Kharazmi University

Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Hessian Stochastic Ordering in the Family of multivariate Generalized Hyperbolic Distributions and its Applications

Mehdi Amiri[1], Ahad Jamalizadeh[2], Salman Izadkhah[3]

1. Department of Statistics, Faculty of Basic Sciences, University of Hormozgan, Bandarabbas, Iran.

E-mail: m.amiri@hormozgan.ac.ir

2. Department of Statistics, Faculty of Mathematics and Computer, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran. E-mail: a.jamalizadeh@uk.ac.ir

3. Department of Statistics, Campus of Bijar, University of Kurdistan, Bijar, Iran.

E-mail: s.izadkhah@uok.ac.ir

Article Info

Article type:

Research Article

Article history:

Received:
22 October 2019
Revised form:
5 March 2020
Accepted:
31 May 2020
Published online:
14 April 2022

Keywords:

Hessian ordering;
Convex cone;
Linear convex ordering;
Generalized hyperbolic distribution.

ABSTRACT

Introduction

It is naturally useful to compare two normally or elliptically symmetric distributed random vectors by some stochastic orders. Stochastic orderings of multivariate normal random vectors have been carried out by Mosler (1984), Scarsini (1998), Müller (2001) and Arlotto and Scarsini (2009) among others. Landsman and Tsanakas (2006) studied conditions under which bivariate elliptical distributions are classified. Recently, Pan et al. (2016) provided more general results for the multivariate elliptical distributions.

There are numerous situations where the assumption of normality or the property of elliptically symmetric is violated in terms of the fluctuations exhibited in the data histogram. Several examples of such cases have been presented by Genton (2004). Due to the deficiency of the elliptical distributions in capturing the skewness arisen out of any data set in practice, consideration of more general flexible distributions is thought to be impressive. The multivariate normal distribution holds at the disposal of the huge class of the mean-variance mixtures of multivariate normal distribution in the case when the mixing distribution is allowed to be a special one. The Generalized Hyperbolic (GH) family of distributions, introduced by Barndorff-Nielsen and Blaesild (1981), comes up with the Normal mean-variance mixture distribution as a particular case. Recently, the GH distributions have been applied by many researchers to fit financial data; see, for example, Rydberg (1999), Bibby and Sorensen (2003) and Cont and Tankov (2004).

Material and methods

In this paper, using some hessian stochastic orderings, we compare random vectors having generalized hyperbolic distributions. By considering the random vectors from the generalized hyperbolic distributions, we derive necessary and/or sufficient conditions for their comparisons on the basis of the hessian stochastic orderings. By virtue of some concepts

established on the basis of closed convex cones and their duals, a number of necessary and sufficient conditions for the convex, the supermodular, the directionally convex, the componentwise convex, the copositive and the completely positive stochastic orderings are acquired.

Results and discussion

It is verified that the linear convex order and the positive linear convex order correspond with some kinds of hessian orderings. The linear orderings are considered to be appropriate because of the substantial reduction in the dimension they make as to their multivariate counterparts. The results can be potentially applied to the Normal Mean-variance mixture family of distributions. In a special case, stochastic orders for the symmetric GH and the scale mixture of the multivariate normal (SMN) distributions are characterized. It is noteworthy that some of the achieved results related to the SMN family are new as they have not been attained by Pan et al. (2016) for the elliptical families.

In terms of copulas induced by the GH family, dependence orderings of GH distributions with fixed marginal distributions are fulfilled by the hessian stochastic orderings. Interpretations of the results in a number of insurance and economic applications have been rendered.

We characterize the riskiness of portfolios by ordering the average of their correlations, in the sense of the stop-loss order. The elliptical distributions do not inspire such property as the frequency curves of components exhibit skewed trends. Dhaene and Goovaerts (1996) showed that riskiness of a portfolio consisting of two positive random variables increases, in the sense of the stop-loss order when two risks become more correlated. Landsman and Tsanakas (2006) derived an analogues result for the bivariate elliptical distributions. The results undertaken can be useful for slightly broader audiences as the considered the family of distributions entertain arbitrary values in their domain, the dimension, the skewness and the kurtosis.

Conclusion

The following conclusions were drawn from this research.

- The positive linear convex order and the supermodular order are equivalent.
- The riskiness of a generalized hyperbolic distributed portfolio, in the sense of the stop-loss order, increases (decreases) as the average of correlations of portfolio increases (decreases) and vice versa.
- In terms of copulas generated by the GH family, dependence orderings among GH distributions with fixed marginal are characterized by the hessian stochastic orderings.
- By considering two random bundles of commodities sharing the GH-generated copula signalized by a common unknown price vector, the bundle with less correlated components is preferred, as a result of the less riskiness it brings into account.

How to cite: Amiri, M., Jamalizadeh, A., Izadkhah, S., (2022) Hessian Stochastic Ordering in the Family of multivariate Generalized Hyperbolic Distributions and its Applications. *Mathematical Researches*, 8 (1), 1-20

 Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۸۸-۲۵٤٦
شاپا الکترونیکی: ۲۵۸۸-۲۵٥٤

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

ترتیب تصادفی هسیان در توزیع‌های هذلولوی تعمیم‌یافته چندمتغیره و کاربردهای آن

مهدی امیری[۱]✉، احد جمالیزاده[۲]، سلمان ایزدخواه[۳]

۱. نویسندهٔ مسئول، گروه آمار، دانشکدهٔ علوم پایه، دانشگاه هرمزگان، بندرعباس، ایران. پست الکترونیکی: m.amiri@hormozgan.ac.ir
۲. گروه آمار، دانشکدهٔ ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران. پست الکترونیکی: a.jamalizadeh@uk.ac.ir
۳. گروه آمار، پردیس بیجار، دانشگاه کردستان، سنندج، ایران. پست الکترونیکی: s.izadkhah@uok.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۷/۳۰
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۸/۱۲/۱۵
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۳/۱۱
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۲/۲۴

واژه‌های کلیدی:
ترتیب هسیان،
مخروط محدب،
ترتیب محدب خطی،
توزیع هذلولوی تعمیم‌یافته.

در این نوشتار، بردارهای تصادفی برگرفته از خانواده توزیع‌های هذلولوی تعمیم‌یافته چندمتغیره (GH) را در غالب ترتیب تصادفی هسیان مقایسه می‌کنیم. خانواده توزیع‌های GH شامل طیف گسترده‌ای از توزیع‌های متقارن و نامتقارن و با برجستگی‌های متفاوت بوده که می‌توانند در تحلیل و برازش داده‌های چوله و نیز دم‌سنگین به کار روند. ضمن معرفی و یادآوری برخی مفاهیم مقدماتی، با در نظر گرفتن چند مخروط محدب بسته و دوگان‌های آنها، شرایط لازم و کافی برای چند ترتیب تصادفی با اهمیت را به دست می‌آوریم. نشان خواهیم داد که تحت شرایطی، ترتیب‌های خطی محدب با ترتیب‌های چندمتغیره‌ای از نوع هسیان معادل هستند. بر اساس مفصل‌های تولید شده توسط خانواده GH، آشکارا خواهیم دید که ترتیب ساختار همبستگی معادل با برخی از ترتیب‌های تصادفی هسیان در این خانواده است. به عنوان کاربرد، نتایج در زمینه‌های بیمه و اقتصاد تفسیر شده‌اند.

استناد: امیری، مهدی؛ جمالیزاده، احد؛ ایزدخواه، سلمان؛ (۱۴۰۱). ترتیب تصادفی هسیان در توزیع‌های هذلولوی تعمیم‌یافته چندمتغیره و کاربردهای آن. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۱)، ۲۰-۱.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱. مقدمه

ترتیب‌های تصادفی ابزاری پیشرفته‌تر و اطلاع‌بخش‌تر برای مقایسه متغیرهای تصادفی (بردارهای تصادفی) نسبت به مقایسهٔ آنها صرفاً به وسیلهٔ میانگین، واریانس یا شاخص‌های آماری نظیر آنها هستند. امروزه ترتیب‌های تصادفی به طور گسترده‌ای در شاخه‌های مختلف آمار، تحقیق در عملیات، علوم بیمه و اقتصاد، نظریهٔ صف، همه‌گیر شناسی، طراحی آزمایش‌ها و... به کار گرفته می‌شوند. برای ملاحظهٔ کاربردهای گوناگون ترتیب‌های تصادفی، خواننده را به مولر و استویان (۲۰۰۲) و شیکد و شانتیکومار (۱۹۹۴، ۲۰۰۷)، که دو منبع اساسی و معتبر در خصوص مبحث ترتیب‌های تصادفی هستند ارجاع می‌دهیم. گروه مهم و وسیعی از ترتیب‌های تصادفی غالباً بر اساس مقایسهٔ امید ریاضی تبدیلی از متغیر(بردار)های تصادفی که در رده‌ای ویژه از تبدیلات قرار دارند مشخصه‌سازی می‌شوند. شکل کلی این نوع ترتیب‌های تصادفی تحت عنوان ترتیب‌های تصادفی انتگرالی در ابتدا توسط ویت (۱۹۸۶) و سپس به وسیلهٔ مولر (۱۹۹۷a) بنا نهاده شد که تعریف آن به صورت زیر است:

فرض کنید (S,A) یک فضای اندازه و F یک رده از توابع اندازه‌پذیر مانند $f:S\to\mathbb{R}$ باشد. اگر P و P' دو اندازهٔ احتمال دلخواه بر روی فضای احتمال (S,A) باشند، آن‌گاه رابطهٔ $P\preceq_F P'$ برقرار است اگر به ازای هر $f\in F$ رابطهٔ $\int f\,dP\le\int f\,dP'$ در صورت وجود انتگرال برقرار باشد.

اگر مجموعهٔ H یک مخروط محدب از ماتریس‌های مربعی باشد و F_H ردهٔ همه توابعی باشد که ماتریس هسیان آن‌ها در H قرار می‌گیرد، آن‌گاه مقایسهٔ بردارهای تصادفی در ردهٔ توابع F_H را ترتیب تصادفی هسیان گویند که توسط آرلوتو و اسکارسینی (۲۰۰۹) معرفی شدند. آنها انواع مختلفی از ترتیب‌های هسیان را در خانوادهٔ نرمال چندمتغیره بررسی کردند.

در حالت چندمتغیره به‌ویژه زمانی که بعد متغیرها بالا باشد، در انجام مقایسه به وسیلهٔ ترتیب‌های تصادفی با مشکلاتی مواجه می‌شویم که در عمل استفاده از آنها را امکان‌ناپذیر می‌کند. برای نمونه، سمپسون و ویتاکر (۱۹۸۹) و لوکاس و رایت (۱۹۹۱) را ببینید. در چنین شرایطی استفاده از ترکیبی خطی از متغیرها در بعد واحد به جای انجام مقایسه‌های چندمتغیره در بعد بالاتر اهمیت بیشتری پیدا می‌کند. در تحلیل‌های آماری چندمتغیره، تحلیل به وسیلهٔ ترکیب‌های خطی به دلیل معطوف بودن به ایجاد کاهش بعد در فضای مشاهدات به عنوان یک امر مطلوب از جایگاه خاصی برخوردار است. در بسیاری از زمینه‌ها نظیر انجام آزمایش‌های بالینی برای مقایسهٔ گروه‌های مقدار دارو (دوز)، از یک اندازه‌گیری کلی به وسیلهٔ میانگین وزنی از دوزها استفاده می‌شود که در آن ترکیبی خطی از بردارهای تصادفی به منظور انجام مقایسه در نظر گرفته می‌شود (بکل و تال، ۲۰۰۴). به علاوه در بحث اقتصاد، ارزش ریالی (پولی) کلی یک بسته متشکل از کالاهای مختلف به وسیلهٔ یک ترکیب خطی با در نظر گرفتن قیمت هر واحد از آن کالاها به عنوان ضرایب ترکیب خطی از کمیت (تعداد) کالاها بیان می‌شود. در نظر گرفتن هر نوع تابع (یا تبدیلی) دیگر به جز تبدیل خطی فاقد مفهوم و معنی خاصی در این حوزه‌ها هستند (اسکارسینی، ۱۹۹۸).

در مقایسه‌های چندمتغیره به صورت معمول از توزیع‌های متقارن و چندمتغیره بیضوی[1] استفاده شده است و عمده نتایج در این حوزه مربوط به همین خانواده است. ترتیب‌های تصادفی نرمال چندمتغیره توسط موزلر (۱۹۸۴)، اسکارسینی (۱۹۹۸)، مولر (۲۰۰۱) و آرلوتو و اسکارسینی (۲۰۰۹) مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایجی از ترتیب‌های

[1] Elliptical

تصادفی در خانوادهٔ بیضوی دومتغیره توسط لاند سمن و زانکس (۲۰۰۶) و به صورت کلی‌تری در حالت چندمتغیره به وسیلهٔ پان و همکاران (۲۰۱۶) بحث شده است.

در شرایطی که در منحنی فراوانی داده‌ها چولگی وجود داشته باشد، توزیع‌های متقارن مانند توزیع‌های بیضوی غالباً کارساز نبوده و برازش مناسبی برای داده‌ها فراهم نخواهند نمود. مثال‌های متعددی از این موارد در کتاب گنتون (۲۰۰۴) مهیا شده است. در چنین شرایطی استفاده از خانوادهٔ توزیع‌هایی که در مورد امکان وجود تغییرات در چولگی و برجستگی داده‌ها انعطاف داشته باشند از اهمیت زیادی برخوردار است. یکی از این خانواده‌ها، خانواده توزیع‌های GH است که توسط باندورف‌نیلسن و بلازید (۱۹۸۱) معرفی شدند. این خانواده از توزیع‌ها در حالت کلی با غالب توزیع آمیخته میانگین-واریانس[1] نرمال تولید و مشخصه‌سازی می‌شوند که طیف گسترده‌ای از انواع توزیع‌ها را در بر می‌گیرند. در سال‌های اخیر استفاده از این خانواده توزیع خاص به ویژه در اقتصاد و سایر زمینه‌های مرتبط رشد چشم‌گیری داشته است. برخی موارد کاربردی برای این توزیع را می‌توان در ریدبرگ (۱۹۹۹)، بیبی و سورنسن (۲۰۰۳)، کانت و تانکوف (۲۰۰۴)، کریستوفرسن و همکاران (۲۰۱۲)، مک‌نیل و همکاران (۲۰۱۵) و یوشیبا (۲۰۱۸) ملاحظه نمود.

در این مقاله هدف بررسی نتایج ترتیب‌های تصادفی انتگرالی و هسیان در خانواده‌ای گسترده‌تر با قابلیت دربرگیری چولگی یا برجستگی و یا هردو به عنوان دو جنبهٔ بسیار مهم از داده‌های آماری است که از این نظر می‌توان تا حدودی ضعف خانواده‌های مهم متقارن نظیر خانوادهٔ بیضوی در تحلیل‌ها را برطرف کرد. بر این اساس ترتیب‌های تصادفی مختلفی برای مقایسهٔ اعضاء خانواده توزیع‌های GH مورد بحث قرار می‌گیرند و شرایط لازم و (یا) کافی برای برقراری آن ترتیب‌ها در خانوادهٔ مذکور به دست می‌آیند. با در نظر گرفتن مخروط‌های محدب از نوع مختلف، ترتیب‌های گوناگونی نظیر ترتیب محدب، ترتیب محدب سوئی، ترتیب سوپرمدولار، ترتیب محدب جزئی، ترتیب هم‌مثبت و ترتیب کاملاً مثبت به دست می‌آیند. همچنین ترتیب‌های خطی محدب و مشخصه‌سازی آن با یکی از انواع ترتیب‌های چندمتغیره هسیان مورد بحث قرار می‌گیرند. در حالت خاص خانواده GH متقارن نیز نتایج به دست می‌آید که در غالب توزیع‌های بیضوی قابل کاربرد هستند. برخی از این نتایج برای خانوادهٔ بیضوی تاکنون در متون مربوطه در بحث ترتیب‌های تصادفی مورد مطالعه قرار نگرفته و بنابراین قابل توجه می‌باشند. مقایسه‌های تصادفی بر اساس مفصل‌ها نیز در زمینه‌های کاربردی مختلفی نظیر بیمه و اقتصاد مرسوم هستند. برای نمونه به مولر و اسکارسینی (۲۰۰۰، ۲۰۰۱) و مولر (۱۹۹۷b) مراجعه کنید. براساس مفصل مولد خانواده توزیع‌های GH، اهمی از مقایسه‌های تصادفی در آن خانواده بر حسب ساختار همبستگی موجود معرفی می‌شوند. نهایتاً تفسیرهایی در زمینه علوم بیمه و اقتصاد در این نوشتار ارائه خواهند شد.

بدین ترتیب، در بخش ۲ مفاهیم مورد نیاز در ادامه بحث شامل انواع توابع به کار رفته، ترتیب‌های تصادفی مورد نظر و خانواده توزیع‌های GH به طور خلاصه مرور می شوند. در بخش۳ نتایجی کلی در مورد ترتیب‌های تصادفی ارائه می شوند. در بخش ۴ شرایط لازم و کافی برای ترتیب‌های مختلف هسیان به دست می‌آیند و ترتیب‌های خطی محدب که معادل با برخی ترتیب‌های چندمتغیره از نوع هسیان هستند معرفی می‌شوند. در بخش ۵ در چارچوب خانواده مفصل‌های GH که درآن توزیع‌های حاشیه‌ای بدون تغییر می‌مانند، به مقایسهٔ بردارهای تصادفی دارای توزیع GH برحسب ساختار همبستگی موجود (بر اساس ماتریس همبستگی پیرسون) می‌پردازیم و تفاسیری از نتایج به دست آمده در بیمه و اقتصاد ارائه می‌نماییم.

[1] Mean-variance mixture

۲. مفاهیم مورد نیاز

در این بخش تعاریف و مفاهیم مورد نیاز دربارهٔ توابع، ترتیب‌های تصادفی و توزیع‌های احتمال را به طور مختصر مرور می‌کنیم. منظور از تابع "صعودی" تابع "غیرنزولی" است. برای بردارهای d- بعدی $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، نمادهای $\mathbf{a} \le \mathbf{b}$ و $\mathbf{a} \ge \mathbf{b}$ را بترتیب برای نمایش $a_i \le b_i$ و $a_i \ge b_i$ به ازای $i = ۱,...,d$ به کار می‌گیریم. فضای $\mathbb{R}^d$ فضای اقلیدسی d - بعدی و $\mathbb{R}_+^d$ را زیرفضای $\mathbb{R}^d$ با مقادیر نامنفی در نظر می‌گیریم.

۱,۲ توابع مورد نیاز

دنویی و مولر (۲۰۰۲) نشان دادند که در ترتیب $P \preceq_F P'$ کافی است رابطهٔ $\int f\,dP \le \int f\,dP'$ برای توابع به اندازه کافی هموار f در رده F برقرار باشد. بنابراین فرض می‌کنیم توابع $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ دارای مشتق‌های جزئی مرتبهٔ دوم پیوسته باشند. برای خلاصه‌نویسی در ادامهٔ نوشتار از نمادهای زیر استفاده می‌کنیم:

$$f^{(i)}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{x}), \quad f^{(ij)}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^۲}{\partial x_i \partial x_j} f(\mathbf{x}).$$

در این صورت بردار گرادیان و ماتریس هسیان تابع f به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\nabla_{f(\mathbf{x})} = \left[f^{(i)}(\mathbf{x}) \right]_{i=۱}^d, \quad \mathbf{H}_{f(\mathbf{x})} = \left[f^{(ij)}(\mathbf{x}) \right]_{i,j=۱}^d. \qquad (۱)$$

یادآوری می‌کنیم که ماتریس متقارن $\mathbf{A}$ را نیمه‌معین‌مثبت[۱] گوییم اگر شکل درجهٔ دوم آن یعنی $\mathbf{t}^T \mathbf{A}\mathbf{t}$ به ازای $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$ نامنفی باشد. همچنین اثر حاصل‌ضرب دو ماتریس نیمه معین مثبت $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ مقداری نامنفی است یعنی $trace[\mathbf{AB}] \ge ۰$.

تعریف ۱. اگر $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ دارای مشتق‌های جزئی مرتبهٔ دوم پیوسته باشد، آن‌گاه f:

۱) صعودی است اگر و تنها اگر $\nabla_{f(\mathbf{x})} \ge \mathbf{0}$.

۲) محدب است اگر و تنها اگر $\mathbf{H}_{f(\mathbf{x})}$ نیمه‌معین‌مثبت باشد.

۳) محدب صعودی است اگر و تنها اگر $\nabla_{f(\mathbf{x})} \ge \mathbf{0}$ و $\mathbf{H}_{f(\mathbf{x})}$ نیمه‌معین‌مثبت باشد.

۴) سوپرمدولار[۲] یا شبه‌یکنوا[۳] است اگر و تنها اگر به ازای هر $۱ \le i < j \le d$، $f^{(ij)}(\mathbf{x}) \ge ۰$.

۵) محدب سوئی است اگر و تنها اگر به ازای هر $۱ \le i, j \le d$، $f^{(ij)}(\mathbf{x}) \ge ۰$.

۶) محدب جزئی[۴] است اگر و تنها اگر $\mathbf{H}_{f(\mathbf{x})}$ دارای عناصر قطری غیرمنفی باشد.

در ادامه نوشتار به طور قراردادی نماد $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ را برای نمایش عملگر ضرب داخلی دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ به کار می‌بریم که $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^T \mathbf{b}$. همچنین چند رده خطی از توابع را به صورت ذیل در نظر خواهیم گرفت:

[1] Positive semi-definite
[2] Supermodular
[3] Quasi monotone
[4] Component-wise convex

تعریف ۲. اگر $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$، آن‌گاه گوییم $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(\mathbf{t})=g(\langle\mathbf{a},\mathbf{t}\rangle)$ دارای خاصیت

۱) صعودی خطی است هر گاه g صعودی و $\mathbf{t}\in\mathbb{R}^d$ باشد.

۲) محدب خطی (lcx) است هر گاه g محدب و $\mathbf{t}\in\mathbb{R}^d$ باشد.

۳) محدب خطی مثبت ($plcx$) است هر گاه g محدب و $\mathbf{t}\in\mathbb{R}_+^d$ باشد.

۴) محدب صعودی خطی ($ilcx$) است هر گاه g محدب صعودی و $\mathbf{t}\in\mathbb{R}^d$ باشد.

۵) محدب صعودی خطی مثبت ($iplcx$) است هر گاه g محدب صعودی و $\mathbf{t}\in\mathbb{R}_+^k$ باشد.

در ادامه مفاهیمی در مورد مخروط‌های محدب را مرور می‌کنیم. ابتدا تعاریف زیر را ارائه می‌کنیم.

تعریف ۳. زیرمجموعهٔ C از فضای برداری W را یک مخروط[1] گوییم اگر به ازای هر $x\in\mathsf{C}$ و $\lambda\geq 0$ داشته باشیم $\lambda x\in\mathsf{C}$. همچنین مجموعهٔ C را مخروط محدب گوییم اگر به ازای هر $\alpha,\beta\geq 0$ و $x,y\in\mathsf{C}$ نتیجه بگیریم $\alpha x+\beta y\in\mathsf{C}$.

تعریف ۴. فرض کنید زیر مجموعهٔ C یک مخروط محدب بسته از فضای برداری W با ضرب داخلی $\langle\cdot,\cdot\rangle$ باشد. آن‌گاه مجموعهٔ $\mathsf{C}^*=\{y\in\mathsf{W}:\langle x,y\rangle\geq 0\ \forall x\in\mathsf{C}\}$ را دوگان[2] مجموعهٔ C می‌نامیم. C^* نیز یک مخروط محدب بسته است. درصورتی که $\mathsf{C}=\mathsf{C}^*$، آن‌گاه C را خود دوگان[3] گوییم.

در این قسمت فرض می‌کنیم $\mathsf{W}=\mathsf{S}$ که S فضای برداری ماتریس‌های متقارن $d\times d$ است. همچنین ضرب داخلی را روی این فضای برداری به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\langle\mathbf{A},\mathbf{B}\rangle=trace[\mathbf{A}^T\mathbf{B}]=trace[\mathbf{AB}]=\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}a_{ij}b_{ij}$$

که $\mathbf{A}=[a_{ij}]$ و $\mathbf{B}=[b_{ij}]$ دو عضو دلخواه S می‌باشند.

ماتریس متقارن $\mathbf{A}$ را هم‌مثبت[4] گوییم اگر شکل درجه دوم آن به ازای $\mathbf{t}\in\mathbb{R}_+^d$ نامنفی باشد (مازکین، ۱۸۱۸). همچنین ماتریس متقارن $\mathbf{A}$ را کاملا مثبت[5] گوییم اگر ماتریس نامنفی $\mathbf{B}$ وجود داشته باشد به طوری که $\mathbf{A}=\mathbf{B}^T\mathbf{B}$.

در پایان این قسمت، چند مخروط محدب بسته از فضای S و دوگان آنها معرفی می‌شوند. خوانندگان علاقمند برای مطالعه بیشتر می‌توانند به آرلوتو و اسکارسینی (۲۰۰۹) مراجعه نمایند.

ملاحظهٔ ۱. چند مخروط محدب بسته از فضای S و دوگان آن‌ها به صورت زیر می‌باشند:

۱) اگر C_{psd} مخروط ماتریس‌های نیمه‌معین‌مثبت باشد آن‌گاه $\mathsf{C}_{psd}=\mathsf{C}^*_{psd}$،

[1] Cone
[2] Dual
[3] Self-dual
[4] Copositive
[5] Completely positive

۲) اگر C_+ مخروط ماتریس‌های نامنفی باشد آن‌گاه $C_+^* = C_+$،

۳) اگر $C_{+\mathrm{off}}$ مخروط ماتریس‌های نامنفی با عناصر غیرقطری صفر باشد آنگاه

$$C^*_{+\mathrm{off}} = \left\{\mathbf{B} \in S : b_{ii} = ۰, b_{ij} \geq ۰\right\},$$

۴) اگر $C_{+\mathrm{diag}}$ مخروط ماتریس‌های با قطر اصلی نامنفی باشد آن‌گاه

$$C^*_{+\mathrm{diag}} = \left\{\mathbf{B} \in S : b_{ii} \geq ۰, b_{ij} = ۰\ \forall i \neq j\right\},$$

۵) اگر C_{cop} مخروط ماتریس‌های هم‌مثبت باشد آن‌گاه $C^*_{\mathrm{cop}} = C_{\mathrm{cp}}$،

۶) اگر C_{cp} مخروط ماتریس‌های کاملا مثبت باشد آن‌گاه $C^*_{\mathrm{cp}} = C_{\mathrm{cop}}$.

۲،۲ تعریف ترتیب‌های تصادفی

رده توابع F_H که H زیرفضای S است را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$F_H = \left\{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} : \mathbf{H}_{f(\mathbf{x})} \in H \quad, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d\right\}. \qquad (۲)$$

در این صورت ترتیب تصادفی انتگرالی و هسیان برای مقایسه تصادفی بردارهای تصادفی d- بعدی $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند (آرلوتو و اسکارسینی، ۲۰۰۹):

تعریف ۵. دو بردار تصادفی d- بعدی $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ و فضای برداری F را متشکل از توابع $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ در نظر بگیرید. آن‌گاه در رده F بردار تصادفی $\mathbf{X}$ را کوچک‌تر از بردار تصادفی $\mathbf{Y}$ گوییم و آن را با $\mathbf{X} \preceq_F \mathbf{Y}$ نمایش می‌دهیم اگر

$$E[f(\mathbf{X})] \leq E[f(\mathbf{Y})]\ ,\ \ \forall f \in F. \qquad (۳)$$

به این نوع ترتیب تصادفی، ترتیب انتگرالی گوییم. اگر $F = F_H$ که $H \subset S$ آنگاه به این ترتیب تصادفی، ترتیب هسیان گوییم.

بنا بر تعریف‌های ۱ و ۲، ترتیب‌های چندمتغیره انتگرالی و هسیان زیر به دست می‌آیند:

تعریف ۶.

۱) ترتیب معمولی: $\mathbf{X} \preceq_{st} \mathbf{Y}$ اگر رابطهٔ (۳) به ازای هر تابع صعودی f برقرار باشد،

۲) ترتیب محدب: $\mathbf{X} \preceq_{cx} \mathbf{Y}$ اگر رابطهٔ (۳) به ازای هر تابع محدب f برقرار باشد،

۳) ترتیب محدب صعودی: $\mathbf{X} \preceq_{icx} \mathbf{Y}$ اگر رابطهٔ (۳) به ازای هر تابع صعودی و محدب f برقرار باشد،

۴) ترتیب سوپرمدولار: $\mathbf{X} \preceq_{\mathrm{sm}} \mathbf{Y}$ اگر رابطهٔ (۳) به ازای هر تابع سوپرمدولار f برقرار باشد،

۵) ترتیب محدب سوئی: $\mathbf{X} \preceq_{\mathrm{dcx}} \mathbf{Y}$ اگر رابطهٔ (۳) به ازای هر تابع محدب سوئی f برقرار باشد،

۶) ترتیب محدب جزئی: $\mathbf{X} \preceq_{\mathrm{ccx}} \mathbf{Y}$ اگر رابطهٔ (۳) به ازای هر تابع محدب جزئی f برقرار باشد،

۷) ترتیب سوپرمدولار صعودی: $\mathbf{X} \preceq_{\mathrm{ism}} \mathbf{Y}$ اگر رابطهٔ (۳) به ازای هر تابع سوپرمدولار و صعودی f برقرار باشد،

۸) ترتیب هم‌مثبت: $\mathbf{X} \preceq_{\mathrm{cop}} \mathbf{Y}$ اگر رابطهٔ (۳) به ازای هر $f \in F_{C_{\mathrm{cop}}}$ برقرار باشد،

۹) ترتیب کاملا مثبت: $\mathbf{X} \preceq_{cp} \mathbf{Y}$ اگر رابطهٔ (۳) به ازای هر $f \in \mathcal{F}_{C_{cp}}$ برقرار باشد.

در لم زیر شرایط لازم برای ترتیب تصادفی هسیان از نوع محدب ارائه شده است (آرلوتو و اسکارسینی، ۲۰۰۹).

لم ۱. فرض کنید C_H یک مخروط محدب بسته تولید شده توسط $H \subset S$ باشد و $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ بردارهای تصادفی d-بعدی بترتیب با بردارهای میانگین $\boldsymbol{\mu}_X$ و $\boldsymbol{\mu}_Y$ و ماتریس‌های کواریانس $\boldsymbol{\Sigma}_X$ و $\boldsymbol{\Sigma}_Y$ باشند. اگر $\mathbf{X} \preceq_{F_H} \mathbf{Y}$ آنگاه $\boldsymbol{\mu}_X = \boldsymbol{\mu}_Y$ و $\boldsymbol{\Sigma}_Y - \boldsymbol{\Sigma}_X \in C_H^*$.

۳،۲ توزیع هذلولوی تعمیم‌یافته

ابتدا نمادهای زیر را در نظر می‌گیریم:

توابع ϕ و Φ بترتیب برای نمایش تابع چگالی احتمال (تابع چگالی) و تابع توزیع تجمعی (تابع توزیع) نرمال استاندارد، $N_d(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ برای نمایش توزیع نرمال d-متغیره با بردار میانگین $\boldsymbol{\mu}$ و ماتریس کواریانس $\boldsymbol{\Sigma}$، $\phi_d(\cdot; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ برای نمایش تابع چگالی $N_d(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ و $\stackrel{d}{=}$ برای نشان دادن یکسان بودن توزیع احتمال دو بردار تصادفی استفاده می‌شوند.

خانوادهٔ توزیع‌های GH به صورت آمیخته میانگین- واریانس نرمال چندمتغیره با استفاده از متغیر آمیختگی با توزیع گوسین معکوس تعمیم‌یافته[1] (GIG) می‌باشند که توسط باندروف نییلسن و بلازید (۱۹۸۱) پایه‌گذاری شد.

تعریف ۷. بردار تصادفی $\mathbf{X}$ را دارای توزیع آمیخته میانگین- واریانس نرمال چندمتغیره (NMVM) گویند اگر

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\gamma} W + \sqrt{W}\,\mathbf{Z}, \tag{۴}$$

که $\mathbf{Z} \sim N_d(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$، پارامترهای $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^d$ و $\boldsymbol{\Sigma}$ نیمه‌معین‌مثبت، W یک متغیر تصادفی تک-بعدی با تکیه‌گاه مثبت و مستقل از $\mathbf{Z}$ است. اگر $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$، آن‌گاه توزیع حاصل یک توزیع متقارن است که خانوادهٔ توزیع‌های آمیخته مقیاس[2] نرمال چندمتغیره نامیده می‌شود.

اگر میانگین و واریانس W متناهی باشند، آن‌گاه بردار میانگین و ماتریس کواریانس بردار تصادفی (۴) با توزیع NMVM به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{X}) &= \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\gamma} E(\mathrm{W}), \\ \mathrm{Cov}(\mathbf{X}) &= E(\mathrm{W})\boldsymbol{\Sigma} + \mathrm{var}(\mathrm{W})\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}^T . \end{aligned} \tag{۵}$$

متغیر آمیختگی W در توزیع‌های NMVM در علوم اقتصادی به صورت شوکی درنظر گرفته می شود که میانگین و تغییرات یک فرآیند نرمال را تحت تأثیر خود قرار می‌دهد. متغیر تصادفی W دارای توزیع GIG گویند اگر تابع چگالی آن به صورت زیر باشد (جورجنسن، ۲۰۱۲):

[1] Generalized Inverse Gaussian
[2] Scale Mixture

$$h\left(w;\boldsymbol{\eta}\right)=\frac{\chi^{-\alpha}\sqrt{\chi\psi}^{\alpha}}{2K_{\alpha}\left(\sqrt{\chi\psi}\right)}w^{\alpha-1}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\chi}{w}+\psi w\right)\right],\quad w>0, \tag{۶}$$

که $\boldsymbol{\eta}=\left(\alpha,\chi,\psi\right)$ در شـــرایط $\chi>0,\psi\geq 0$ به ازای $\alpha>0$، $\chi>0,\psi>0$ به ازای $\alpha=0$، $\chi\geq 0,\psi>0$ به ازای $\alpha<0$ صدق می‌کنند و $K_{\alpha}(.)$ تابع بسل اصلاح شده نوع سوم است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$K_{\alpha}\left(u\right)=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}y^{\alpha-1}\exp\left(-\frac{u}{2}\left(y+y^{-1}\right)\right)\mathrm{d}y,\quad u>0.$$

اگر متغیر آمیختگی W در رابطهٔ (۴) دارای توزیع GIG با تابع چگالی (۶) باشد، آن‌گاه توزیع حاصل GH نامیده می‌شود و تابع چگالی احتمال آن، به ازای $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{d}$، بصورت زیر به دست می‌آید (مک نیل و همکاران، ۲۰۱۵):

$$\rho_{d}(\mathbf{x};\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\Sigma})=\mathrm{c}\frac{K_{\alpha-\frac{d}{2}}\left(\sqrt{\left(\chi+\mathrm{u}(\mathbf{x})\right)\left(\psi+\boldsymbol{\gamma}^{T}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\gamma}\right)}\right)}{\sqrt{\left(\chi+\mathrm{u}(\mathbf{x})\right)\left(\psi+\boldsymbol{\gamma}^{T}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\gamma}\right)}^{\frac{d}{2}-\alpha}}\exp\left[\left(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}\right)^{T}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\gamma}\right] \tag{۷}$$

که $\mathrm{u}\left(\mathbf{x}\right)=\left(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}\right)^{T}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\left(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}\right)$ و مقدار ثابت c به صورت زیر است:

$$c=\frac{\sqrt{\chi\psi}^{-\alpha}\psi^{\alpha}\left(\psi+\boldsymbol{\gamma}^{T}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\gamma}\right)^{\frac{d}{2}-\alpha}}{\left(2\pi\right)^{\frac{d}{2}}\left|\boldsymbol{\Sigma}\right|^{\frac{1}{2}}K_{\alpha}\left(\sqrt{\chi\psi}\right)}$$

و $|.|$ نشان‌دهنده دترمینان است. در این صورت بردار تصادفی $\mathbf{X}$ در رابطهٔ (۴) دارای توزیع d- متغیره GH است و آن را با نماد زیر نمایش می‌دهیم:

$$\mathbf{X}\sim GH_{d}\left(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\Sigma},\boldsymbol{\eta}\right). \tag{۸}$$

که $\boldsymbol{\eta}=\left(\alpha,\chi,\psi\right)$ پارامترهای توزیع آمیختگی GIG، $\boldsymbol{\mu}$ بردار مکان، $\boldsymbol{\Sigma}$ ماتریس مقیاس و $\boldsymbol{\gamma}$ بردار چولگی می‌باشند. تابع مشخصه توزیع بردار تصادفی GH در (۸) به صورت زیر بدست می‌آید (مک نیل و همکاران، ۲۰۱۵):

$$\begin{aligned}\Psi\left(\mathbf{s}\right)&=E\left(\exp\left\{-i\mathbf{s}^{T}\mathbf{X}\right\}\right)\\&=\hat{H}\left(\frac{1}{2}\mathbf{s}^{T}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{s}-i\mathbf{s}^{T}\boldsymbol{\gamma}\right)\exp\left\{i\mathbf{s}^{T}\boldsymbol{\mu}\right\}\end{aligned} \tag{۹}$$

که $\hat{H}\left(t\right)=E\left(\exp\left\{-tW\right\}\right)$ تبدیل لاپلاس W می‌باشد.

همان‌طور که در ملاحظهٔ ۲ خواهیم دید، توزیع هر تبدیل خطی از یک بردار تصـــادفی برگرفته از خانوادهٔ GH دارای توزیعی در همان خانواده است یا به عبارتی خانواده توزیع‌های GH تحت تبدیلات خطی بسته هستند.

ملاحظهٔ ۲. اگر $\mathbf{X}\sim GH_{d}\left(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\Sigma},\boldsymbol{\eta}\right)$ و $\mathbf{Y}=\mathbf{AX}+\mathbf{b}$ که $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{m\times d}$ و $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^{m}$، آن‌گاه

$$\mathbf{Y}\sim GH_{m}\left(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}+\mathbf{b},\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma},\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}^{T},\boldsymbol{\eta}\right).$$

در ادامه، برخی از توزیع‌های پرکاربرد در اقتصاد که متعلق به خانواده GH هستند، معرفی می‌شوند.

ملاحظهٔ ۳. اگر $\alpha=-0/5$، آنگاه توزیع گوسین معکوس نرمال[1] بدست می‌آید. به ازای $\alpha>0$ و $\chi=0$ توزیع واریانس-گاما حاصل می‌شود. به ازای $\alpha<0$ و $\psi=0$ توزیع چوله-تی[2] و به ازای $\alpha=\frac{d+1}{2}$ توزیع هذلولوی نتیجه می‌شود. همچنین به ازای $\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$ توزیع GH متقارن بدست می‌آید که متعلق به خانواده توزیع‌های بیضوی است.

۳. ترتیب‌های تصادفی خانواده GH

در این بخش، نتایج کلی مورد نیاز برای ترتیب‌های تصادفی در خانواده GH ارائه می‌شوند. نخست اتحادی برای $E\left(\mathrm{f}(\mathbf{Y})-\mathrm{f}(\mathbf{X})\right)$ به دست می‌آوریم که ما را قادر به تشخیص شرایط کافی برای بسیاری از ترتیب‌های تصادفی می‌سازد.

لم ۲. فرض کنید $\mathrm{f}:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ یک تابع دارای مشتق‌های جزئی مرتبهٔ دوم پیوسته باشد و $\mathrm{f}(\mathbf{x})=O(\|\mathbf{x}\|)$ و $\nabla_{\mathrm{f}(\mathbf{x})}=O(\|\mathbf{x}\|)$ برای $\|\mathbf{x}\|\to\infty$ برقرار باشد که در آن $\|\mathbf{x}\|=\left(\mathbf{x}^T\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{2}}$ است. همچنین بردارهای تصادفی GH زیر

$$\mathbf{X}\sim GH_d(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\Sigma},\boldsymbol{\eta}),\quad \mathbf{Y}\sim GH_d\left(\boldsymbol{\mu}',\boldsymbol{\gamma}',\boldsymbol{\Sigma}',\boldsymbol{\eta}\right), \tag{10}$$

و ترکیب محدب از پارامترهای مکان، مقیاس و چولگی را به ازای $0\le\lambda\le 1$ به صورت زیر درنظر بگیرید:

$$\boldsymbol{\mu}_\lambda=\lambda\boldsymbol{\mu}'+(1-\lambda)\boldsymbol{\mu},\ \ \boldsymbol{\gamma}_\lambda=\lambda\boldsymbol{\gamma}'+(1-\lambda)\boldsymbol{\gamma},\ \ \boldsymbol{\Sigma}_\lambda=\lambda\boldsymbol{\Sigma}'+(1-\lambda)\boldsymbol{\Sigma}. \tag{11}$$

آن‌گاه اتحاد زیر برقرار است:

$$\begin{aligned}E\left(\mathrm{f}(\mathbf{Y})-\mathrm{f}(\mathbf{X})\right)&=\int_0^1\int_{\mathbb{R}^d}(\boldsymbol{\mu}'-\boldsymbol{\mu})^T\nabla_{\mathrm{f}(\mathbf{z})}\,\rho_d(\mathbf{z};\boldsymbol{\mu}_\lambda,\boldsymbol{\gamma}_\lambda,\boldsymbol{\Sigma}_\lambda,\boldsymbol{\eta})\,d\mathbf{z}\,d\lambda\\&+\mathrm{a}(\boldsymbol{\eta})\int_0^1\int_{\mathbb{R}^d}\left\{(\boldsymbol{\gamma}'-\boldsymbol{\gamma})^T\nabla_{\mathrm{f}(\mathbf{z})}+\frac{1}{2}\,trace\left[(\boldsymbol{\Sigma}'-\boldsymbol{\Sigma})\mathbf{H}_{\mathrm{f}(\mathbf{z})}\right]\right\}\\&\times\rho_d(\mathbf{z};\boldsymbol{\mu}_\lambda,\boldsymbol{\gamma}_\lambda,\boldsymbol{\Sigma}_\lambda,\boldsymbol{\eta}^*)\,d\mathbf{z}\,d\lambda,\end{aligned}$$

که در آن $\boldsymbol{\eta}=(\alpha,\chi,\psi)$، $\boldsymbol{\eta}^*=(\alpha+1,\chi,\psi)$، $\rho_d(.;.)$ تابع چگالی GH در رابطه (۷) و

$$\mathrm{a}(\boldsymbol{\eta})=\sqrt{\frac{\chi}{\psi}}\frac{K_{\alpha+1}\left(\sqrt{\chi\psi}\right)}{K_\alpha\left(\sqrt{\chi\psi}\right)}$$

است.

اثبات. فرض کنید $\mathbf{Z}_\lambda\sim GH_d(\boldsymbol{\mu}_\lambda,\boldsymbol{\gamma}_\lambda,\boldsymbol{\Sigma}_\lambda,\boldsymbol{\eta})$ و $g(\lambda)=E\left(\mathrm{f}(\mathbf{Z}_\lambda)\right)$ باشد. آن‌گاه

[1] Normal Inverse Gaussian
[2] Skewed-t

$$\begin{aligned} E\left(\mathrm{f}(\mathbf{Y})-\mathrm{f}(\mathbf{X})\right) &= g(1)-g(0) \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial\lambda} g(\lambda)\,d\lambda \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial\lambda}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{f}(\mathbf{z})\rho_d\left(\mathbf{z};\boldsymbol{\mu}_\lambda,\boldsymbol{\gamma}_\lambda,\boldsymbol{\Sigma}_\lambda,\boldsymbol{\eta}\right)d\mathbf{z}d\lambda \\ &= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{f}(\mathbf{z})\frac{\partial}{\partial\lambda}\rho_d\left(\mathbf{z};\boldsymbol{\mu}_\lambda,\boldsymbol{\gamma}_\lambda,\boldsymbol{\Sigma}_\lambda,\boldsymbol{\eta}\right)d\mathbf{z}d\lambda. \end{aligned} \tag{۱۲}$$

تابع مشخصه بردار تصادفی $\mathbf{Z}_\lambda$ را با استفاده از رابطهٔ (۹) با جایگذاری پارامترهای (۱۱) می‌توان به صورت انتگرالی زیر نیز به دست آورد:

$$\begin{aligned} \Psi_\lambda(\mathbf{s}) &= \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(i\mathbf{s}^T\mathbf{z}\right)\phi_d\left(\mathbf{z};\boldsymbol{\mu}_\lambda+w\boldsymbol{\gamma}_\lambda,w\boldsymbol{\Sigma}_\lambda\right)h(w;\boldsymbol{\eta})\,d\mathbf{z}dw \\ &= \int_0^{+\infty} \exp\left(i\mathbf{s}^T\left(\boldsymbol{\mu}_\lambda+w\boldsymbol{\gamma}_\lambda\right)-\frac{w}{2}\mathbf{s}^T\boldsymbol{\Sigma}_\lambda\mathbf{s}\right)h(w;\boldsymbol{\eta})\,dw. \end{aligned} \tag{۱۳}$$

همچنین با استفاده از تبدیل وارون می‌توان تابع چگالی $\mathbf{Z}_\lambda$ را برحسب تابع مشخصه آن به صورت زیر نوشت:

$$\rho_d\left(\mathbf{z};\boldsymbol{\mu}_\lambda,\boldsymbol{\gamma}_\lambda,\boldsymbol{\Sigma}_\lambda,\boldsymbol{\eta}\right) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d} \exp\left[-i\mathbf{s}^T\mathbf{z}\right]\Psi_\lambda(\mathbf{s})\,d\mathbf{s}. \tag{۱۴}$$

حال با مشتق‌گیری از طرفین رابطهٔ بالا نسبت به λ، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\rho_d\left(\mathbf{z};\boldsymbol{\mu}_\lambda,\boldsymbol{\gamma}_\lambda,\boldsymbol{\Sigma}_\lambda,\boldsymbol{\eta}\right) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d} \exp\left[-i\mathbf{s}^T\mathbf{z}\right]\frac{\partial}{\partial\lambda}\Psi_\lambda(\mathbf{s})\,d\mathbf{s}. \tag{۱۵}$$

با مشتق‌گیری از $\Psi_\lambda(\mathbf{s})$ نسبت به λ رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\lambda}\Psi_\lambda(\mathbf{s}) &= \int_0^{+\infty}\left(i\mathbf{s}^T\left(\left(\boldsymbol{\mu}'-\boldsymbol{\mu}\right)+w\left(\boldsymbol{\gamma}'-\boldsymbol{\gamma}\right)\right)-\frac{w}{2}\mathbf{s}^T\left(\left(\boldsymbol{\Sigma}'-\boldsymbol{\Sigma}\right)\right)\mathbf{s}\right) \\ &\quad\times\exp\left(i\mathbf{s}^T\left(\boldsymbol{\mu}_\lambda+w\boldsymbol{\gamma}_\lambda\right)-\frac{w}{2}\mathbf{s}^T\boldsymbol{\Sigma}_\lambda\mathbf{s}\right)h(w;\boldsymbol{\eta})\,dw \\ &= i\mathbf{s}^T\left(\boldsymbol{\mu}'-\boldsymbol{\mu}\right)\Psi_\lambda(\mathbf{s})+i\,\mathrm{a}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{s}^T\left(\boldsymbol{\gamma}'-\boldsymbol{\gamma}\right)\Psi^*_\lambda(\mathbf{s}) \\ &\quad-\frac{1}{2}\mathrm{a}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{s}^T\left(\boldsymbol{\Sigma}'-\boldsymbol{\Sigma}\right)\mathbf{s}\Psi^*_\lambda(\mathbf{s}), \end{aligned}$$

که در آن $\Psi^*_\lambda(\mathbf{s})$ با قراردادن $\boldsymbol{\eta}^*$ بجای $\boldsymbol{\eta}$ در رابطهٔ (۱۳) به دســـت می‌آید. با جایگذاری عبارت فوق در رابطهٔ (۱۵) و استفاده از تبدیل وارون در رابطهٔ (۱۲) نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\lambda}\rho_d\left(\mathbf{z};\boldsymbol{\mu}_\lambda,\boldsymbol{\gamma}_\lambda,\boldsymbol{\Sigma}_\lambda,\boldsymbol{\eta}\right) &= \frac{1}{2}\mathrm{a}(\boldsymbol{\eta})\sum_{i,j=1}^{d}\left(\sigma'_{ij}-\sigma_{ij}\right)\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial z_j}\rho_d\left(\mathbf{z};\boldsymbol{\mu}_\lambda,\boldsymbol{\gamma}_\lambda,\boldsymbol{\Sigma}_\lambda,\boldsymbol{\eta}^*\right) \\ &\quad-\sum_{i=1}^{d}\left(\mu'_i-\mu_i\right)\frac{\partial}{\partial z_i}\rho_d\left(\mathbf{z};\boldsymbol{\mu}_\lambda,\boldsymbol{\gamma}_\lambda,\boldsymbol{\Sigma}_\lambda,\boldsymbol{\eta}\right) \\ &\quad-\mathrm{a}(\boldsymbol{\eta})\sum_{i=1}^{d}\left(\gamma'_i-\gamma_i\right)\frac{\partial}{\partial z_i}\rho_d\left(\mathbf{z};\boldsymbol{\mu}_\lambda,\boldsymbol{\gamma}_\lambda,\boldsymbol{\Sigma}_\lambda,\boldsymbol{\eta}^*\right). \end{aligned}$$

با جایگذاری عبارت فوق در رابطهٔ (۱۲) و سپس انتگرالگیری جزء به جزء و در نظر گرفتن شرایط $\mathrm{f}(\mathbf{x})=O(\|\mathbf{x}\|)$ و $\nabla_{\mathrm{f}(\mathbf{x})}=O(\|\mathbf{x}\|)$ زمانی که $\|\mathbf{x}\|\to\infty$، اتحاد مورد نظر در لم ۲ به دست می‌آید. □

لازم به ذکر است که در تعریف ترتیب‌های تصادفی انتگرالی و هسیان، هیچ شرط هموار بودن برای تابع $\mathbf{f}$ در برقراری رابطهٔ (۳) لازم نیست. اما دنویی و مولر (۲۰۰۲) نشان دادند که برای برقراری این نوع ترتیب‌های تصادفی، کافی‌ست رابطهٔ (۳) برای توابع مشتق‌پذیر $\mathbf{f}$ برقرار باشد. بر این اساس در برقراری ترتیب‌های تصادفی انتگرالی، شرط مشتق‌پذیر بودن تابع $\mathbf{f}$ محدودیتی را ایجاد نمی‌نماید. همچنین سایر شرایط در نظر گرفته شده در لم ۲، شرایط وجود امید ریاضی در تعریف ترتیب تصادفی می‌باشند و بنابراین شرایط ضعیفی محسوب می‌شوند.

در خانواده‌های چوله-تی ($\alpha<\cdot,\chi>\cdot,\psi=\cdot$) و واریانس-گاما ($\alpha>\cdot,\chi=\cdot,\psi>\cdot$)،

$$\mathrm{a}(\alpha,\chi,\cdot)=\frac{\chi}{\text{۱}-\alpha},\quad \mathrm{a}(\alpha,\cdot,\psi)=\frac{\alpha}{\psi}.$$

با استفاده از لم ۲ شرایط کافی برای ترتیب‌های انتگرالی در تعریف ۶ نیز به صورت زیر به دست می‌آیند.

فرع ۱. فرض کنید $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ بردارهای تصادفی GH در رابطهٔ (۱۰) باشند و F شامل توابع $\mathbf{f}:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$. اگر شرایط زیر برقرار باشند:

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{\mu}'-\boldsymbol{\mu})^T\nabla_{\mathrm{f}(\mathbf{x})}\geq\cdot,\\&(\boldsymbol{\gamma}'-\boldsymbol{\gamma})^T\nabla_{\mathrm{f}(\mathbf{x})}\geq\cdot,\\&trace\left[(\boldsymbol{\Sigma}'-\boldsymbol{\Sigma})\mathbf{H}_{\mathrm{f}(\mathbf{x})}\right]\geq\cdot,\end{aligned}$$

آنگاه $E[\mathrm{f}(\mathbf{X})]\leq E[\mathrm{f}(\mathbf{Y})]$ به ازای هر $\mathrm{f}\in\mathsf{F}$.

۴. شرایط لازم و کافی برای ترتیب‌های هسیان

در قضیهٔ زیر شرایط لازم و کافی برای برقراری ترتیب‌های تصادفی هسیان دو بردار تصادفی در خانوادهٔ GH در حالت‌های با بردار مکان و چولگی یکسان ارائه می‌شوند. در ادامهٔ این مقاله فرض می‌کنیم $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ بردارهای تصادفی GH در رابطهٔ (۱۰) با بردارهای چولگی یکسان $(\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}')$ و نیز $\mathbf{X}^*$ و $\mathbf{Y}^*$ بردارهای تصادفی GH در رابطهٔ (۱۰) با بردارهای مکان یکسان $(\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}')$ باشند.

قضیهٔ ۱. فرض کنید H یک مخروط محدب بسته از فضای S باشد. آن‌گاه

۱) $\mathbf{X}\preceq_{\mathsf{F}_{\mathsf{H}}}\mathbf{Y}$ اگر و تنها اگر $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}'$ و $\boldsymbol{\Sigma}'-\boldsymbol{\Sigma}\in\mathsf{H}^*$.

۲) $\mathbf{X}^*\preceq_{\mathsf{F}_{\mathsf{H}}}\mathbf{Y}^*$ اگر و تنها اگر $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}'$ و $\boldsymbol{\Sigma}'-\boldsymbol{\Sigma}\in\mathsf{H}^*$.

اثبات. قسمت "۱)": شرایط $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}'$ و $\boldsymbol{\Sigma}'-\boldsymbol{\Sigma}\in \mathrm{H}^*$ و نیز $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}'$ شرایط فرع ۱ را برقرار می‌سازند و ترتیب تصادفی $\mathbf{X}\preceq_{\mathrm{F_H}}\mathbf{Y}$ را نتیجه می‌دهند. حال فرض کنید $\mathbf{X}\preceq_{\mathrm{F_H}}\mathbf{Y}$ که در این حالت $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}'$ است. بر اساس لم ۱، باید $E(\mathbf{X})=E(\mathbf{Y})$ و $Cov(\mathbf{Y})-Cov(\mathbf{X})\in \mathrm{H}^*$ برقرار باشند. با استفاده از رابطهٔ (۵) شرایط لازم $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}'$ و $\boldsymbol{\Sigma}'-\boldsymbol{\Sigma}\in \mathrm{H}^*$ به دست می‌آیند.

قسمت "۲)" : مشابه قسمت "۱)" قابل اثبات است.

□

از قضیهٔ ۱ و لم ۲، می‌توان شرایط لازم و کافی در فرع زیر برای مقایسهٔ بردارهای تصادفی از خانوادهٔ GH متقارن (خانوادهٔ GH با بردار چولگی صفر) براساس ترتیب هسیان را به دست آورد.

فرع۲. فرض کنید $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ بردارهای تصادفی از خانوادهٔ توزیع‌های خانوادهٔ GH متقارن به ترتیب با بردارهای مکان $\boldsymbol{\mu}$ و $\boldsymbol{\mu}'$ و ماتریس‌های پراکندگی $\boldsymbol{\Sigma}$ و $\boldsymbol{\Sigma}'$ باشند و H مخروط محدب بسته از فضای S باشد. آن‌گاه $\mathbf{X}\preceq_{\mathrm{F_H}}\mathbf{Y}$ اگر و تنها اگر $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}'$ و $\boldsymbol{\Sigma}'-\boldsymbol{\Sigma}\in \mathrm{H}^*$.

با استفاده از قضیهٔ ۱ و مخروط‌های محدب بسته داده شده در ملاحظهٔ ۱ و دوگان‌های آنها، می‌توان شرایط لازم و کافی زیر را برای ترتیب‌های مختلف هسیان در خانواده توزیع‌های GH با بردار چولگی یکسان به صورت زیر به دست آورد.

فرع ۳.

۱) $\mathbf{X}\preceq_{cx}\mathbf{Y}$ اگر و تنها اگر $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}'$ و $\boldsymbol{\Sigma}'-\boldsymbol{\Sigma}$ نیمه‌معین‌مثبت باشد،

۲) $\mathbf{X}\preceq_{ccx}\mathbf{Y}$ اگر و تنها اگر $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}'$، $\sigma_{ii}=\sigma'_{ii}$ و $\sigma_{ij}=\sigma'_{ij}$.

۳) $\mathbf{X}\preceq_{dcx}\mathbf{Y}$ اگر و تنها اگر $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}'$ و $\sigma_{ij}\le\sigma'_{ij}$.

۴) $\mathbf{X}\preceq_{sm}\mathbf{Y}$ اگر و تنها اگر $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}'$ و $\sigma_{ii}=\sigma'_{ii}$ و $\sigma_{ij}\le\sigma'_{ij}$.

۵) $\mathbf{X}\preceq_{cop}\mathbf{Y}$ اگر و تنها اگر $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}'$ و $\boldsymbol{\Sigma}'-\boldsymbol{\Sigma}$ کاملاً مثبت باشد.

۶) $\mathbf{X}\preceq_{cp}\mathbf{Y}$ اگر و تنها اگر $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}'$ و $\boldsymbol{\Sigma}'-\boldsymbol{\Sigma}$ هم‌مثبت باشد.

اثبات. مخروط متناظر (H) در ترتیب‌های "۱) تا ۶)" به ترتیب عبارتند از $\mathrm{C_{psd}}$، $\mathrm{C_{+diag}}$، $\mathrm{C_{+}}$، $\mathrm{C_{+off}}$، $\mathrm{C_{cop}}$ و $\mathrm{C_{cp}}$ که در ملاحظهٔ ۱ تعریف شدند. براساس قضیهٔ ۱، شرایط لازم و کافی برای برقراری هر یک از این ترتیب‌ها عبارتند از $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}'$ و $\boldsymbol{\Sigma}'-\boldsymbol{\Sigma}\in \mathrm{H}^*$. از دوگان مربوط به هر یک از مخروط‌های موارد "۱) تا ۶)" در ملاحظهٔ ۱ نتیجه مورد نظر به دست می‌آید. □

ترتیب‌های داده شده در فرع ۳ را به طور مشابه می‌توان برای خانوادهٔ توزیع‌های GH با بردار میانگین یکسان به دست آورد. شرط لازم و کافی برای مقایسهٔ بردارهای تصادفی $\mathbf{X}^*$ و $\mathbf{Y}^*$ براساس ترتیب‌های داده شده در فرع ۳ با قراردادن $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}'$ به جای $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}'$ به دست می‌آیند.

در قضیهٔ زیر، نشان می‌دهیم که ترتیب‌های محدب، محدب خطی و محدب خطی صعودی در خانوادهٔ توزیع‌های GH با بردار چولگی یکسان معادل یکدیگرند.

قضیهٔ ۲. موارد زیر با هم معادل می‌باشند:

۱) $\mathbf{X}\preceq_{cx}\mathbf{Y}$،

۲) $\mathbf{X}\preceq_{lcx}\mathbf{Y}$،

۳) $\mathbf{X}\preceq_{ilcx}\mathbf{Y}$.

اثبات. برا ساس نتایج کلی ترتیب‌های تصادفی در اسکار سینی (۱۹۹۸)، ترتیب‌های "۲)" و "۳)" معادل یکدیگرند و برقراری ترتیب تصادفی "۱)" منجر به برقراری ترتیب تصادفی در "۲)" می‌شود. بنابراین کافی‌ست نشان دهیم که ترتیب تصادفی در "۱)" از ترتیب تصادفی در "۲)" به دست می‌آید. برای این کار فرض می‌کنیم $\mathbf{X}\preceq_{lcx}\mathbf{Y}$. در این صورت $X_i\preceq_{cx}Y_i$ و نیز $-X_i\preceq_{cx}-Y_i$. بنابراین $E(\mathbf{X})=E(\mathbf{Y})$ که در آن $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}'$ است و از رابطهٔ (۵) شرط $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}'$ به دست می‌آید. همچنین تابع محدب $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را به صورت $g(t)=t$ در نظر می‌گیریم. بنابراین ترتیب محدب برای $\mathrm{g}(\langle\mathbf{a},\mathbf{x}\rangle)=\mathbf{a}^T\mathbf{x}$ به ازای هر $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^d$ برقرار است یعنی $\mathbf{a}^T\mathbf{X}\preceq_{cx}\mathbf{a}^T\mathbf{Y}$. پس $\mathrm{Var}(\mathbf{a}^T\mathbf{X})\le\mathrm{Var}(\mathbf{a}^T\mathbf{Y})$ و سپس از رابطهٔ (۵) نتیجه می‌شود $\mathbf{a}^T(\boldsymbol{\Sigma}'-\boldsymbol{\Sigma})\mathbf{a}\ge 0$، یعنی $\boldsymbol{\Sigma}'-\boldsymbol{\Sigma}$ نیمه‌معین‌مثبت است. با استفاده از فرع ۳ ترتیب $\mathbf{X}\preceq_{cx}\mathbf{Y}$ به دست می‌آید. □

به طور مشابه می‌توان نشان داد که ترتیب‌های داده شده در قضیهٔ ۲ در خانواده توزیع‌های GH با بردار مکان یکسان نیز معادل یکدیگرند، به عبارتی دیگر در قضیهٔ ۲ به جای بردارهای تصادفی $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ می‌توانیم بردارهای $\mathbf{X}^*$ و $\mathbf{Y}^*$ را قرار دهیم.

ترتیب $plcx$ نیز دارای اهمیت و کاربرد زیادی به ویژه در زمینهٔ اقتصاد می‌باشد. در قضیهٔ زیر این ترتیب معادل با یکی از ترتیب‌های هسیان بیان شده است. نتیجه برای بردارهای تصادفی GH با بردار چولگی یکسان بیان شده است. نتیجهٔ مشابه برای بردارهای تصادفی با بردار مکان یکسان یعنی $\mathbf{X}^*$ و $\mathbf{Y}^*$ نیز به دست می‌آید.

قضیهٔ ۳. $\mathbf{X}\preceq_{plcx}\mathbf{Y}$ اگر و تنها اگر $\mathbf{X}\preceq_{cp}\mathbf{Y}$.

اثبات. نخست فرض کنیم $\mathbf{X}\preceq_{plcx}\mathbf{Y}$. توابع محدب حقیقی $g_1(t)=t$ و $g_2(t)=-t$ را در نظر می‌گیریم. بنابراین از $\mathrm{E}(\mathrm{g}_1(\langle\mathbf{a},\mathbf{X}\rangle))\le\mathrm{E}(\mathrm{g}_1(\langle\mathbf{a},\mathbf{Y}\rangle))$ و $\mathrm{E}(\mathrm{g}_2(\langle\mathbf{a},\mathbf{X}\rangle))\le\mathrm{E}(\mathrm{g}_2(\langle\mathbf{a},\mathbf{Y}\rangle))$، به ازای هر $\mathbf{a}\in\mathbb{R}_+^d$، یکسان بودن میانگین‌های $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ نتیجه می‌شود و سپس با قرار دادن $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}'$ در رابطهٔ (۵) شرط $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}'$ به دست می‌آید. همچنین از $\mathrm{Var}(\mathrm{g}_1(\langle\mathbf{a},\mathbf{X}\rangle))\le\mathrm{Var}(\mathrm{g}_2(\langle\mathbf{a},\mathbf{Y}\rangle))$، به ازای هر $\mathbf{a}\in\mathbb{R}_+^d$، نتیجه می‌شود که $\mathbf{a}^T(\boldsymbol{\Sigma}'-\boldsymbol{\Sigma})\mathbf{a}\ge 0$ یعنی $\boldsymbol{\Sigma}'-\boldsymbol{\Sigma}$ هم‌مثبت است. با استفاده از فرع ۳ ترتیب $\mathbf{X}\preceq_{cp}\mathbf{Y}$ به دست می‌آید.

بالعکس فرض می‌کنیم $\mathbf{X}\preceq_{cp}\mathbf{Y}$. با استفاده از فرع ۳، نتیجه می‌شود که $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}'$ و $\boldsymbol{\Sigma}'-\boldsymbol{\Sigma}$ هم‌مثبت است. حال فرض می‌کنیم $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی محدب باشد. به ازای هر $\mathbf{a}\in\mathbb{R}_+^d$ قرار می‌دهیم $\mathrm{f}(\mathbf{x})=\mathrm{g}(\langle\mathbf{a},\mathbf{x}\rangle)$ که ماتریس هسیان آن به صورت $\mathbf{H}_{\mathrm{f}(\mathbf{x})}=g^{(2)}(\langle\mathbf{a},\mathbf{x}\rangle)\mathbf{a}\mathbf{a}^T$ به دست می‌آید. بنابراین

$$trace\left[\left(\mathbf{\Sigma}'-\mathbf{\Sigma}\right)\mathbf{H}_{f(\mathbf{x})}\right]=g^{(2)}\left(\langle\mathbf{a},\mathbf{x}\rangle\right)\mathbf{a}^{T}\left(\mathbf{\Sigma}'-\mathbf{\Sigma}\right)\mathbf{a}\geq 0$$

که $g^{(2)}(u)=\frac{d^2}{du^2}g(u)$. پس شرایط فرع ۱برقرار است و $E\left[g\left(\langle\mathbf{a},\mathbf{X}\rangle\right)\right]\leq E\left[g\left(\langle\mathbf{a},\mathbf{Y}\rangle\right)\right]$ یعنی $\mathbf{X}\preceq_{plcx}\mathbf{Y}$. □

در نتیجهٔ زیر ترتیب $plcx$ در خانواده توزیع‌های GH متقارن (توزیع GH با بردار چولگی صفر) معادل با ترتیب cp بیان شده و شرایط معادل براساس پارامترهای آنها نیز به دست آمده است.

فرع ۴. فرض کنید $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ بردارهای تصادفی از خانوادهٔ توزیع‌های GH متقارن با بردارهای مکان $\boldsymbol{\mu}$ و $\boldsymbol{\mu}'$ و ماتریس‌های پراکندگی $\mathbf{\Sigma}$ و $\mathbf{\Sigma}'$ باشند. آن‌گاه موارد زیر با هم معادل هستند.

۱) $\mathbf{X}\preceq_{plcx}\mathbf{Y}$،

۲) $\mathbf{X}\preceq_{cp}\mathbf{Y}$،

۳) $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}'$ و $\mathbf{\Sigma}'-\mathbf{\Sigma}$ هم‌مثبت است.

اثبات. بردارهای تصادفی $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ حالت خاص بردارهای تصادفی $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ با بردارهای چولگی صفر می‌باشند. پس براساس قضیهٔ ۳ ترتیب‌های "۱)" و "۲)" معادل یکدیگرند. با استفاده از نتیجهٔ قسمت "۶)"در فرع ۳ نیز ترتیب تصادفی "۲)" با شرایط "۳)" معادلند. □

ملاحظهٔ ۴. با نتایج ارائه شده در قضیه‌های ۲-۳ می‌توان بردارهای تصادفی از طیف گسترده‌ای از توزیع‌های GH را با هم مقایسه کرد. همچنین معادل‌بودن ترتیب‌های چندمتغیره محدب و نیز هم‌مثبت با ترتیب‌های خطی، می‌تواند این مزیت را داشته باشد که مقایسه‌های چندمتغیره با ابعاد بالاتر را راحت‌تر و ساده‌تر بوسیله ترتیب‌های خطی انجام داد. این نتیجه به معنی کاهش بعد در مقایسه می‌باشد که از اهمیت ویژه‌ای در علوم مختلف برخوردار است. همچنین نتیجهٔ ارائه شده در فرع ۴ قابل استفاده برای طیف گسترده‌ای از توزیع‌های GH متقارن است. این نتیجه قابل استفاده در اغلب توزیع‌های بیضوی می‌باشد که در مقاله پان و همکاران (۲۰۱۶) به دست نیامده است.

۵. کاربردهای ترتیب تصادفی هسیان در خانوادهٔ توزیع‌های GH

در این بخش نتایج ترتیب تصادفی را در چارچوب مفصل[1]های GH ارائه می‌کنیم. مفصل‌ها ابزار بسیار مهمی در مطالعهٔ ساختار وابستگی بردارهای تصادفی به شمار می‌روند که در دو دههٔ اخیر به طور فزاینده‌ای در زمینه‌های مختلف علوم مورد استفاده قرار گرفته‌اند. مفصل‌های GH در زمینه‌های اقتصادی به طور گسترده‌ای به کار می‌روند زیرا این نوع مفصل‌ها وابستگی و ساختار همبستگی را با درنظر گرفتن چولگی و برجستگی این نوع داده‌ها تحلیل می‌کنند. این توزیع‌ها می‌توانند در تحلیل ساختار همبستگی بین متغیرهای مورد مطالعه که دارای چولگی، دم سنگین یا هر دو باشند به کار گرفته شوند. با استفاده از نتایج ارائه شده در بخش ۴، می‌توان چند ویژگی وابسته به هم را در قالب یک

[1] Copula

بردار تصادفی با توزیعی از خانوادهٔ GH براساس ساختار همبستگی بین مؤلفه‌ها مرتب نمود. در این قسمت کاربردهایی از نتایج را در زمینه‌های علم بیمه و علم اقتصاد بیان می‌کنیم.

فرض کنید رده $\mathfrak{R}(F_1,F_2,\dots,F_d)=\mathfrak{R}_d$ شامل همهٔ بردارهای تصادفی $\mathbf{X}=(X_1,X_2,\dots,X_d)$ با شد که توابع توزیع تجمعی حاشیه‌ای X_1، ...، X_d به ترتیب تابع توزیع‌های مشخص F_1، ...، F_d می‌باشند. به رده $\mathfrak{R}_d$ فضای فرشه[1] گویند (فرشه، ۱۹۵۱).

اگر $\mathbf{X}=(X_1,X_2,\dots,X_d)\sim GH_d(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\Sigma},\boldsymbol{\eta})$، آن‌گاه با استفاده از ملاحظهٔ ۲، به ازای $\mathrm{i}=1,\dots,\mathrm{d}$،

$$X_i\sim GH_1(\mu_i,\gamma_i,\sigma_{ii},\boldsymbol{\eta}).$$

بدون کاستن از کلیت مسأله، فرض می‌کنیم $\mu_i=0$ و $\sigma_{ii}=1$. در این صورت ماتریس $\boldsymbol{\Sigma}$ یک ماتریس همبستگی بوده که آن را با $\boldsymbol{\rho}$ نمایش می‌دهیم. همچنین در مقایسه‌های تصادفی در خانوادهٔ GH در این مقاله بر اساس مفصل‌ها، شرط معادل بر اساس $\boldsymbol{\rho}$ بیان می شود که معادل با همین شرط براساس ماتریس همبستگی پیرسون می‌باشد، بدین معنی که در شرط‌های بیان شده، به جای ρ_{ij} و ρ'_{ij} به ترتیب می‌توان $Corr(X_i,X_j)$ و $Corr(Y_i,Y_j)$ را قرار داد. به دلیل تشخیص تمایز ماتریس همبستگی $\boldsymbol{\rho}$ از ماتریس همبستگی پیرسون، به آن ماتریس همبستگی تعمیم یافته گوییم (لاندسمان و زانکس، ۲۰۰۶).

با استفاده از قضیهٔ اسکلار (اسکلار، ۱۹۵۹)، تابع مفصل یکتای C موجود است به طوری‌که

$$F(x_1,x_2,\dots,x_d;\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\rho})=C\big(F_1(x_1;\gamma_1,\boldsymbol{\eta}),\dots,F_d(\mathrm{x}_d;\gamma_d,\boldsymbol{\eta});\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\rho}\big)$$

که در آن $F_i(t;\gamma_i,\boldsymbol{\eta})$ تابع توزیع حاشیه‌ای X_i و $F(x_1,x_2,\dots,x_d;\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\rho})$ تابع توزیع توام X_i ها است. بنابراین به عنوان یک نتیجه می‌توانیم تابع $C:[0,1]^d\to[0,1]$ را که به صورت

$$C(u_1,u_2,\dots,u_d;\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\rho})=F\big(F_1^{-1}(u_1;\gamma_1,\boldsymbol{\eta}),\dots,F_d^{-1}(u_d;\gamma_d,\boldsymbol{\eta});\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\rho}\big)$$

تعریف می‌شود تابع مفصل توزیع GH در نظر بگیریم که در آن $F_i^{-1}(\cdot;\gamma_i,\boldsymbol{\eta})$ تابع چندک مربوط به X_i است.

فرض کنید توزیع بردارهای تصادفی $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ متعلق به خانوادهٔ توزیع‌های GH بوده و در فضای $\mathfrak{R}_d$ باشند یعنی

$$\begin{aligned}F_{\mathbf{X}}(x_1,\dots,x_d;\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\rho})&=C\big(F_1(x_1;\gamma_1,\boldsymbol{\eta}),\dots,F_d(\mathrm{x}_d;\gamma_d,\boldsymbol{\eta});\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\rho}\big),\\ F_{\mathbf{Y}}(y_1,\dots,y_d;\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\rho}')&=C\big(F_1(y_1;\gamma_1,\boldsymbol{\eta}),\dots,F_d(y_d;\gamma_d,\boldsymbol{\eta});\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\rho}'\big).\end{aligned}\qquad(۱۶)$$

بنابراین تمام مقایسه‌های تصادفی فقط براساس ساختار همبستگی بردارهای $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ یعنی $\boldsymbol{\rho}$ و $\boldsymbol{\rho}'$ انجام می‌گیرند.

۱,۵ ترتیب تصادفی زیان-بس

ترتیب تصادفی محدب صعودی یک متغیره در علوم احصائی و نیز بیمه ترتیب تصادفی زیان-بس[2] نامیده می شود. تبدیل زیان-بس متغیر تصادفی X به صورت $\pi_X(t)=E\big(max\{\mathrm{X}-\mathrm{t},0\}\big)$ تعریف می‌شود. دلیل نام‌گذاری این

---
[1] Fréchet space
[2] Stop-loss

ترتیب با زیان-بس این ست که ترتیب برقرار ا ست اگر و تنها اگر ترتیب تبدیل زیان-بس برقرار با شد. این ترتیب با $\preceq_{sl}$ نمایش داده می‌شــود. بنابراین $X \preceq_{sl} Y$ اگر و تنها اگر $\pi_X(t) \le \pi_Y(t)$ به ازای هر $t \in \mathbb{R}$. اگر $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ دو ویژگی مخاطره‌آمیز باشــند، آن‌گاه $X \preceq_{sl} Y$ به معنی این‌ســت که مخاطره‌آمیزی $\mathbf{X}$ از $\mathbf{Y}$ کمتر بوده و بنابراین ترجیح داده می‌شود. برای مطالعهٔ بیشتر در این مورد به دنویی و همکاران (۲۰۰۵) مراجعه نمایید.

یک مجموعه شامل d بیمه نامه عمر با مقادیر وابسته X_1، X_2، ...، X_d در فضای $<_d$ را در نظر بگیرید که هر بیمه دارای مبالغی در طول دورهٔ معینی مثلاً یک ســاله برای رخداد مرگ بیمه‌گذار هســتند. در این صــورت کل مطالبات مجموعــه در طول دوره برابر بــا مجموع مقــادیر قــابــل پرداخــت بــه هر یــک از d بیمــه‌گــذار اســــت یعنی $S = X_1 + X_2 + ... + X_d$. یافتن توزیع و شــرایط برای مقایســهٔ کمیت‌های مرتبط با S بویژه تبدیل زیان-بس از مباحث اصلی نظریهٔ مخاطرهٔ فردی[1] است (دهاون و گوارتز، ۱۹۹۷).

در قضیهٔ زیر مخاطره‌آمیز بودن مجموعه‌ها براساس ترتیب متوسط همبستگی درون مجموعه‌ها به صورت معادل تبیین شده است.

قضیهٔ ۴. فرض کنید بردارهای تصادفی $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ در رابطهٔ (۱۶) و به ترتیب دارای مجموع‌های S و S' باشند. آن‌گاه $S \preceq_{sl} S'$ اگر و تنها اگر $\bar{\boldsymbol{\rho}} \le \bar{\boldsymbol{\rho}}'$، که

$$\bar{\boldsymbol{\rho}} = \frac{\sum_{i,j=1}^{d} \rho_{ij}}{d^2}, \quad \bar{\boldsymbol{\rho}}' = \frac{\sum_{i,j=1}^{d} \rho'_{ij}}{d^2},$$

به ترتیب میانگین ماتریس‌های همبستگی $\boldsymbol{\rho}$ و $\boldsymbol{\rho}'$ می‌باشند و d بعد بردارهای تصادفی $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ می‌باشد.

اثبات. با استفاده از ملاحظهٔ ۲،

$$S \sim GH_1\left(\cdot, d\bar{\boldsymbol{\gamma}}, d^2\bar{\boldsymbol{\rho}}, \boldsymbol{\eta}\right),\ S' \sim GH_1\left(\cdot, d\bar{\boldsymbol{\gamma}}, d^2\bar{\boldsymbol{\rho}}', \boldsymbol{\eta}\right),$$

که در آن

$$d\,\bar{\boldsymbol{\gamma}} = \sum_{i}^{d} \gamma_i,\ \ d^2\,\bar{\boldsymbol{\rho}} = \sum_{i,j=1}^{d} \rho_{ij},\ d^2\,\bar{\boldsymbol{\rho}}' = \sum_{i,j=1}^{d} \rho'_{ij},$$

می‌با شند. همچنین $S \preceq_{cx} S'$ اگر و تنها اگر $S \preceq_{icx} S'$ و $E(S) = E(S')$ (شیکید و شانتیکومار، ۲۰۰۷). همچنین با اســتفاده از فرع ۳ ترتیب $S \preceq_{cx} S'$ برقرار اســت اگر و تنها اگر $\bar{\boldsymbol{\rho}} \le \bar{\boldsymbol{\rho}}'$. $E(S) = E(S')$ نیز برقرار بوده و بنابراین $S \preceq_{icx} S'$ و $\bar{\boldsymbol{\rho}} \le \bar{\boldsymbol{\rho}}'$ معادل یکدیگراند. از معادل بودن $S \preceq_{icx} S'$ و $S \preceq_{sl} S'$ نتیجهٔ مورد نظر به دســـت می‌آید.
□

بنابراین هرچه اع ضای یک مجموعهٔ مخاطره‌آمیز دارای همب ستگی بی شتری با شند، سطح مخاطره‌آمیزی کل آنها نیز افزایش می‌یابد.

ملاحظهٔ ۵. با استفاده از نتیجهٔ داده شده در قضیهٔ ۴ می‌توان مخاطره‌آمیزی مجموعه‌های مختلف با درجات مختلفی از چولگی و نیز برجستگی مؤلفه‌ها را با استفاده از طیف گسترده‌ای از توزیع‌های GH، بر اساس ترتیب تصادفی زیان-بس، برحسب متوسط همبستگی مجموعه‌ها مقایسه کرد. دهاون و گوارتز (۱۹۹۶) مخاطره‌آمیزی مجموعه‌های با دو مؤلفه با

[1] Individual risk theory

مقادیر مثبت را در نظر گرفتند و نشـان دادند که ترتیب زیان-بس مجموعه با ترتیب همبستگی در مجموعه‌ها معادل است. لاند سمان و زانکس (۲۰۰۶) نتیجهٔ مشابهی در حالت دومتغیره برای توزیع‌های بیضوی به دست آوردند. نتیجهٔ ارائه شده در قضیهٔ ۴، از حیث ابعاد مجموعه و چولگی یا چولگی توام با برجستگی در مؤلفه‌ها در طیف وسیع‌تری برقرار است.

۲٫۵ ترتیب سوپرمدولار و محدب خطی مثبت

این نوع ترتیب‌ها در زمینه‌های مختلف دارای کاربرد می‌باشند. ترتیب تصادفی سوپرمدولار تنها ساختار وابستگی بین مؤلفه‌های بردارهای تصادفی را با حاشیه‌های یکسان در نظر می‌گیرد. در زمینه‌های مختلفی که احتیاج به مقایسه ساختار وابستگی باشد از این نوع ترتیب استفاده می‌شود. بی‌ارل (۱۹۹۷) و میستر و شانتیکومار (۱۹۹۳)، موزلر (۱۹۸۴) و مولر و اسکارسینی (۲۰۰۱) کاربرد این نوع ترتیب را در مدل‌های تصادفی و تحقیق در عملیات و بی‌ارل و مولر (۱۹۹۸) و مولر (۱۹۹۷b) در علوم احصائی و بیمه بیان کردند. در این قسمت، نخست به بررسی ترتیب plcx و سوپرمدولار و ارتباط آنها با هم می‌پردازیم.

قضیهٔ ۵. بردارهای تصادفی $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ از توزیع GH در رابطهٔ (۱۶) را در نظر بگیرید. آن‌گاه موارد زیر معادل یکدیگرند:

۱) $\mathbf{X} \preceq_{plcx} \mathbf{Y}$،

۲) $\rho_{ij} \le \rho'_{ij}$،

۳) $\mathbf{X} \preceq_{sm} \mathbf{Y}$.

اثبات. با استفاده از فرع ۴، ترتیب‌های $\mathbf{X} \preceq_{plcx} \mathbf{Y}$ و $\mathbf{X} \preceq_{cp} \mathbf{Y}$ معادل یکدیگراند. همچنین $\mathbf{X} \preceq_{cp} \mathbf{Y}$ اگر و تنها اگر $\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}$ هم‌مثبت باشد. اگر $\rho_{ij} \le \rho'_{ij}$ آن‌گاه $\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}$ هم‌مثبت است. بالعکس اگر $\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}$ هم‌مثبت باشد، بردار $\mathbf{a}$ را طوری درنظر بگیرید که درایه‌های i و j آن برابر یک و سایر درایه‌ها برابر صفر باشند. در این صورت

$$\mathbf{a}^T \left(\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}\right)\mathbf{a} = ۲\left(\rho'_{ij} - \rho_{ij}\right) \ge ۰,$$

و بنابراین $\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}$ هم‌مثبت است اگر و فقط اگر $\rho_{ij} \le \rho'_{ij}$. پس عبارت‌های "۱)" و "۲)" معادل یکدیگراند. با استفاده از فرع ۳، عبارت‌های "۲)" و "۳)" نیز معادل می‌باشند.
□

اگر بستهٔ تصادفی از d کالا انتخاب نماییم و $\mathbf{X} = \left(X_۱, X_۲, \ldots, X_d\right)$ مقادیر این کالاها (مثلاً وزن، حجم، تعداد و...) و $\boldsymbol{\pi} = \left(\pi_۱, \pi_۲, \ldots, \pi_d\right)$ قیمت آنها باشد، آن‌گاه ارزش کل بسته برابر با $\langle \boldsymbol{\pi}, \mathbf{X} \rangle$ می‌باشد. وجود اختلاف بین مقادیر در بسته‌های یکسان یک فرض رایج در اقتصاد می‌باشد. بنابراین منطقی است که ارزش کل بسته‌های مختلف از d کالا را به صورت تصادفی با هم مقایسه نماییم. فرض می‌کنیم بردارهای تصادفی $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ هر کدام شامل مقادیری از یک بستهٔ تصادفی شامل d کالای یکسان باشند. در این صورت با مقایسهٔ $\langle \boldsymbol{\pi}, \mathbf{X} \rangle$ و $\langle \boldsymbol{\pi}, \mathbf{Y} \rangle$ می‌توانیم ارزش بسته‌ها را با هم مقایسه کنیم. از آن‌جایی که قیمت‌ها ثابت نیستند و بسته به شرایط بازار و عوامل مختلف ممکن است تغییر نمایند، منطقی است ارزش دو بسته $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ را با قیمت‌های نامشخص مقایسه نماییم، یعنی

$\boldsymbol{\pi}=\left(\pi_{۱},\pi_{۲},...,\pi_{d}\right)\in\mathbb{R}_{+}^{d}$ (مولی‌ار و اســکارســینی، ۱۹۸۹). این مقایســه، همان ترتیب خطی مثبت خواهد بود. در حوزهٔ اقتصاد، ترتیب محدب از جایگاه اساسی و مهمی برخوردار است و بر اساس آن نوسانات و تغییرات متغیرهای اقتصادی را تجزیه و تحلیل و مقایسه می‌کنند. بنابراین مقایسه تصادفی فوق همان ترتیب $plcx$ می‌باشد که در این مورد، مطالعه تغییرات بر اساس ساختار وابستگی نیز مهم خواهد بود.

ملاحظهٔ ۶. براساس نتیجه به دست آمده در قضیهٔ ۵، با افزایش (کاهش) همبستگی و هماهنگی بین مؤلفه‌های یک بســته، مخاطره‌آمیزی ارزش کل بســته نیز افزایش (کاهش) می‌یابد و بالعکس. بنابراین بســته‌های با همبســتگی کمتر مؤلفه‌ها از نظر مخاطره‌آمیزی ترجیح داده می‌شوند. وقتی که مؤلفه‌های بسته‌ها دارای چولگی و برجستگی و یا هردو در توزیع فراوانی خود باشــند، در نظر گرفتن توزیع‌های متقارن نظیر نرمال یا به طور کلی توزیع‌های بیضــوی کار درســتی نخواهد بود. از این نظر نتیجهٔ قضیهٔ ۵ در سطح بسیار گسترده‌ای از خانواده‌های GH قابل استفاده‌اند. این نتیجه در مورد غالب توزیع‌های بیضوی نیز برقرار است و در این حوزه نیز نتیجهٔ جدید و قابل توجهی خواهد بود.

در پایان این مقاله، مطالعهٔ موردی در زمینهٔ بازدهٔ ســرمایه را در نظر می‌گیریم و نتیجهٔ قضــیهٔ ۵ را بر اســاس آن تحلیل می‌کنیم.

کریستوفرسن و همکاران (۲۰۱۲) الگوها و روندهای همبستگی و وابستگی در بازارهای کشورهای توسعه یافته و بازارهای کشــورهای در حال توســعه را مطالعه نمودند. به دلیل وجود چولگی و برجســتگی در توزیع فراوانی مربوط به کشورها، از مفصل چوله-تی (حالت خاص GH) برای تحلیل تغییرات همبستگی‌ها در طول زمان استفاده کردند. آنها مقادیر بازده هفتگی بازار هر یک از کشورها را در بازهٔ زمانی سال ۱۹۷۳ تا ۲۰۰۹ را در نظر گرفتند. در این بررسی ۱۶ کشور توسعه یافته و ۱۷ کشور در حال توسعه مورد مطالعه قرار گرفتند. آنها نشان دادند که همبستگی‌های بازده در بین مجموعهٔ کشورهای توسعه یافته و نیز در بین مجموعهٔ کشورهای درحال توسعه در طول زمان دارای روند صعودی معناداری بوده است. همچنین نشان دادند روند افزایشی برای کشورهای توسعه یافته از شدت بیشتری در مقایسه با کشورهای در حال توسعه برخوردار بوده است.

فرض می‌کنیم $\mathbf{D}(t)=\left(D_{۱}(t),D_{۲}(t),...,\mathrm{D}_{۱۶}(t)\right)$ و $\mathbf{E}(t)=\left(E_{۱}(t),E_{۲}(t),....,E_{۱۷}(t)\right)$ بــه ترتیــب بازده‌های مربوط به کشورهای توسعه یافته و کشورهای درحال توسعه در سال t باشد. همچنین ماتریس همبستگی $\mathbf{D}(t)$ و $\mathbf{E}(t)$ را بترتیب با $\boldsymbol{\rho}(\mathrm{t})$ و $\boldsymbol{\rho}^{*}(\mathrm{t})$ در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$\rho_{ij}(\mathrm{t})\leq\rho_{ij}(\mathrm{t+h}),\quad \rho^{*}_{ij}(\mathrm{t})\leq\rho^{*}_{ij}(\mathrm{t+h}),\quad h=۱,۲,...,۱۹۷۳\leq t<\mathrm{t+h}\leq ۲۰۰۹.$$

از قضیهٔ ۵ ترتیب‌های $\mathbf{D}(t)\preceq_{sm}\mathbf{D}(t+h)$ و $\mathbf{E}(t)\preceq_{sm}\mathbf{E}(t+h)$ به دست می‌آیند. توابع سوپرمدولار زیر را در نظر می‌گیریم (بلاک و همکاران، ۱۹۸۹):

$$\mathrm{f}_{۱}(\mathbf{x})=\min\{x_{۱},x_{۲},....,x_{d}\}=x_{(۱)},$$
$$\mathrm{f}_{۲}(\mathbf{x})=-\max\{x_{۱},x_{۲},....,x_{d}\}=-x_{(d)}.$$

بنابراین $E\left(D_{(۱)}(t)\right)\leq E\left(D_{(۱)}(t+h)\right)$ و $E\left(E_{(۱)}(t)\right)\leq E\left(E_{(۱)}(t+h)\right)$ یعنی انتظار می‌رود کمترین بازده در بین مجموعه کشورهای توسعه‌یافته و نیز در بین مجموعه کشورهای درحال‌توسعه سیر صعودی درطول زمان داشته اســت. همچنین $E\left(D_{(۱۶)}(t)\right)\geq E\left(D_{(۱۶)}(t+h)\right)$ و $E\left(E_{(۱۷)}(t)\right)\geq E\left(E_{(۱۷)}(t+h)\right)$ یعنی انتظار می‌رود

بیشترین بازده در بین مجموعه کشورهای توسعه‌یافته و نیز در بین مجموعه کشورهای درحال‌توسعه سیر نزولی در طول زمان داشته باشد. همچنین چون $\mathbf{f(x)=f_{۱}(x)+f_{۲}(x)}$ نیز یک تابع سوپرمدولار است بنابراین:

$$E\left(D_{(۱۶)}(t)-D_{(۱)}(t)\right)\geq E\left(D_{(۱۶)}(t+h)-D_{(۱)}(t+h)\right),$$
$$E\left(E_{(۱۶)}(t)-E_{(۱)}(t)\right)\geq E\left(E_{(۱۶)}(t+h)-E_{(۱)}(t+h)\right).$$

در نتیجه دامنه تغییرات بازده سهام در هر دو مجموعه در طول زمان کاهش یافته است. به دلیل روند صعودی سالیانه با شدت بیشتر در مجموعه کشورهای توسعه‌یافته، روند کاهش دامنه تغییرات بازده سهام در این مجموعه از شدت بیشتری در مقایسه با مجموعه کشورهای در حال‌توسعه داشته است.

به سادگی می‌توان نشان داد که $-S^{۲}(\mathbf{x})$ نیز یک تابع سوپرمدولار است که $S^{۲}(\mathbf{x})=\frac{\sum_{i=۱}^{d}(x_i-\overline{x})^{۲}}{d-۱}$ می‌باشد. پس

$$E\left[S^{۲}(\mathbf{D}(t))\right]\geq E\left[S^{۲}(\mathbf{D}(t+h))\right],$$
$$E\left[S^{۲}(\mathbf{E}(t))\right]\geq E\left[S^{۲}(\mathbf{E}(t+h))\right].$$

در نتیجه مقدار مورد انتظار واریانس بازده در بین هر دو مجموعه کشورها روند کاهشی در طول زمان داشته است.

۶. نتیجه‌گیری

در این نوشتار ترتیب تصادفی هسیان برای مقایسهٔ بردارهای تصادفی از خانوادهٔ توزیع‌های GH بررسی شد و شرایط کافی برای ترتیب‌های تصادفی متعددی به دست آمد. شرایط لازم و کافی برای ترتیب‌های تصادفی هسیان با درنظر گرفتن مخروط‌های محدب بسته و دوگان‌های مربوطه به دست آمدند. ترتیب‌های lcx و نیز $plcx$ به صورت معادل با ترتیب‌های چندمتغیره بیان شدند. در حالت خاص، نتایج این مقاله برای خانواده‌های GH متقارن قابل استفاده هستند. نتایج به دست آمده در مورد ترتیب‌های $plcx$ و ارتباط آنها با ترتیب‌های چندمتغیره برای خانوادهٔ آمیخته بر حسب مقیاس نرمال نوآوری محسوب شده و برای بسیاری از توزیع‌های بیضوی نیز می توانند مورد استفاده قرار گیرند. کاربردهایی از ترتیب تصادفی زیان-بس در بیمه و ترتیب‌های $plcx$ و سوپرمدولار در مبحث اقتصاد ارائه شدند. در پایان این مقاله، چند نکته را یادآور می‌شویم:

اتحاد ارائه شده در لم ۲ را می‌توان به خانوادهٔ توزیع‌های NMVM تعمیم داد که بر اساس آن شرایط کافی ترتیب‌های تصادفی انتگرالی و هسیان در فرع ۱ به دست می‌آیند. سایر نتایج ارائه شده در این مقاله را برای خانواده توزیع‌های NMVM نیز می‌توان به دست آورد. همچنین در حالت خاص $\gamma=\gamma'=0$ نتایج برای توزیع‌های آمیخته مقیاس نرمال چندمتغیره برقراراند. همچنین غالب توزیع‌های بیضوی نیز از خانواده آمیخته مقیاس نرمال می‌باشند. از این نظر، نتایج فوق در طیف گسترده‌تری از خانواده توزیع‌ها با چولگی و برجستگی دلخواه می‌توانند به‌کار روند.

References

1. Arlotto, A. and Scarsini, M., "Hessian orders and multinormal distributions", Journal of Multivariate Analysis, Vol. 100 (2009) 2324-2330.
2. Bäuerle, N., "Inequalities for stochastic models via supermodular orderings", Stochastic Models, vol. 13, Number 1 (1997) 181-201.
3. Baüerle, N. and Müller, A., "Modeling and comparing dependencies in multivariate risk portfolios", ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA, Vol. 28, Number 1 (1998) 59-76.
4. Bekele, B. N. and Thall, P. F., "Dose-finding based on multiple toxicities in a soft tissue sarcoma trial", Journal of the American Statistical Association, Vol. 99 (2004) 26-35.
5. Bibby, B. M. and Sorensen, M., "Hyperbolic processes in finance", In: Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance (Ed., S.T. Rachev), North-Holand, Amsterdam (2003) 211-248.
6. Block, H. W., Griffith, W. S. and Savits, T. H., "L-superadditive structure functions", Advances in applied probability, Vol. 21, Number 4 (1989) 919-929.
7. Cont, R. and Tankov, P., "Financial Modelling with Jump Processes", Chapman & Hall, London (2004).
8. Christoffersen, P., Errunza, V., Jacobs, K. and Langlois, H., "Is the potential for international diversification disappearing? A dynamic copula approach", The Review of Financial Studies, Vol. 25, Number 12, (2012) 3711-3751.
9. Denuit, M. and Müller, A., "Smooth generators of integral stochastic orders", The Annals of Applied Probability, Vol. 12, Number 4, (2002) 1174-1184.
10. Denuit, M., Dhaene, J. , Goovaerts, M. and Kaas, R., "Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models", John Wiley & Sons, West Sussex (2005).
11. Dhaene, J. and Goovaerts, M., "Dependency of risks and stop-loss order", ASTIN Bulletin, Vol. 26, Number 2 (1996) 201-212.
12. Dhaene, J. and Goovaerts, M. J., "On the dependency of risks in the individual life model", Insurance: Mathematics and Economics, Vol. 19, Number 3 (1997) 243-253.
13. Fréchet, M., "Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont donnés", Annales de l'Université de Lyon, Science, Vol. 4 (1951) 13-84.
14. Genton, M. G., "Skew-elliptical Distributions and Their Applications: A Journey Beyond Normality", Edited volume, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton (2004).

15. Jorgensen, B. (2012). "Statistical properties of the generalized inverse Gaussian distribution", Vol. 9, Springer Science & Business Media.

16. Landsman, Z. and Tsanakas, A., "Stochastic ordering of bivariate elliptical distributions", Statistics and Probability Letters, Vol. 76 (2006) 488-494.

17. Lucas, L. A. and Wright, F. T., "Testing for and against a stochastic ordering between multivariate multinomial populations", Journal of Multivariate Analysis, Vol. 38 (1991) 167-186.

18. McNeil A. J., Frey R., Embrechts, P., "Quantitative risk management: concepts, techniques, and tools", Revised ed, Princeton University Press, Princeton (2015).

19. Meester, L. E. and Shanthikumar, J. G., "Regularity of stochastic processes: a theory based on directional convexity", Probability in the Engineering and Informational Sciences, Vol. 7, Number 3 (1993) 343-360.

20. Motzkin, T. S., "Copositive quadratic forms", National Bureau of Standards Report 1952, (1818) 11-22.

21. Mosler, K., "Characterization of some stochastic orderings in multinormal and elliptic distributions", Operations research, Proceeding of the 12-th Annual Meeting in Mannheim 1983, (1984) 520-527.

22. Muliere, P. and Scarsini, M., "Multivariate decisions with unknown price vector", Economics Letters, Vol. 29, Number 1 (1989) 13-19.

23. Müller, A., "Stochastic orders generated by integrals: a unified study", Advances in Applied Probability, Vol. 29, Number 2 (1997a) 414-428.

24. Müller, A., "Stop-loss order for portfolios of dependent risks", Insurance: Mathematics and Economics, Vol. 21, Number 3 (1997b) 219-223.

25. Müller, A., "Stochastic ordering of multivariate normal distributions", Annals of the Institute of Statistical Mathematics, Vol. 53, Number 3 (2001) 567-575.

26. Müller, A., and Scarsini, M., "Some remarks on the supermodular order", Journal of Multivariate Analysis, Vol. 73, Number 1 (2000) 107-119.

27. Müller, A. and Scarsini, M., "Stochastic comparison of random vectors with a common copula", Mathematics of operations research, Vol. 26, Number 4 (2001) 723-740.

28. Müller, A. and Stoyan, D., "Comparison Methods for Stochastic Models and Risks", Vol. 389, Wiley, New York (2002).

29. Pan, X., Qiu, G. and Hu, T., "Stochastic orderings for elliptical random vectors", Journal of Multivariate Analysis, Vol. 148 (2016) 83-88.

30. Rydberg, T. H., "Generalized hyperbolic diffusion processes with applications in finance", Mathematical Finance, Vol. 9 (1999) 183-201.

31. Sampson, A. R. and Whitaker, L. R., "Estimation of multivariate distributions under stochastic ordering", Journal of the American Statistical Association, 84 (1989) 541-548.

32. Scarsini, M., "Multivariate convex orderings, dependence, and stochastic equality", Journal of Applied Probability, Vol. 35, Number 1 (1998) 93-103.

33. Shaked, M. and Shanthikumar, J. G., "Stochastic Orders and Their Applications", Academic Press, Boston (1994).

34. Shaked, M., and Shanthikumar, J. G., "Stochastic Orders", Springer, New York (2007).

35. Sklar, M., "Fonctions de repartition an dimensions et leurs marges", Publications de l'Institut de Statistique de L'Université de Paris, Vol. 8 (1959) 229-231.

36. Whitt, W., "Stochastic comparisons for non-Markov processes", Math. Operat. Res., Vol. 11 (1986) 608-618.

37. Yoshiba, T., "Maximum likelihood estimation of skew-t copulas with its applications to stock returns", Journal of Statistical Computation and Simulation, Vol. 88, Number 13 (2018) 2489-2506.

38. Barndorff-Nielsen, O. E. and Baesild, P., "Hyperbolic distributions and ramifications: Contributions to theory and applications", In C. Taillie, G. P. Patil, and B. A. Baldessari, editors, Statistical distributions in scientific work, D. Reidel, Amsterdam, Vol. 4 (1981) 19–44.

39. Baldessari, editors, "Statistical distributions in scientific work, D. Reidel, Amsterdam", Vol. 4 (1981) 19–44.