Mathematical Researches
Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554
Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Applications of quadratic D-forms to generalized quadratic forms

Amir Hossein Nokhodkar[1]

1. Department of Pure Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, Univesity of Kashan, Kashan, Iran.

E-mail: a.nokhodkar@kashanu.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received:
1 October 2019
Revised form:
10 October 2020
Accepted:
4 January 2021
Published online:
22 November 2022

Keywords:
Quadratic form;
generalized quadratic form;
division algebra with involution;
right vector space.

ABSTRACT

Introduction

Hermitian forms over division algebras with involution appear as natural extensions of quadratic forms over fields. Since quadratic forms have a simpler nature than hermitian forms, a possible method to study hermitian forms is to associate some quadratic form to a hermitian forms which reflects its important properties. This problem seems to be very difficult in general and is solved in certain special cases (see for example [5], [1], [9], [2], [7] and [8]).

Let (D,σ) be a division algebra with involution of the first kind over a field F and let (V,h) be a hermitian space over (D,σ). In [6], for every F-linear map $\pi:\mathrm{Symd}(D,\sigma)\to F$, a quadratic form $q_{h,\pi}:V\to F$ was associated to h. Using the fact that V is endowed with the structure of a right vector space over D, some basic notions of quadratic forms were generalized in such a way that this additional structure is also taken into account. For this, quadratic D-forms were introduced and their elementary properties were studied. It was shown that the aforementioned form $q_{h,\pi}$ is a quadratic D-form and can be used to classify hermitian forms.

The theory of quadratic forms in characteristic two generalizes into two different theories over division algebras with involution; hermitian forms and generalized quadratic forms (which are equivalent otherwise). Considering this, a natural question is whether there exist analogue applications of quadratic D-forms to generalized quadratic forms over division algebras with involution of the first kind. This is the main object of study of this work. Let (D,σ) be a

division algebra with involution of the first kind over a field F of characteristic two and let (V,φ) be a generalized quadratic space over (D,σ). For every nontrivial F-linear map $p:D/\mathrm{Symd}(D,\sigma)\to F$, we associate a quadratic D-form $q_{\varphi,p}$ to φ. It is shown that if the restriction of p to $\mathrm{Sym}(D,\sigma)/\mathrm{Symd}(D,\sigma)$ is nontrivial, then $q_{\varphi,p}$ determines the isotropy behaviour and the isometry class of φ (see Proposition 2, Corollary 3 and Theorem 4).

Main results

From now on, we fix (D,σ) as a finite dimensional division algebra with involution of the first kind over a field F of characteristic two.

We recall some definitions from [6]. Let V be a finite dimensional right vector space over F. We say that a quadratic form $q:V\to F$ is a *quadratic D-form* if $W^{\perp}$ is a vector space over D for every D-subspace W of V, where

$$W^{\perp}=\{v\in V \mid \mathfrak{b}_q(v,w)=0 \text{ for all } w\in W\}.$$

In this case, we call the pair (V,q) a *quadratic D-space*.

A quadratic D-space (V,q) is called *D-isotropic* if there exists a nonzero vector $v\in V$ such that $q|_{vD}=0$ and D-anisotropic otherwise. We say that (V,q) is *D-metabolic* if (i) q is nonsingular, i.e., $V^{\perp}=\{0\}$; (ii) there exists a totally isotropic D-subspace L of V such that $\dim_D L=\frac{1}{2}\dim_D V$. The subspace L is also called a *D-lagrangian* of (V,q). Let (V,q) and (V',q') be two quadratic D-spaces. We say that q is *D-isometric* to q', denoted by $q\simeq_D q'$, if there is an isomorphism $f:V\to V'$ of right vector spaces over D such that $q'(f(v))=q(v)$ for every $v\in V$.

Set

$$\mathrm{Symd}(D,\sigma)=\{x+\sigma(x)\mid x\in D\}.$$

For $d\in D$, the element $d+\mathrm{Symd}(D,\sigma)$ in the quotient $D/\mathrm{Symd}(D,\sigma)$ will be denoted by $\overline{d}$.

Let V be a finite dimensional right vector space over D. A *generalized quadratic form* on V is a map $\varphi:V\to D/\mathrm{Symd}(D,\sigma)$ satisfying

(i) $\varphi(v\alpha)=\sigma(\alpha)\varphi(v)\alpha$ for all $v\in V$ and $\alpha\in D$;

(ii) there is a hermitian form h_φ on V such that

$$\varphi(u+v)-\varphi(u)-\varphi(v)=\overline{h_\varphi(u,v)} \text{ for all } u,v\in V.$$

The pair (V,φ) is called a *generalized quadratic space* over (D,σ).

According to [3, (1.1)], the form h_φ is uniquely determined by φ. Also,

$$h_\varphi(v,v)=\alpha+\sigma(\alpha),\quad \text{for all } v\in V,$$

where $\alpha\in D$ is any representative of the class $\varphi(v)\in D/\operatorname{Symd}(D,\sigma)$, i.e., $\varphi(v)=\bar{\alpha}$. A generalized quadratic form φ is called *nonsingular* if h_φ is nondegenerate. The form φ is called *isotropic* if $\varphi(v)=\bar{0}$ for some nonzero vector $v\in V$ and *anisotropic* otherwise. A nonsingular generalized quadratic space (V,φ) is called *metabolic* if there exists a *D*-subspace *W* of *V* such that $\dim_D W=\frac{1}{2}\dim_D V$ and $\varphi|_W$ is trivial.

We now fix a nonzero *F*-linear map $p:D/\operatorname{Symd}(D,\sigma)\to F$. Let (V,φ) be a generalized quadratic spaces over (D,σ). Define a map $q_{\varphi,p}:V\to F$ via

$$q_{\varphi,p}(v)=p(\varphi(v)).$$

We call $q_{\varphi,p}$ the *p-invariant* of (V,φ).

Lemma 1. *Let (V,φ) be a generalized quadratic space (D,σ). Then the map $q_{\varphi,p}:V\to F$ is a quadratic D-form with the polar form*

$$\mathfrak{b}_{\varphi,p}(u,v)=p(\overline{h_\varphi(u,v)})\quad \text{for all } u,v\in V.$$

Notation. *We denote by p' the restriction of the map p to the subspace $\operatorname{Sym}(D,\sigma)/\operatorname{Symd}(D,\sigma)$ of $D/\operatorname{Symd}(D,\sigma)$.*

Proposition 2. *Let (V,φ) be a generalized quadratic space over (D,σ). If φ is isotropic then $q_{\varphi,p}$ is D-isotropic. The converse is also true if p' is nontrivial.*

Corollary 3. *Let (V,φ) be a generalized quadratic space over (D,σ). If φ is metabolic then $q_{\varphi,p}$ is D-metabolic. The converse is also true if p' is nontrivial.*

Theorem 4. *Let (V,φ) and (V',φ') be generalized quadratic spaces over . If $\varphi\simeq\varphi'$ then $q_{\varphi,p}\simeq_D q_{\varphi',p}$. The converse is also true if p' is nontrivial.*

How to cite: Nokhodkar, A., (2022) Applications of quadratic D-forms to generalized quadratic forms. *Mathematical Researches*, 8 (3), 206-217

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

کاربردهایی از D-فرم‌های مربعی در فرم‌های مربعی تعمیم‌یافته

امیر حسین نخودکار[۱] ✉

۱. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی محض، دانشکدهٔ علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران. پست الکترونیکی: a.nokhodkar@kashanu.ac.ir

اطلاعات مقاله | **چکیده**

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۷/۰۹
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۷/۱۹
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۰/۱۵
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۹/۰۱

واژه‌های کلیدی:
فرم مربعی،
فرم مربعی تعمیم‌یافته،
جبر تقسیم با برگردان،
فضای برداری راست.

در این مقاله به مطالعهٔ فرم‌های مربعی تعمیم‌یافته روی یک جبر تقسیم با برگردان نوع اول در مشخصهٔ دو می‌پردازیم. برای این منظور به هر فرم مربعی تعمیم‌یافته یک فرم مربعی روی فضای برداری زمینه نسبت می‌دهیم. با توجه به اینکه این فضای برداری به ساختار یک فضای برداری راست روی یک جبر تقسیم مجهز است، نشان می‌دهیم فرم مربعی مذکور را می‌توان برای تعیین ایزوتروپ بودن و نیز رده‌بندی فرم‌های مربعی تعمیم‌یافته به کار برد.

استناد: نخودکار، امیرحسین؛ (۱۴۰۱). کاربردهایی از D-فرم‌های مربعی در فرم‌های مربعی تعمیم‌یافته. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۳)، ۲۱۷-۲۰۶.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱. مقدمه

فرم‌های هرمیتی روی جبرهای تقسیم با برگردان به عنوان تعمیمی طبیعی از فرم‌های مربعی روی میدان‌ها ظاهر می‌شوند. با توجه به این‌که فرم‌های مربعی ماهیتی ساده‌تر نسبت به فرم‌های هرمیتی دارند، یک روش برای مطالعهٔ فرم‌های هرمیتی نسبت دادن یک فرم مربعی به آنهاست به گونه‌ای که خواص مهم آنها را بازتاب دهد. نخستین تلاش‌ها در این رابطه توسط جیکوبسن [۴] انجام شد. وی به هر فرم هرمیتی روی یک گسترش میدانی مربعی جدایی‌پذیر یا یک جبر کواترنیون با برگردان کانونی (در مشخصهٔ مخالف ۲) یک فرم مربعی نسبت داد. با استفاده از این تناظر می‌توان دید فرم‌های هرمیتی روی جبرهای تقسیم با برگردان از درجهٔ کوچکتر یا مساوی ۴ به فرم‌های مربعی تقلیل می‌یابند. اما در حالت کلی، مسأله به این سادگی نیست. در واقع، نسبت دادن یک فرم مربعی روی میدان زمینه به یک فرم هرمیتی روی یک جبر تقسیم با برگردان از درجهٔ دلخواه، به گونه‌ای که خواص مهم آن را بازتاب دهد، مسأله‌ای بسیار دشوار بوده و تنها در حالات بسیار خاصی مطالعه و حل شده است. به عنوان مثال مراجع [۵]، [۱]، [۹]، [۲]، [۷] و [۸] را ببینید.

فرض کنید (D,σ) یک جبر تقسیم با برگردان نوع اول روی میدان F و (V,h) یک فضای هرمیتی روی (D,σ) باشد. در مرجع [۶]، برای هر نگاشت F-خطی $\pi:\mathrm{Sym}(D,\sigma)\to F$، یک فرم مربعی $q_{h,\pi}:V\to F$ به h نسبت داده شد. همچنین با استفاده از این مطلب که V ساختار یک فضای برداری راست روی D دارد، مفاهیم اساسی فرم‌های مربعی به گونه‌ای تعمیم داده شدند که این ساختار اضافه هم مورد استفاده قرار بگیرد. بدین منظور، رده‌ای از فرم‌های مربعی به نام D-فرم‌های مربعی تعریف و خواص ابتدایی آنها بررسی شدند. پس از آن نشان داده شد که فرم $q_{h,\pi}$ مذکور یک D-فرم مربعی بوده و می‌تواند برای رده‌بندی فرم‌های هرمیتی به کار رود.

نظریهٔ فرم‌های مربعی در مشخصهٔ ۲ به دو نظریه مجزا تقسیم می‌شود: فرم‌های دوخطی و فرم‌های مربعی (که در مشخصهٔ مخالف ۲ با هم یکسانند). به طور مشابه، با جایگزینی میدان زمینه با یک جبر تقسیم با برگردان در مشخصهٔ ۲ نیز دو نظریهٔ متفاوت به دست می‌آید: فرم‌های هرمیتی و فرم‌های مربعی تعمیم‌یافته. با توجه به این مطلب، یک مسألهٔ طبیعی این است که آیا D-فرم‌های مربعی را می‌توان برای مطالعهٔ فرم‌های مربعی تعمیم‌یافته در مشخصهٔ ۲ به کار برد؟ هدف از این مقاله مطالعهٔ این مسأله است. به بیان دقیق‌تر، فرض کنید (D,σ) یک جبر تقسیم با برگردان نوع اول روی میدان F از مشخصهٔ ۲ و (V,φ) یک فرم مربعی تعمیم‌یافته روی (D,σ) باشد. برای هر نگاشت F-خطی مانند $p:D/\mathrm{Symd}(D,\sigma)\to F$، یک D-فرم مربعی $q_{\varphi,p}$ را به φ نسبت می‌دهیم. نشان خواهیم داد اگر تحدید p به $\mathrm{Sym}(D,\sigma)/\mathrm{Symd}(D,\sigma)$ نابدیهی باشد، فرم $q_{\varphi,p}$ ایزوتروپ بودن φ را بازتاب داده و ردهٔ ایزومتری آن را مشخص می‌کند (گزارهٔ ۵، نتیجهٔ ۶ و قضیهٔ ۷ را ببینید).

۲. فرم‌های مربعی و D-فرم‌های مربعی

فرض کنید F یک میدان و V یک فضای برداری با بعد متناهی روی F باشد. منظور از یک *فرم مربعی* روی V نگاشتی مانند $q:V\to F$ با خواص زیر است:

الف) برای هر $v \in V$ و هر $\alpha \in F$، $q(\alpha v) = \alpha^2 q(v)$.

ب) نگاشت $b_q : V \times V \to F$ با ضابطهٔ $b_q(u,v) = q(u+v) - q(u) - q(v)$ یک فرم دوخطی است.

در این صورت (V, q) را یک *فضای مربعی* می‌نامیم. فرم b_q را نیز *فرم قطبی* q می‌نامیم.

فرض کنید (V, q) یک فضای مربعی باشد. برای هر زیرفضای W از V قرار می‌دهیم:

$$W^{\perp_q} = \{v \in V \mid b_q(v, w) = 0, \forall w \in W\}.$$

می‌گوییم q *منظم* است هرگاه $V^{\perp_q} = \{0\}$ و *تماماً نامنظم* است هرگاه b_q بدیهی باشد.

فضای مربعی (V, q) را *ایزوتروپ* می‌نامیم هرگاه بردار ناصفر $v \in V$ وجود داشته باشد به طوری‌که $q(v) = 0$. اگر (V, q) ایزوتروپ نباشد آن را *آنیزوتروپ* می‌نامیم. فضای مربعی منظم (V, q) را *متابولیک* می‌نامیم هرگاه زیرفضای W از V وجود داشته باشد به طوری‌که $\dim_D W = \frac{1}{2}\dim_D V$ و $q|_W = 0$. دو فضای مربعی (V, q) و (V', q') را *ایزومتر* می‌نامیم هرگاه یکریختی فضاهای برداری $f : V \to V'$ وجود داشته باشد که برای هر $v \in V$، $q'(f(v)) = q(v)$.

فرض کنید D یک جبر تقسیم مرکزی با بعد متناهی روی میدان F و V یک فضای برداری راست با بعد متناهی روی D باشد. در این صورت V را می‌توان به عنوان یک فضای برداری روی F نیز در نظر گرفت. فرض کنید $q : V \to F$ یک فرم مربعی باشد. می‌گوییم q یک *D-فرم مربعی* است هرگاه برای هر D-زیرفضای W از V، $W_q^{\perp}$ نیز یک D-زیرفضای V باشد. در این حالت (V, q) را یک *D-فضای مربعی* می‌نامیم. می‌گوییم (V, q)، *D-ایزوتروپ* است هرگاه بردار ناصفر $v \in V$ وجود داشته باشد به طوریکه $q|_{vD} = 0$. چنین برداری را یک بردار *D-ایزوتروپ* برای (V, q) می‌نامیم. اگر (V, q)، D-ایزوتروپ نباشد آن را *D-آنیزوتروپ* می‌نامیم. همچنین می‌گوییم فضای (V, q)، *D-متابولیک* است هرگاه q منظم بوده و D-زیرفضای L از V وجود داشته باشد به طوریکه $\dim_D L = \frac{1}{2}\dim_D V$ و $q|_L = 0$. چنین زیرفضایی را یک *D-لاگرانژین* برای (V, q) می‌نامیم. دو D-فضای مربعی (V, q) و (V', q') را *D-ایزومتر* می‌نامیم اگر یک یکریختی فضاهای برداری راست روی D مانند $f : V \to V'$ وجود داشته باشد به طوریکه برای هر $v \in V$، $q'(f(v)) = q(v)$. واضح است که D-ایزوتروپ و D-متابولیک بودن تحت D-ایزومتری حفظ می‌شوند.

۳. فرم‌های مربعی تعمیم‌یافته

فرض کنید F یک میدان و A یک جبر سادهٔ مرکزی روی F باشد. منظور از یک *برگردان* روی A نگاشتی است مانند $\sigma : A \to A$ که در شرایط زیر صدق می‌کند:

الف) برای هر $x, y \in A$، $\sigma(x+y) = \sigma(x) + \sigma(y)$.

ب) برای هر $x, y \in A$، $\sigma(xy) = \sigma(y)\sigma(x)$.

ج) برای هر $x \in A$، $\sigma^2(x) = x$.

اگر $\sigma|_F = \mathrm{id}$، آن را از *نوع اول* و در غیر این صورت آن را از *نوع دوم* می‌نامیم.

فرض کنید $(V,\mathfrak{b})$ یک فضای دوخطی ناتبهگون روی میدان F و $\mathrm{End}_F(V)$ جبر درون‌ریختی‌های V باشد. برگردان یکتای $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{b}}$ روی $\mathrm{End}_F(V)$ که برای هر $x,y\in V$ و هر $f\in\mathrm{End}_F(V)$ در رابطهٔ

$$\mathfrak{b}(x,f(y))=\mathfrak{b}(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{b}}(f)(x),y)$$

صدق می‌کند را *برگردان الحاقی* $\mathrm{End}_F(V)$ نسبت به $\mathfrak{b}$ می‌نامیم.

گیریم (A,σ) یک F-جبر با برگردان نوع اول باشد. می‌گوییم σ *همتافته* است هرگاه برای هر میدان شکافندهٔ L از A و هر یکریختی

$$(A,\sigma)_L\simeq(\mathrm{End}_L(V),\mathrm{Ad}_{\mathfrak{b}}),$$

فرم دوخطی $\mathfrak{b}$ متناوب باشد (یعنی برای هر $v\in V$، $\mathfrak{b}(v,v)=0$). درغیر این صورت σ *متعامد* نامیده می‌شود (گزارهٔ ۱.۲ از [۵] را ببینید).

فرض کنید (D,σ) یک F-جبر تقسیم با برگردان نوع اول و V یک فضای برداری راست با بعد متناهی روی D باشد. منظور از یک *فرم هرمیتی* روی V نگاشتی است دوجمعی مانند

$$h:V\times V\to D,$$

که برای هر $u,v\in V$ و هر $d_1,d_2\in D$ در روابط زیر صدق می‌کند:

$$h(ud_1,vd_2)=\sigma(d_1)h(u,v)d_2,$$

$$h(v,u)=\sigma(h(u,v)).$$

فرض کنید (A,σ) یک F-جبر با برگردان باشد. قرار دهید:

$$\mathrm{Sym}(A,\sigma)=\{a\in A\mid\sigma(a)=a\},$$

$$\mathrm{Symd}(A,\sigma)=\{a+\sigma(a)\mid a\in A\}.$$

واضح است که $\mathrm{Symd}(A,\sigma)\subseteq\mathrm{Sym}(A,\sigma)$.

نمادگذاری. در ادامهٔ این مقاله منظور از F یک میدان از مشخصهٔ ۲ و (D,σ) یک جبر تقسیم مرکزی از بعد متناهی با برگردان نوع اول روی F است. برای هر $d\in D$، عنصر $d+\mathrm{Symd}(D,\sigma)\in D/\mathrm{Symd}(D,\sigma)$ را با $\overline{d}$ نمایش می‌دهیم.

فرض کنید V یک فضای برداری راست با بعد متناهی روی D باشد. منظور از یک *فرم مربعی تعمیم‌یافته* روی V نگاشتی مانند $\varphi:V\to D/\mathrm{Symd}(D,\sigma)$ است به‌طوریکه

الف) برای هر $v\in V$ و هر $\alpha\in D$، $\varphi(v\alpha)=\sigma(\alpha)\varphi(v)\alpha$.

ب) فرم هرمیتی $h_\varphi:V\times V\to D$ وجود دارد به طوریکه برای هر $u,v\in V$

$$\varphi(u+v)-\varphi(u)-\varphi(v)=\overline{h_\varphi(u,v)}.$$

در این حالت، زوج (V,φ) یک *فضای مربعی تعمیم‌یافته* روی (D,σ) نامیده می‌شود. بنابر لم ۱.۱ از [۳]، فرم h_φ به طور یکتا توسط φ مشخص می‌شود. همچنین برای هر $v\in V$ داریم

$$h_\varphi(v,v)=\alpha+\sigma(\alpha),$$

که در آن $\alpha\in D$ نماینده‌ای دلخواه از ردهٔ $\varphi(v)\in D/\mathrm{Symd}(D,\sigma)$ است، یعنی $\varphi(v)=\bar{\alpha}$. فرم شبه مربعی φ را *منظم* می‌نامیم هرگاه h_φ ناتبهگون باشد. همچنین φ *تماماً نامنظم* خوانده می‌شود اگر h_φ بدیهی باشد.

فرض کنید (V,φ) یک فضای مربعی تعمیم‌یافته روی (D,σ) باشد. بردار ناصفر $v\in V$ را یک بردار *ایزوتروپ* برای φ می‌نامیم هرگاه $\varphi(v)=\bar{0}$. می‌گوییم φ *ایزوتروپ* است هرگاه حداقل یک بردار ایزوتروپ $v\in V$ وجود داشته باشد. در غیر این صورت φ را *آنیزوتروپ* می‌نامیم. فضای شبه مربعی (V,φ) *متابولیک* نامیده می‌شود هرگاه D-زیرفضای W از V وجود داشته باشد به طوریکه $\dim_D W=\frac{1}{2}\dim_D V$ و $\varphi|_W=0$. برای عناصر $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in D$، فضای شبه مربعی (D^n,φ) که توسط رابطهٔ

$$\varphi((d_1,\cdots,d_n))=\sum_{i=1}^{n}\overline{\sigma(d_i)\alpha_i d_i},$$

تعریف می‌شود را با نماد $\langle\overline{\alpha_1},\cdots,\overline{\alpha_n}\rangle_{(D,\sigma)}$ نمایش می‌دهیم.

نمادگذاری. در ادامهٔ این مقاله، $p:D/\mathrm{Symd}(D,\sigma)\to F$ یک نگاشت F-خطی ناصفر است.

تعریف. فرض کنید (V,φ) یک فضای مربعی تعمیم‌یافته روی (D,σ) باشد. نگاشت $q_{\varphi,p}:V\to F$ با ضابطهٔ

$$q_{\varphi,p}(v)=p(\varphi(v)),$$

را *ناوردای* p فضای (V,φ) می‌نامیم.

لم ۱. *فرض کنید (V,φ) یک فضای مربعی تعمیم‌یافته روی (D,σ) باشد. در این صورت نگاشت $q_{\varphi,p}:V\to F$ یک D-فرم مربعی با فرم قطبی $\mathfrak{b}_{\varphi,p}(u,v)=p(\overline{h_\varphi(u,v)})$ است.*

اثبات. به وضوح برای هر $a\in F$ و هر $v\in V$ داریم $q_{\varphi,p}(av)=a^2q_{\varphi,p}(v)$. فرض کنید $\mathfrak{b}_{\varphi,p}:V\times V\to F$ نگاشتی باشد که به صورت $\mathfrak{b}_{\varphi,p}(u,v)=q_{\varphi,p}(u+v)-q_{\varphi,p}(u)-q_{\varphi,p}(v)$ تعریف می‌شود. برای هر $u,v\in V$ داریم

$$\mathfrak{b}_{\varphi,p}(u,v)=p(\varphi(u+v)-\varphi(u)-\varphi(v))=p(\overline{h_\varphi(u,v)}).$$

واضح است که $\mathfrak{b}_{\varphi,p}$ یک فرم دوخطی روی F است که نتیجه می‌دهد $q_{\varphi,p}$ یک فرم مربعی است.

حال نشان می‌دهیم $q_{\varphi,p}$ یک D-فرم مربعی است. گیریم W یک D-زیرفضا از V و $w\in W^{\perp_{q_{\varphi,p}}}$ عنصری دلخواه باشد. باید ثابت کنیم برای هر $d\in D$، $wd\in W^{\perp_{q_{\varphi,p}}}$. فرض کنید $d\in D$ و $v\in W$. اگر $h_\varphi(w,v)=0$ آنگاه

$$\mathfrak{b}_{\varphi,p}(wd,v)=p(\overline{h_\varphi(wd,v)})=p(\overline{\sigma(d)h_\varphi(w,v)})=0.$$

در غیر این صورت، با قرار دادن $d'=h_\varphi(w,v)^{-1}h_\varphi(v,w)d\in D$ داریم

$$\mathfrak{b}_{\varphi,p}(wd,v)=p(\overline{\sigma(d)h_\varphi(w,v)})=p(\overline{\sigma(d')h_\varphi(v,w)})=p(\overline{h_\varphi(vd',w)})=\mathfrak{b}_{\varphi,p}(vd',w)=0.$$

بنابراین برای هر $d\in D$ و هر $v\in W$، $\mathfrak{b}_{\varphi,p}(wd,v)=0$، که حکم را ثابت می‌کند.

لم ۲. *فرض کنید (V,φ) یک فضای مربعی تعمیم یافته روی (D,σ) باشد و $u,v\in V$. در این صورت $h_\varphi(u,v)=0$ اگر و تنها اگر $u\in(vD)^{\perp_{q_{\varphi,p}}}$.*

اثبات. اگر $h_\varphi(u,v)=0$، آنگاه برای هر $d\in D$، $\mathfrak{b}_{\varphi,p}(u,vd)=p(\overline{h_\varphi(u,vd)})=0$، یعنی $u\in(vD)^{\perp_{q_{\varphi,p}}}$. برعکس، فرض کنید $h_\varphi(u,v)\neq 0$. عنصر $x\in D$ را چنان انتخاب کنید که $p(\bar{x})\neq 0$ و قرار دهید $d=h_\varphi(u,v)^{-1}x$. در این صورت $\mathfrak{b}_{\varphi,p}(u,vd)=p(\overline{h_\varphi(u,v)d})=p(\bar{x})\neq 0$. بنابراین $u\notin(vD)^{\perp_{q_{\varphi,p}}}$.

نتیجهٔ ۳. *فرض کنید (V,φ) یک فضای مربعی تعمیم‌یافته روی (D,σ) باشد. در این صورت φ منظم (تماماً نامنظم) است اگر و تنها اگر $q_{\varphi,p}$ منظم (تماماً نامنظم) باشد.*

اثبات. حکم از لم ۲ نتیجه می‌شود.

۴. کاربردهایی از ناوردای p

در این بخش نشان می‌دهیم ناوردای p را می‌توان برای رده‌بندی فرم‌های مربعی تعمیم‌یافته به کار برد.

لم ۴. *فرض کنید (A,τ) یک جبر سادهٔ مرکزی با برگردان نوع اول روی میدان F و S یک F-زیرفضا از A باشد. فرض کنید عنصر $x\in S\setminus\mathrm{Symd}(A,\tau)$ وجود دارد به طوری‌که برای هر $y\in A$،*

$$\tau(y)xy\in S. \tag{۱}$$

در این صورت $\mathrm{Sym}(A,\tau)\subseteq S$.

اثبات. ابتدا فرض کنید τ متعامد باشد. با گسترش اسکالر به یک میدان شکافنده برای A، کافی است حکم را در حالتی ثابت کنیم که $(A,\tau)=(M_n(F),t)$، که در آن t برگردان ترانهاده روی جبر ماتریس‌های $M_n(F)$ است. فرض کنید $e_{ij}\in M_n(F)$ ماتریسی باشد که درایهٔ ij آن 1 و سایر درایه‌های آن صفر هستند. ادعا می کنیم برای $i=1,\cdots,n$، $a_i\in F$ و $y_i\in A$ وجود دارند به طوریکه

$$e_{ii}=a_i\tau(y_i)xy_i. \tag{۲}$$

فرض کنید $x=\sum_{i,j}x_{ij}e_{ij}$، که در آن برای $i,j=1,\cdots,n$، $x_{ij}\in F$. اگر r موجود باشد که $x_{rr}\neq 0$، با قرار دادن $a_i=x_{rr}^{-1}\in F$ و $y_i=e_{ri}\in A$ داریم

$$a_i\tau(y_i)xy_i=x_{rr}^{-1}e_{ir}xe_{ri}=x_{rr}^{-1}x_{rr}e_{ii}=e_{ii},\ i=1,\cdots,n,$$

و ادعا ثابت می‌شود. در غیر این صورت برای هر i، $x_{ii}=0$. توجه کنید که $\mathrm{Symd}(A,\tau)$ مجموعهٔ همهٔ ماتریس‌های متقارن در $M_n(F)$ است که قطر اصلی آنها صفر است. بنابراین شرط $x\notin\mathrm{Symd}(A,\tau)$ نتیجه می‌دهد r و s وجود دارد که $x_{rs}\neq x_{sr}$. برای $i=1,\cdots,n$، قرار دهید $y_i=e_{ri}+e_{si}\in A$ و $a_i=(x_{rs}+x_{sr})^{-1}\in F$. در این صورت $a_i\tau(y_i)xy_i=(x_{rs}+x_{sr})^{-1}(e_{ir}+e_{is})x(e_{ri}+e_{si})=(x_{rs}+x_{sr})^{-1}(x_{rs}e_{ii}+x_{sr}e_{ii})=e_{ii}$، که ادعا را ثابت می‌کند.

فرض کنید $I_n\in M_n(F)$ ماتریس همانی باشد. با استفاده از روابط (۱) و (۲) داریم

$$I_n=\sum_{i=1}^{n}e_{ii}=\sum_{i=1}^{n}a_i\tau(y_i)xy_i\in S.$$

همچنین (۱) نتیجه می‌دهد برای هر $y \in A$،

$$\tau(y)I_n y = \tau(y)(\sum_{i=1}^{n} a_i \tau(y_i)xy_i)y = \sum_{i=1}^{n} a_i \tau(y_i y)xy_i y \in S.$$

بنابراین لم ۴.۵ از [۶] نتیجه می‌دهد $\mathrm{Symd}(A,\tau) \subseteq S$. توجه کنید که با استفاده از (۱) و (۲)، مجموعهٔ S همهٔ ماتریس‌های قطری را در بر دارد، پس $\mathrm{Sym}(A,\tau) \subseteq S$.

حال فرض کنید τ همتافته باشد. عنصر وارون‌پذیر $u \in \mathrm{Sym}(A,\tau) \setminus \mathrm{Symd}(A,\tau)$ را چنان انتخاب کنید که $\tau(u) = u$ و قرار دهید $\tau' = \mathrm{Int}(u) \circ \tau$. بنابر گزارهٔ ۷.۲ از [۵]، τ' یک برگردان متعامد روی A است و

$$\mathrm{Sym}(A,\tau') = u \cdot \mathrm{Sym}(A,\tau), \quad \mathrm{Symd}(A,\tau') = u \cdot \mathrm{Symd}(A,\tau).$$

قرار دهید $S' = u \cdot S \subseteq A$ و $x' = ux \in S'$. در این صورت $x' \notin \mathrm{Symd}(A,\tau')$، زیرا $x \notin \mathrm{Symd}(A,\tau)$. با استفاده از رابطهٔ (۱) برای هر $y \in A$ داریم

$$\tau'(y)x'y = (u\tau(y)u^{-1})(ux)y = u\tau(y)xy \in u \cdot S = S'.$$

استدلال حالت متعامد نشان می‌دهد $\mathrm{Sym}(A,\tau') \subseteq S'$، بنابراین $\mathrm{Sym}(A,\tau) \subseteq S$.

نمادگذاری. تحدید p به زیرفضای $\mathrm{Sym}(D,\sigma)/\mathrm{Symd}(D,\sigma)$ از $D/\mathrm{Symd}(D,\sigma)$ را با p' نمایش می‌دهیم.

گزاره ۵. *فرض کنید (V,φ) یک فضای مربعی تعمیم‌یافته روی (D,σ) باشد. اگر φ ایزوتروپ باشد آن‌گاه $q_{\varphi,p}$، D-ایزوتروپ است. اگر p' نابدیهی باشد، عکس این موضوع نیز صحیح است. به بیان دقیق‌تر، اگر p' نابدیهی باشد، هر بردار D-ایزوتروپ از $q_{\varphi,p}$ یک بردار ایزوتروپ برای φ است.*

اثبات. به وضوح هر بردار ایزوتروپ φ یک بردار D-ایزوتروپ برای $q_{\varphi,p}$ است. بر عکس، فرض کنید p' نابدیهی بوده و بردار ناصفر $v \in V$ موجود است که $q_{\varphi,p}|_{vD} = 0$. عنصر $\alpha \in D$ را چنان انتخاب کنید که $\varphi(v) = \bar{\alpha}$. فرض کنید $\bar{\alpha} \neq \bar{0}$، یعنی $\alpha \notin \mathrm{Symd}(D,\sigma)$. قرار دهید

$$S = \{d \in D \mid p(\bar{d}) = 0\}.$$

در این صورت S یک زیرفضا از D شامل α است. برای هر $d \in D$ تساوی $q_{\varphi,p}(vd) = 0$ نتیجه می‌دهد $p(\overline{\sigma(d)\alpha d}) = 0$. بنابراین برای هر $d \in D$، $\sigma(d)\alpha d \in S$. طبق لم ۱ نتیجه می‌گیریم $Sym(D,\sigma) \subseteq S$ که با نابدیهی بودن p' تناقض دارد.

نتیجه ۶. *فرض کنید (V,φ) یک فضای مربعی تعمیم‌یافته روی (D,σ) باشد. اگر φ متابولیک باشد، فرم $q_{\varphi,p}$، D-متابولیک است. در صورتیکه p' نابدیهی باشد، عکس این موضوع نیز صحیح است.*

اثبات. حکم به سادگی از گزارهٔ ۵ و نتیجهٔ ۳ به دست می‌آید.

تذکر. اگر p' بدیهی باشد، عکس گزارهٔ ۵ و نتیجهٔ ۶ در حالت کلی درست نیست. به عنوان مثال، فرض کنید Q یک جبر تقسیم کواترنیون روی F با پایهٔ کواترنیون $(1,i,j,k)$ باشد، یعنی

$$i^2 + i \in F, \quad j^2 \in F^{\times}, \quad k = ij = ji + j.$$

گیریم γ برگردان کانونی روی Q باشد. بنابراین برای هر $x \in Q$، $\gamma(x) = \mathrm{Trd}_Q(x) - x$، که در آن $\mathrm{Trd}_Q(x)$ رد تحویل‌یافتهٔ[1] x در Q است. فرم مربعی تعمیم‌یافتهٔ دوبعدی $\varphi := \langle \bar{i}, \bar{j} \rangle_{(Q,\gamma)}$ با پایهٔ (u,v) را در نظر بگیرید که در آن

$$\varphi(u) = \bar{i}, \quad \varphi(v) = \bar{j}, \quad h_\varphi(u,v) = 0.$$

توجه کنید که برای هر $d \in Q$ داریم $\gamma(d)jd \in \mathrm{Sym}(Q,\gamma)$. با توجه به این‌که $i \notin \mathrm{Sym}(Q,\gamma)$، عنصر $d \in Q$ وجود ندارد که $\varphi(u+vd) = \bar{0}$. بنابراین φ آنیزوتروپ است. از طرفی، اگر p' بدیهی باشد برای هر $d \in D$،

$$q_{\varphi,p}(vd) = p(\varphi(vd)) = p(\overline{\gamma(d)jd}) = 0.$$

پس v یک بردار D-ایزوتروپ $q_{\varphi,p}$ است که نشان می‌دهد $q_{\varphi,p}$، D-ایزوتروپ و در نتیجه D-متابولیک است.

قضیهٔ ۷. *فرض کنید (V,φ) و (V',φ') دو فضای مربعی تعمیم‌یافته روی (D,σ) باشند. اگر $\varphi \simeq \varphi'$ آن‌گاه $q_{\varphi,p} \simeq_D q_{\varphi',p}$. اگر p' نابدیهی باشد، عکس این موضوع نیز صحیح است.*

اثبات. اگر $f : (V,\varphi) \simeq (V',\varphi')$ یک ایزومتری باشد، آن‌گاه f یک یکریختی فضاهای برداری راست روی D است که برای هر $v \in V$ در رابطهٔ

$$q_{\varphi',p}(f(v)) = p(\varphi'(f(v)) = p(\varphi(v)) = q_{\varphi,p}(v),$$

صدق می‌کند. بنابراین $f : (V, q_{\varphi,p}) \to (V', q_{\varphi',p})$ یک D-ایزومتری است. برعکس، فرض کنید p' نابدیهی و یک D-ایزومتری $f : (V, q_{\varphi,p}) \simeq_D (V', q_{\varphi',p})$ موجود باشد. ثابت می‌کنیم $f : (V,\varphi) \to (V',\varphi')$ یک ایزومتری است. از آن‌جا که $f : V \to V'$ یک یکریختی فضاهای برداری راست روی D است، کافی است ثابت کنیم برای هر $v \in V$، $\varphi'(f(v)) = \varphi(v)$. تساوی‌های $p(\varphi'(f(v)) = q_{\varphi',p}(f(v)) = q_{\varphi,p}(v) = p(\varphi(v))$ نتیجه می‌دهد برای هر $v \in V$،

$$\varphi'(f(v)) - \varphi(v) \in \ker p. \tag{۳}$$

فرض کنید بردار $v \in V$ وجود دارد که $\varphi'(f(v)) \neq \varphi(v)$. عنصر $x \in D$ را چنان انتخاب کنید که $\varphi'(f(v)) - \varphi(v) = \bar{x}$. قرار دهید $S = \{d \in D \mid p(\bar{d}) = 0\}$. بنابر (۳) برای هر $d \in D$ داریم

$$\tau(d)\bar{x}d = \tau(d)(\varphi'(f(v)) - \varphi(v))d = \varphi'(f(vd)) - \varphi(vd) \in \ker p.$$

بنابراین $\tau(d)xd \in S$ برای هر $d \in D$. با توجه به اینکه $\bar{x} \neq \bar{0}$، داریم $x \notin \mathrm{Symd}(A,\tau)$. از لم ۴ نتیجه می‌شود $\mathrm{Sym}(D,\sigma) \subseteq \ker p$، که تناقض با $p' \neq 0$ دارد. پس برای هر $v \in V$، $\varphi'(f(v)) = \varphi(v)$ که حکم را ثابت می‌کند.

تذکر. عکس قضیهٔ ۷ در حالتی که p' بدیهی است برقرار نیست. به عنوان مثال، فرض کنید (Q,γ) یک جبر کواترنیون با برگردان کانونی روی F و $(1,i,j,k)$ یک پایهٔ کواترنیون برای Q باشد. فرم‌های مربعی تعمیم‌یافتهٔ یک بعدی

$$\varphi = \langle i \rangle^{\varphi}_{(Q,\gamma)}, \quad \varphi' = \langle i+j \rangle^{\varphi}_{(Q,\gamma)},$$

با پایه‌های u و u' را در نظر بگیرید. فرض کنید p' بدیهی باشد. در این صورت برای هر $d \in D$، $p(\overline{\gamma(d)jd}) = 0$. بنابراین $q_{\varphi,p}(ud) = q_{\varphi',p}(u'd)$ برای هر $d \in D$، یعنی $q_{\varphi,p} \simeq_D q_{\varphi',p}$. اما $\varphi \not\simeq \varphi'$، زیرا در غیر این صورت

[1] Reduced trace

$d \in D$ وجود خواهد داشت که $\sigma(d)id = i + j$. اگر نرم تحویل‌یافتهٔ دو طرف را حساب کنیم نتیجه می‌شود

$$\mathrm{Nrd}_Q(d)^2\,\mathrm{Nrd}_Q(i) = \mathrm{Nrd}_Q(i + j). \qquad (۴)$$

محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد $\mathrm{Nrd}_Q(i + j) = \mathrm{Nrd}_Q(i) + \mathrm{Nrd}_Q(j)$. قرار دهید $y = (\mathrm{Nrd}_Q(d)+1)i + j \in Q$. از (۴) نتیجه می‌گیریم $\gamma(y)y = 0$، که تناقض با فرض جبر تقسیم بودن Q دارد.

References

1. Bayer-Fluckiger E., Parimala R., Quéguiner-Mathieu A., “Pfister involutions”, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci., 113 (2003), no. 4, 365–377.

2. Dolphin A., “Orthogonal Pfister involutions in characteristic two”, J. Pure Appl. Algebra, 218 (2014), no. 10, 1900–1915.

3. Elomary M. A., Tignol J.-P., “Classification of quadratic forms over skew fields of characteristic 2”, J. Algebra, 240 (2001), no. 1, 366–392.

4. Jacobson N., “A note on hermitian forms”, Bull. Amer. Math. Soc. 46 (1940), 264–268.

5. Knus M.-A., Merkurjev A. S., Rost M., Tignol J.-P., “The book of involutions”, American Mathematical Society Colloquium Publications, 44. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

6. Nokhodkar A.-H., “Quadratic *D*-forms with applications to hermitian forms”, J. Pure Appl. Algebra, to appear.

7. Nokhodkar A.-H., “Isotropy of orthogonal involutions in characteristic two”, J. Algebra Appl., 17 (2018), no. 12, 1850240, 8 pp.

8. Nokhodkar A.-H., “Orthogonal involutions and totally singular quadratic forms in characteristic two”, Manuscripta Math. 154 (2017), no. 3-4, 429–440.

9. Sivatski A. S., “Applications of Clifford algebras to involutions and quadratic forms”, Comm. Algebra, 33 (2005), no. 3, 937–951 .