ_n را می‌توان به دو مجموعه افراز کرد: رأس‌هایی که در آن‌ها مؤلفهٔ ابتدایی ۰ است (با ۰ شروع می‌شوند) و رأس‌هایی که در آن‌ها مؤلفه ابتدایی ۱ است (با ۱ شروع می‌شوند). مجموعه نخست را با نماد Λ_n^0 و مجموعه دوم را با Λ_n^1 نمایش می‌دهیم. در حالتی که رأسی با ۰ شروع شود، $n-1$ مولفه پس از ۰ در واقع رشته‌ای در Γ_{n-1} است. بنا براین $\Lambda_n^0 = 0V(\Gamma_{n-1})$. همچنین، در حالتی که رأسی با ۱ شروع شود، آن‌گاه مولفه بعد از آن ۰ است و مؤلفه انتهایی نیز باید ۰ باشد. در نتیجه $\Lambda_n^1 = 10V(\Gamma_{n-3})0$. از این‌رو داریم:

$$V(\Lambda_n) = \Lambda_n^0 \cup \Lambda_n^1 = 0V(\Gamma_{n-1}) \cup 10V(\Gamma_{n-3})0.$$

برای $n \geq 1$ و $0 \leq k \leq n$، منظور از $\Lambda_{n,k}$ مجموعه رأس‌هایی از Λ_n است که شامل k تا ۱ هستند. به شیوهٔ مشابه $\Gamma_{n,k}$ تعریف می‌شود. در حالت خاص داریم:

$$\Gamma_{n,1} = \Lambda_{n,1} = \{10^{n-1}, 010^{n-2}, \dots, 0^{n-1}1\},\ \Gamma_{n,0} = \Lambda_{n,0} = \{0^n\}$$

به این ترتیب،

$$\Lambda_{n,k} = \Lambda_{n,k}^0 \cup \Lambda_{n,k}^1 = 0\Gamma_{n-1,k} \cup 10\Gamma_{n-3,k-1}0.$$

با توجه به تعریف واضح است که هر رأس از $\Lambda_{n,k}$ به طور دقیق با k رأس از $\Lambda_{n,k-1}$ مجاور است. از طرفی طبق تعریف مکعب فیبوناتچی،

$$\left|\Gamma_{n,k}\right| = \binom{n-k+1}{k}.$$

بنا براین

$$\left|\Lambda_{n,k}\right| = \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} = \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k},$$

همچنین

$$\left|\Lambda_{n,k}^0\right| = \binom{n-k}{k}, \qquad \left|\Lambda_{n,k}^1\right| = \binom{n-k-1}{k-1}.$$

قضیهٔ اصلی

با توجه به شکل ۱، بدیهی است که برای مکعب‌های لوکاس Λ_n که در آن‌ها $n \leq 3$، کد تام وجود دارد. حال می‌خواهیم اثبات کنیم که کد تام برای مکعب‌های لوکاس Λ_n که در آنها $n \geq 4$ وجود ندارد. به برهان خلف فرض کنیم C یک کد تام روی Λ_n است.

ادعا می‌کنیم که $0^n \notin C$. به برهان خلف فرض کنیم $0^n \in C$. در این صورت طبق تعریف کد تام و اتصالات مکعب لوکاس داریم $C \cap \Lambda_{n,1} = \emptyset$. فرض کنیم $x \in C \cap \Lambda_{n,2}$. از آن‌جا که به‌طور دقیق دو رأس از $\Lambda_{n,1}$ به x وصل هستند و همچنین همه رأس‌های $\Lambda_{n,1}$ به 0^n متصل هستند، به تناقض می‌رسیم. بنا براین $C \cap \Lambda_{n,2} = \emptyset$ و از این رو نتیجه می‌شود که همه اعضای $\Lambda_{n,2}$ باید به $C \cap \Lambda_{n,3}$ وصل باشند. می‌دانیم که هر رأس از $\Lambda_{n,2}^1$ تنها به رأس‌هایی از $\Lambda_{n,3}^1$ وصل می‌شود. همچنین می‌دانیم هر عضو از $\Lambda_{n,3}^1$ به‌طور دقیق به دو رأس از $\Lambda_{n,2}^1$ وصل است. بنا براین،

$$\left|C \cap \Lambda_{n,3}^1\right| = \frac{\left|\Lambda_{n,2}^1\right|}{2} = \frac{1}{2}\binom{n-3}{1} = \frac{n-3}{2}.$$

از طرفی هر رأس از $C \cap \Lambda_{n,3}^1$ به طور دقیق به یک رأس از $\Lambda_{n,2}^0$ وصل است. پس به تعداد $(n-3)/2$ از رأس‌های $\Lambda_{n,2}^0$ توسط اعضای $C \cap \Lambda_{n,3}^1$ پوشیده می‌شوند و بقیهٔ اعضای آن که تعداد آنها برابر است با

$$\left|\Lambda_{n,2}^0\right| - \frac{n-3}{2} = \frac{(n-3)^2}{2},$$

باید توسط $C \cap \Lambda_{n,3}^0$ پوشیده شوند. اما هر رأس از $\Lambda_{n,3}^0$ به طور دقیق به سه رأس از $\Lambda_{n,2}^0$ وصل است. بنا براین،

$$\left|C \cap \Lambda_{n,3}^0\right| = \frac{(n-3)^2}{6}.$$

درنتیجه $n = 3k$ که در آن k عدد صحیح مثبت است.

حال بقیهٔ رأس‌های $\Lambda_{n,3}^1$ که در C نیستند، باید به اعضای $C \cap \Lambda_{n,4}^1$ وصل باشند. تعداد این رأس‌ها برابر است با

$$\left|\Lambda_{n,3}^1\right| - \frac{n-3}{2} = \frac{n^2 - 10n + 23}{2}.$$

می‌دانیم که هر رأس از $\Lambda_{n,4}^1$ به‌طور دقیق به سه رأس از $\Lambda_{n,3}^1$ وصل است. بنا براین

$$\left|C \cap \Lambda_{n,4}^1\right| = \frac{n^2 - 10n + 23}{6}.$$

چون $n = 3k$، به تناقض می‌رسیم و درنتیجه $0^n \notin C$.

حال چون $0^n \notin C$، پس باید به یک رأس از $C \cap \Lambda_{n,1}$ وصل باشد. از آن‌جا که همهٔ اعضای $\Lambda_{n,1}$ به 0^n وصل هستند پس $\left|C \cap \Lambda_{n,1}\right| = 1$. فرض کنیم $x \in C \cap \Lambda_{n,1}$. با توجه به تعریف مکعب لوکاس x به طور دقیق به $n-3$ رأس از $\Lambda_{n,2}$ وصل است. از طرفی اعضای $\Lambda_{n,1} \setminus \{x\}$ باید به اعضای $C \cap \Lambda_{n,2}$ وصل باشند که چون هر رأس از $\Lambda_{n,2}$ به دو رأس از $\Lambda_{n,1}$ وصل است، بنا براین

$$\left|C \cap \Lambda_{n,2}\right| = \frac{n-1}{2}.$$

تا کنون در مورد اعضای $\Lambda_{n,2}$ می‌دانیم که به تعداد $(n-1)/2$ از آنها به طور مستقیم در C قرار دارند و $n-3$ تا از آنها نیز به x وصل هستند. حال باید بقیهٔ اعضای آن به اعضایی از $C \cap \Lambda_{n,3}$ وصل باشند. تعداد این اعضا برابرند با

$$\left|\Lambda_{n,2}\right| - \frac{n-1}{2} - (n-3) = \frac{n^2-6n+7}{2}.$$

چون هر رأس از $\Lambda_{n,3}$ به سه رأس از $\Lambda_{n,2}$ وصل است، داریم

$$\left|C \cap \Lambda_{n,3}\right| = \frac{n^2-6n+7}{6}.$$

اما مقدار فوق عدد صحیح نیست که این تناقض است. درنتیجه کد تام برای مکعب‌های لوکاس Λ_n، که $n \geq 4$ وجود ندارد.

References

۱. فتحعلیخانی خدیجه، خواص جبری و متریک ابرمکعب و برخی زیرگراف‌های آن، رساله دکتری، دانشگاه کاشان (۱۳۹۴).

۲. فتحعلیخانی خدیجه، اشرفی علی‌رضا، خواص متریک و ترکیبیاتی مکعب‌های فیبوناتچی و لوکاس، مجله محاسبات نرم، سال پنجم، شماره اول، صص ۱۰۱-۷۸، (۱۳۹۵).

۳. فتحعلیخانی خدیجه، اشرفی علی‌رضا، خواص جبری مکعب‌های فیبوناتچی و لوکاس، نشریه ریاضی و جامعه، جلد ۲، شماره ۲، صص ۶۱-۴۳، (۱۳۹۴).

4. Abay-Asmerom G., Hammack R. H., Taylor D. T., "Perfect r-codes in strong products of graphs", Bull. Inst. Combin. Appl., 55 (2009) 66–72.

5. Ashrafi A.R., Azarija J., Babai A., Fathalikhani Kh., Klavžar S.,"The (non-)existence of perfect codes in Fibonacci cubes", Inf. Process. Lett., 116 (2016) 387-390.

6. Biggs N., "Perfect codes in graphs", J. Comb. Theory, Ser. B 15 (1973) 289–296.

7. Hsu W. J., "Fibonacci cubes- a new interconnection technology", IEEE Trans. Parallel Distrib. Syst., 4 (1) (1993) 3–12.

8. Klavžar S., Mollard M., "Cube polynomial of Fibonacci and Lucas cubes", Acta Appl. Math, 117 (2012) 93–105.

9. Klavžar S., Peterin I., "Edge-counting vectors, Fibonacci cubes, and Fibonacci triangle", Publ. Math. Debrecen, 71 (3-4) (2007) 267–278.

10. Klavžar S., Špacapan S., Žerovnik J., "An almost complete description of perfect codes in direct products of cycles", Adv. in Appl. Math., 37 (1) (2006) 2–18.

11. Kratochvíl J., "Perfect codes over graphs", J. Comb. Theory, Ser. B, 40 (1986) 224–228.

12. Munarini E., Perelli Cippo C., Zagaglia Salvi N., "On the Lucas cubes", Fibonacci Quart., 39 (1) (2001) 12–21.

13. Žerovnik J., "Perfect codes in direct products of cycles—a complete characterization", Adv. in Appl. Math. 41(2) (2008) 197–205.