

# On the characteristic polynomial and the spectrum of Kragujevac trees

Abbas Heydari<sup>1</sup>  

1. Arak University of Technology, Arak, Iran. ✉ E-mail: heydari@arakut.ac.ir

## Article Info

**Article type:**  
Research Article

### Article history:

Received:  
3 November 2019  
Received in revised form:  
23 June 2021  
Accepted:  
13 September 2021  
Published online:  
3 December 2023

### Keywords:

Kragujevac tree,  
Characteristic polynomial,  
Spectrum,  
Laplacian Spectrum,  
Energy graph,  
Almost contact structure,  
B-metrics,  
Natural metric,  
Sphere bundle,  
Structure tensor.

## ABSTRACT

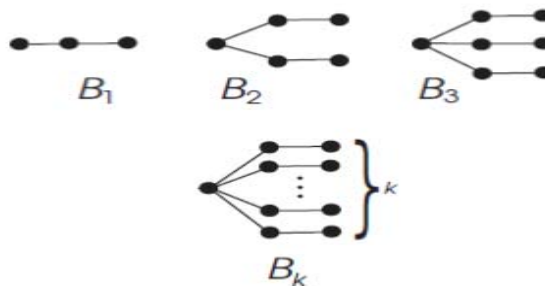
### Introduction

Let  $G$  be a simple connected graph with vertex set  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . The topological distance between vertices  $v_i$  and  $v_j$  of  $G$  is the length of a shortest path joining  $v_i$  and  $v_j$ . Let  $T$  be tree with  $k$  pendant (= vertices of degree one), labelled by  $v_1, v_2, \dots, v_k$ . The terminal distance matrix of  $T$ , is the square matrix of order  $k$  whose  $(i, j)$  -entry is the topological distance between  $v_i$  and  $v_j$ .

The class of Kragujevac trees emerged in several studies addressed to solve the problem of characterizing the molecular graphs with respect to some topological indices such as the atom-bond connectivity index.

**Definition 1.** Let  $P_3$  be the 3-vertex tree, rooted at one of its terminal vertices. For  $k = 2, 3, \dots$ , construct the rooted tree  $B_k$  by identifying the roots of  $k$  copies of  $P_3$ . The vertex obtained by identifying the roots of  $P_3$ -trees is the root of  $B_k$ .

**Definition 2.** Let  $d \geq 2$  be an integer. Let  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d$  be rooted trees specified in Definition 1. A Kragujevac tree  $T$  is a tree possessing a vertex of degree  $d$ , adjacent to the roots of  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d$ . This vertex is said to be the central vertex of  $T$ , whereas  $d$  is the degree of  $T$ . The subgraphs  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d$  are the branches of  $T$ . If all branches of  $T$  are isomorphic,  $T$  is called regular Kragujevac tree.



## Results and discussion

Let  $\Phi_G(\lambda)$  and  $P_G(\lambda)$  denote the characteristic polynomial of the adjacency matrix and the Laplacian matrix of  $G$ . The following results are obtained in this paper.

**Theorem 1.** Let  $k, d \geq 2$  and  $T_{k,d}$  be a regular Kragujevac tree of order  $k$  and degree  $d$ . Then

$$\begin{aligned}\Phi_{T_{k,d}}(\lambda) &= (\lambda^2 - 1)^{(k-1)d} [\lambda(\lambda^2 - k - 1)]^{d-1} (\lambda^4 - (k + d + 1)\lambda^2 + d), \\ P_{T_{k,d}}(\lambda) &= \lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 1)^{d(k-1)} (\lambda^3 - (k + 4)\lambda^2 + (2k + 4)\lambda \\ &\quad - 1)^{d-1} \\ &\quad (\lambda^3 - (k + d + 4)\lambda^2 + (kd + 2k + 3d + 4)\lambda - 2kd - d - 1).\end{aligned}$$

**Corollary 1.** Let  $T$  be a Kragujevac tree of degree  $d$ ,  $\rho$  denote the spectral radius and  $\Delta$  denote the maximum degree of (non-central) vertices of  $T$ , then

$$\rho \leq \sqrt{\frac{\Delta + d + 1 + \sqrt{(\Delta + d + 1)^2 - 4d}}{2}}.$$

**Corollary 2.** Let  $T$  be a Kragujevac tree of degree  $d$  and  $E(T)$  denote the energy of  $T$ , then

$$\begin{aligned}E(T) \leq & \sqrt{2\Delta + 2d + 2 + 2\sqrt{(\Delta + d + 1)^2 - 4\Delta}} \\ & + \sqrt{2\Delta + 2d + 2 + 2\sqrt{(\Delta + d + 1)^2 - 4\Delta}} \\ & + 2d(\Delta - 1) + 2(d - 1)\sqrt{\Delta - 1}.\end{aligned}$$

**Corollary 3.** Let  $k, d \geq 2$  and  $T_{k,d}$  be a regular Kragujevac tree of order  $k$  and degree  $d$ . The Kirshhof index of  $T_{k,d}$  is given as follows:

$$Kf(T_{k,d}) = -d^2(10k^2 + 7k + 1) - 4d(k^2 + k).$$

### Conclusion

- The characteristic polynomial of adjacency and Laplacian matrix of the regular Kragujevac tree of order  $k$  and degree  $d$  is computed.
- An upper bound for the spectral radius and the energy of the Kragujevac trees is obtained.
- The Kirshhof index of Kragujevac tree of order  $k$  and degree  $d$  is computed.

**How to cite:** Heydari, Abbas., (2023). On the characteristic polynomial and the spectrum of Kragujevac trees. *Mathematical Researches*, 9 (2), 63 - 74.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

## چندجمله‌ای مشخصه و طیف درخت کراگوجواچ

عباس حیدری<sup>۱</sup> ✉

۱. گروه علوم پایه، دانشگاه صنعتی اراک، اراک، ایران. ✉ [heydari@arakut.ac.ir](mailto:heydari@arakut.ac.ir)

چکیده	اطلاعات مقاله
درخت کراگوجواچ نوعی خاص از درخت‌های مورد استفاده در نمایش گراف‌های مولکولی است که در چند سال گذشته مورد توجه محققین در نظریه گراف قرار گرفته است. در این مقاله چندجمله‌ای مشخصه و طیف ماتریس‌های مجاورت و لاپلاسی درخت کراگوجواچ منتظم محاسبه می‌شود. به‌عنوان کاربردی از نتایج بدست آمده، یک کران بالا برای شعاع طیفی، انرژی و شاخص کیرشهوف درخت‌های کراگوجواچ محاسبه خواهد شد.	نوع مقاله: مقاله پژوهشی تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۸/۱۲ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۴/۲ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۶/۲۲ تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۹/۱۲
	واژه‌های کلیدی: درخت کراگوجواچ، چندجمله‌ای مشخصه، طیف، طیف لاپلاسی، انرژی گراف.

استناد: حیدری، عباس؛ (۱۴۰۲). چندجمله‌ای مشخصه و طیف درخت کراگوجواچ. پژوهش‌های ریاضی، ۹ (۲)، ۶۳ - ۷۴.



## مقدمه

فرض می‌کنیم  $G$  یک گراف همبند ساده با مجموعه رئوس  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$  و مجموعه یال‌های  $E(G)$  باشد. دو رأس  $u$  و  $v$  از این گراف را مجاور می‌نامیم (با نماد  $u \sim v$ )، هرگاه توسط یک یال از گراف به یکدیگر متصل شده باشند. درجه رأس  $v$  از این گراف با نماد  $\deg(v)$  برابر تعداد یال‌های متصل به آن رأس می‌باشد. ماتریس مجاورت گراف  $G$ ، با نماد  $A = (a_{ij})$ ، ماتریسی مربعی از مرتبه  $n$  است که در آن  $a_{ij} = 1$  با شرط  $v_i \sim v_j$ ، در غیر این صورت  $a_{ij} = 0$ . در سراسر این مقاله از نماد  $\Phi(\lambda) = \det(\lambda I - A(G))$  برای نمایش چندجمله‌ای مشخصه ماتریس مجاورت گراف  $G$  استفاده خواهیم کرد. ماتریس لاپلاسی گراف  $G$ ، با نماد  $L(G) = (l_{ij})$  نیز یک ماتریس مربعی از مرتبه  $n$  می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$l_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i), & i = j \text{ اگر} \\ -a_{ij}, & i \neq j \text{ اگر.} \end{cases}$$

چندجمله‌ای مشخصه ماتریس لاپلاسی گراف  $G$  را با نماد  $P(G) = \det(\lambda I - L(G))$  نشان خواهیم داد. مجموعه مقادیر ویژه ماتریس مجاورت گراف  $G$  را طیف گراف و مجموعه مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسی را طیف لاپلاسی گراف  $G$  می‌نامیم. از مشهورترین توصیف‌گرهای عددی گراف‌ها (گراف‌های مولکولی) می‌توان به انرژی و شعاع طیفی گراف اشاره کرد. مجموع قدرمطلق مقادیر ویژه ماتریس مجاورت  $G$ ، انرژی گراف نامیده و با نماد  $\varepsilon(G)$  نشان داده می‌شود. همچنین بزرگترین مقدار ویژه این ماتریس را شعاع طیفی  $G$  نامیده و با نماد  $\rho(G)$  نشان می‌دهیم.

یک گراف همبند بدون دور، درخت نامیده می‌شود. اگر یک رأس از گراف به عنوان رأس ریشه‌ای مشخص شده باشد، درخت را ریشه‌دار<sup>۱</sup> می‌نامند. درخت کراگوچواچ به دلیل کاربرد آن در شاخص‌های توپولوژیک گراف‌های مولکولی در سالیان اخیر مورد مطالعه محققین قرار گرفته است [1-3]. در ادامه این درخت معرفی می‌شود.

**تعریف ۱.** فرض می‌کنیم  $P_3$  درخت سه رأسی ریشه‌دار باشد که رأس ریشه‌ای آن یکی از رئوس انتهایی آن است. به‌ازای  $k = 2, 3, 4, \dots$  فرض می‌کنیم  $B_k$  نشان دهنده یک درخت ریشه‌دار باشد که از یکی گرفتن<sup>۲</sup> رئوس ریشه‌ای  $k$  تکرار از درخت  $P_3$  بدست آمده باشد (شکل ۱). آن رأس از  $B_k$  را که از یکی گرفتن رئوس ریشه‌ای درخت‌های  $P_3$  بدست آمده، رأس ریشه‌ای  $B_k$  می‌نامیم.

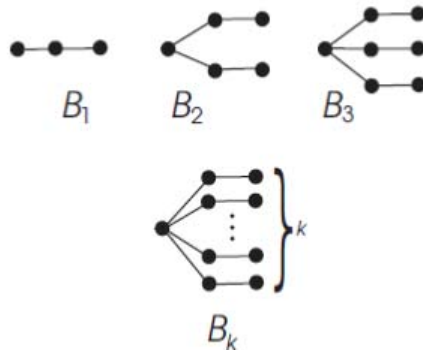
**تعریف ۲.** فرض می‌کنیم  $d \geq 2$  عددی صحیح و  $\beta_d, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d$  درخت‌هایی ریشه‌دار از درخت‌های معرفی شده در تعریف ۱ باشند. یک درخت کراگوچواچ<sup>۳</sup> درختی است شامل یک رأس درجه  $d$  که با هر یک از رئوس ریشه‌ای درخت‌های  $\beta_d, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d$  مجاور شده باشد. این رأس را رأس مرکزی درخت کراگوچواچ می‌نامیم. هر یک از درخت‌های  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d$  نیز یک شاخه از این درخت نامیده می‌شوند. ممکن است برخی از شاخه‌های این درخت یکسان باشند. در صورتی که تمام شاخه‌های درخت کراگوچواچ یکسان باشند، این درخت را درخت کراگوچواچ منتظم می‌نامیم. یک درخت

<sup>1</sup> Rooted tree

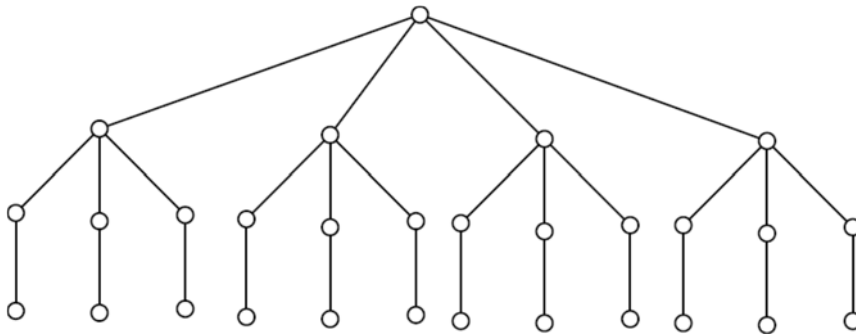
<sup>2</sup> Identifying

<sup>3</sup> Kragujevac tree

کراگوچواچ منتظم را که درجه رأس مرکزی آن برابر  $d$  و هریک از شاخه‌های آن گراف  $B_k$  باشد، با نماد  $T_{k,d}$  نشان می‌دهیم (شکل ۲).



شکل ۱. درخت ساخته شده در تعریف ۱



شکل ۲. درخت کراگوچواچ منتظم  $T_{3,4}$

فرض می‌کنیم  $H$  یک گراف ساده مرتبه  $n$  و  $G = \{G_1, G_2, G_3, \dots, G_n\}$  یک دنباله از گراف‌های ساده ریشه‌دار و به ازای هر  $1 \leq i \leq n$  رأس ریشه‌ای از گراف  $G_i$  باشد. گراف حاصل از یکی در نظر گرفتن رأس ریشه‌ای گراف  $G_i$  با رأس  $i$ -ام گراف  $H$ ، به ازای هر  $1 \leq i \leq n$ ، حاصل ضرب ریشه‌ای<sup>۱</sup> گراف  $H$  توسط دنباله  $G$  نامیده و با نماد  $H(G)$  نشان داده می‌شود. با استفاده از این عملگر می‌توان گراف‌های با ساختار پیچیده‌تر را از گراف‌هایی ساده‌تر ساخت. بنابراین محاسبه برخی مفاهیم نظریه گراف مانند چندجمله‌ای مشخصه و طیف برای گراف‌های پیچیده‌تر را می‌توان با استفاده از آن مفاهیم برای گراف‌های ساده‌تر انجام داد. با استفاده از این روش، مفاهیم مذکور را برای درخت کراگوچواچ منتظم بر حسب اعداد صحیح  $k$  و  $d$  محاسبه خواهیم کرد. ابتدا یک قضیه اساسی در ارتباط با محاسبه چندجمله‌ای مشخصه ماتریس‌های مجاورت و لاپلاسی حاصل ضرب ریشه‌ای گراف‌ها بیان می‌کنیم.

<sup>1</sup> Rooted product

اگر  $G$  یک گراف ریشه‌دار و  $\mathcal{X}$  رأس ریشه‌ای آن باشد، آن‌گاه گراف حاصل از حذف رأس  $\mathcal{X}$  را با نماد  $G'$  نشان می‌دهیم. در صورتی که  $G$  گراف تک رأسی باشد، قرار می‌دهیم  $\Phi_{G'}(\lambda) = 1$ . همچنین اگر  $\bar{L}(G)$  ماتریس حاصل از حذف اولین سطر و اولین ستون از ماتریس لاپلاسی  $G$  باشد، آن‌گاه قرار می‌دهیم:

$$\bar{P}_G(\lambda) = \det(\lambda I - \bar{L}(G)).$$

توجه شود اگر  $G$  گراف تک رأسی باشد، قرار می‌دهیم  $\bar{P}_G(\lambda) = 1$ .

**قضیه ۱.۴** فرض می‌کنیم  $H$  یک گراف ساده مرتبه  $n$ ،  $A(H)$  ماتریس مجاورت  $H$  و  $G = \{G_1, G_2, G_3, \dots, G_n\}$  یک دنباله از گراف‌های ساده ریشه‌دار باشد. در این صورت  $\Phi_{H(G)}(\lambda) = (-1)^n \det(M)$  که ماتریس  $M$  با تعریف زیر مشخص می‌شود:

$$M_{ij} = \begin{cases} -\Phi_{G_i}(\lambda), & \text{اگر } i = j \\ \Phi_{G_i}(\lambda), & \text{اگر } i \neq j, A(H)_{ij} = 1 \\ 0, & \text{اگر } i \neq j, A(H)_{ij} = 0 \end{cases}$$

همچنین  $P_{H(G)}(\lambda) = \det(N)$  که در آن

$$N_{ij} = \begin{cases} P_{G_i}(\lambda), & \text{اگر } i = j \\ \bar{P}_{G_i}(\lambda), & \text{اگر } i \neq j, A(H)_{ij} = 1 \\ 0, & \text{اگر } i \neq j, A(H)_{ij} = 0 \end{cases}$$

## ۱. نتایج اصلی

در این بخش ابتدا درخت کراگوچواچ را با استفاده از حاصل ضرب ریشه‌ای گراف‌های ساده‌تر بیان و در ادامه چندجمله‌ای مشخصه و طیف ماتریس‌های مجاورت و لاپلاسی این درخت را با توجه به قضیه ۱ محاسبه خواهیم کرد.

اگر  $G = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$  یک دنباله  $k$ -تایی شامل مسیرهایی از مرتبه ۲ (شامل دو رأس و یک یال) و  $S_{k+1}$  گراف ستاره مرتبه  $k+1$  باشد، در این صورت گراف  $B_k$  را که در تعریف ۱ معرفی شد، می‌توان با استفاده از حاصل ضرب ریشه‌ای  $S_{k+1}$  توسط دنباله  $G$  به صورت زیر ساخت:

$$B_k = S_{k+1}(P_1, P_2, P_2, \dots, P_2).$$

لازم به ذکر است که در تساوی بالا گراف تک رأسی  $P_1$  به دلیل این که در ساخت  $B_k$  رأس مرکزی  $S_{k+1}$  تغییری نمی‌کند در نظر گرفته شده است.

**لم ۱.** اگر  $\mathcal{X}$  و  $\mathcal{Y}$  دو متغیر دلخواه باشند، آن‌گاه فرمولی صریح برای محاسبه دترمینان ماتریس مربعی مرتبه  $n+1$  زیر بدست می‌آید:

$$\begin{vmatrix} x & -1 & \dots & -1 \\ -1 & y & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & y \end{vmatrix} = y^{n-1}(xy - n).$$

اثبات. با استفاده از استقراء روی عدد طبیعی  $n$  به آسانی قابل استنتاج است.

نتیجه ۱. چندجمله‌ای مشخصه ماتریس‌های مجاورت و لاپلاسی گراف  $B_k$  با فرمول‌های صریح زیر محاسبه می‌شوند:

$$\Phi_{B_k}(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - k - 1)(\lambda^2 - 1)^{k-1},$$

$$P_{B_k}(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - (k+3)\lambda + 2k + 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 1)^{k-1}.$$

اثبات. می‌دانیم  $\Phi_{P_2}(\lambda) = \lambda^2 - 1$  و  $\Phi_{P_1}(\lambda) = \lambda$ . با توجه به این که  $\Phi_{P_2'}(\lambda) = \lambda$  و  $\Phi_{P_1'}(\lambda) = 1$  و  $B_k = S_{k+1}(P_1, P_2, P_2, \dots, P_2)$  با جای‌گذاری این دو چندجمله‌ای در ماتریس معرفی شده در قضیه ۱، سپس استفاده از لم ۱ داریم:

$$\begin{aligned} \Phi_{B_k}(\lambda) &= (-1)^{k+1} \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \lambda & -\lambda^2 + 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & -\lambda^2 + 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda & 0 & 0 & \dots & -\lambda^2 + 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda^2 + 1 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^k \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & (\lambda^2 - 1)/\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & (\lambda^2 - 1)/\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & (\lambda^2 - 1)/\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & (\lambda^2 - 1)/\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^k \left( \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda} \right)^{k-1} \left( \lambda \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda} - k \right) = \lambda(\lambda^2 - 1)^{k-1}(\lambda^2 - k - 1). \end{aligned}$$

از طرفی درجه رأس وسط در مسیرهای آویخته گراف  $B_k$  برابر ۲ می‌باشد در حالی که درجه این رئوس در  $P_2$  برابر ۱ است، بنابراین لازم است که در محاسبه  $P_{B_k}(\lambda)$  عبارت  $\lambda^2 - 3\lambda + 1$  به جای  $P_{P_2}(\lambda)$  و عبارت  $\lambda - 1$  به جای  $\overline{P}_{P_2}(\lambda)$  جای‌گذاری شوند. چون  $\overline{P}_{P_1}(\lambda) = 1$  با استفاده از قضیه ۱ و لم ۱ داریم:

$$P_{B_k}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - k & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \lambda - 1 & \lambda^2 - 3\lambda + 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \lambda - 1 & 0 & \lambda^2 - 3\lambda + 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda - 1 & 0 & 0 & \dots & \lambda^2 - 3\lambda + 1 & 0 \\ \lambda - 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^2 - 3\lambda + 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 1)^k \begin{vmatrix} \lambda - k & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & \frac{\lambda^2 - 3\lambda + 1}{\lambda - 1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{\lambda^2 - 3\lambda + 1}{\lambda - 1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \frac{\lambda^2 - 3\lambda + 1}{\lambda - 1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda^2 - 3\lambda + 1}{\lambda - 1} \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 1)^k \left( \frac{\lambda^2 - 3\lambda + 1}{\lambda - 1} \right)^{k-1} \left( (\lambda - k) \frac{\lambda^2 - 3\lambda + 1}{\lambda - 1} - k \right)$$

$$= \lambda(\lambda^2 - (k + 3)\lambda + 2k + 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 1)^{k-1}.$$

بنابراین اثبات کامل می‌شود.

در ادامه با استفاده از نتیجه ۱ و حاصل ضرب ریشه‌های گراف‌ها، چندجمله‌ای مشخصه ماتریس‌های مجاورت و لاپلاسی درخت کراگوچواچ منتظم را محاسبه خواهیم کرد.

**قضیه ۲.** فرض می‌کنیم  $n$  و  $d \geq 2$  اعدادی صحیح مثبت باشند. در این صورت چندجمله‌ای مشخصه ماتریس‌های مجاورت و لاپلاسی درخت کراگوچواچ منتظم  $T_{k,d}$  به ترتیب زیر محاسبه می‌شود:

$$\Phi_{T_{k,d}}(\lambda) = (\lambda^2 - 1)^{(k-1)d} [\lambda(\lambda^2 - k - 1)]^{d-1} (\lambda^4 - (k + d + 1)\lambda^2 + d),$$

$$P_{T_{k,d}}(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 1)^{d(k-1)} (\lambda^3 - (k + 4)\lambda^2 + (2k + 4)\lambda - 1)^{d-1}$$

$$(\lambda^3 - (k + d + 4)\lambda^2 + (kd + 2k + 3d + 4)\lambda - 2kd - d - 1).$$

**اثبات.** اگر  $B_k$  یکی از شاخه‌های درخت  $T_{k,d}$  و  $S_{d+1}$  گراف ستاره مرتبه  $d + 1$  باشد، آن‌گاه

$$T_{k,d} = S_{d+1}(P_1, B_k, B_k, \dots, B_k).$$

بنابراین با استفاده از قضیه ۱ داریم:

$$\Phi_{T_{k,d}}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -\Phi_{B'_k}(\lambda) & \Phi_{B_k}(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\Phi_{B'_k}(\lambda) & 0 & \Phi_{B_k}(\lambda) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\Phi_{B'_k}(\lambda) & 0 & 0 & \dots & \Phi_{B_k}(\lambda) & 0 \\ -\Phi_{B'_k}(\lambda) & 0 & 0 & \dots & 0 & \Phi_{B_k}(\lambda) \end{vmatrix}$$



$$\begin{aligned}
&= \left( \Phi_{B'_k}(\lambda) \right)^d \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & \frac{\Phi_{B_k}(\lambda)}{\Phi_{B'_k}(\lambda)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{\Phi_{B_k}(\lambda)}{\Phi_{B'_k}(\lambda)} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & \frac{\Phi_{B_k}(\lambda)}{\Phi_{B'_k}(\lambda)} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\Phi_{B_k}(\lambda)}{\Phi_{B'_k}(\lambda)} \end{vmatrix} \\
&= \left( \Phi_{B'_k}(\lambda) \right)^d \left( \frac{\Phi_{B_k}(\lambda)}{\Phi_{B'_k}(\lambda)} \right)^{d-1} \left( \lambda \frac{\Phi_{B_k}(\lambda)}{\Phi_{B'_k}(\lambda)} - d \right). \tag{1}
\end{aligned}$$

نظر به این که  $B'_k$  شامل  $k$  تکرار از مسیر مرتبه ۲ می‌باشد،  $\Phi_{B'_k}(\lambda) = (\lambda^2 - 1)^k$ . با جای‌گذاری مقدار  $\Phi_{B'_k}(\lambda)$  و مقدار  $\Phi_{B_k}(\lambda)$  که در نتیجه ۱ حاصل شد، در فرمول (1) داریم:

$$\Phi_{T_{k,d}}(\lambda) = (\lambda^2 - 1)^{(k-1)d} [\lambda(\lambda^2 - k - 1)]^{d-1} (\lambda^4 - (k + d + 1)\lambda^2 + d).$$

برای محاسبه چندجمله‌ای مشخصه ماتریس لاپلاسی  $T_{k,d}$ ، توجه می‌کنیم  $T_{k,d} = S_{d+1}(P_1, B_k, B_k, \dots, B_k)$  بنابراین

با استفاده از قضیه ۱ داریم:

$$\begin{aligned}
P_{T_{k,d}}(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - d & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \overline{P}_{B_k}(\lambda) & P_{B_k}(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \overline{P}_{B_k}(\lambda) & 0 & P_{B_k}(\lambda) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overline{P}_{B_k}(\lambda) & 0 & 0 & 0 & P_{B_k}(\lambda) & 0 \\ \overline{P}_{B_k}(\lambda) & 0 & 0 & \dots & 0 & P_{B_k}(\lambda) \end{vmatrix} \\
&= \left( \overline{P}_{B_k}(\lambda) \right)^d \begin{vmatrix} \lambda - d & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & \frac{P_{B_k}(\lambda)}{\overline{P}_{B_k}(\lambda)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{P_{B_k}(\lambda)}{\overline{P}_{B_k}(\lambda)} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \frac{P_{B_k}(\lambda)}{\overline{P}_{B_k}(\lambda)} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{P_{B_k}(\lambda)}{\overline{P}_{B_k}(\lambda)} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \left( \bar{P}_{B_k}(\lambda) \right)^d \left( \frac{P_{B_k}(\lambda)}{\bar{P}_{B_k}(\lambda)} \right)^{d-1} \left( (\lambda - d) \frac{P_{B_k}(\lambda)}{\bar{P}_{B_k}(\lambda)} - d \right). \quad (2)$$

از طرفی در ماتریس لاپلاسی  $T_{k,d}$  درجه رأس مرکزی  $B_k$  برابر  $k + 1$  است. بنابراین در ادامه محاسبات لازم است که چندجمله‌ای مشخصه ماتریس لاپلاسی  $B_k$  که در نتیجه ۱ حاصل شد، به گونه‌ای اصلاح شود که در آن به جای  $k$  عدد  $k + 1$  جای‌گذاری شود. در این صورت داریم:

$$P_{B_k}(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 1)^{k-1}(\lambda^3 - (k+4)\lambda^2 + (2k+4)\lambda - 1),$$

$$\bar{P}_{B_k}(\lambda) = (\lambda^2 - 3\lambda + 1)^k.$$

با جای‌گذاری روابط بالا در رابطه (2)، داریم:

$$P_{T_{k,d}}(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 1)^{d(k-1)}(\lambda^3 - (k+4)\lambda^2 + (2k+4)\lambda - 1)^{d-1}$$

$$(\lambda^3 - (k+d+4)\lambda^2 + (kd+2k+3d+4)\lambda - 2kd - d - 1).$$

بنابراین اثبات کامل می‌شود. ■

## ۲. چند کاربرد از نتایج اصلی

در این بخش با استفاده از نتایج بدست آمده در بخش قبل ابتدا کرانی بالا برای شعاع طیفی و انرژی ماتریس مجاورت درخت‌های کراگوجواچ که بزرگترین درجه رئوس (به غیر از رأس مرکزی) آنها  $\Delta$  باشد محاسبه کرده، سپس شاخص کیرشهوف درخت کراگوجواچ منتظم که با استفاده از ضرایب چندجمله‌ای مشخصه ماتریس لاپلاسی آن قابل محاسبه است را بدست خواهیم آورد.

**نتیجه ۲.** فرض می‌کنیم بیشترین درجه رئوس غیر مرکزی درخت کراگوجواچ برابر  $\Delta$  و  $\rho$  شعاع طیفی آن باشد. در این صورت

$$\rho \leq \sqrt{\frac{\Delta + d + 1 + \sqrt{(\Delta + d + 1)^2 - 4d}}{2}}.$$

**اثبات.** اگر بیشترین درجه رئوس (به غیر از رأس مرکزی) یک درخت کراگوجواچ برابر  $\Delta$  باشد، با توجه به قضیه در هم بافنده<sup>۱</sup> شعاع طیفی آن از شعاع طیفی  $T_{\Delta,d}$  کمتر است. از طرفی با استفاده از قضیه ۲، بزرگترین مقدار ویژه ماتریس مجاورت  $T_{\Delta,d}$  برابر بزرگترین ریشه‌ی معادله زیر است:

$$\lambda^4 - (\Delta + d + 1)\lambda^2 + d = 0.$$

<sup>1</sup> Interlacing theorem

در نتیجه بزرگترین مقدار ویژه ماتریس مجاورت  $T_{\Delta,d}$  برابر مقدار  $\sqrt{\frac{\Delta+d+1+\sqrt{(\Delta+d+1)^2-4d}}{2}}$  است. بنابراین اثبات کامل می‌شود. ■

**قضیه ۳ [5].** اگر  $e$  یک یال دلخواه از درخت  $T$  باشد و  $T - e$  درخت حاصل از حذف یال  $e$  از  $T$  باشد، آن‌گاه

$$\varepsilon(T - e) < \varepsilon(T).$$

**نتیجه ۳.** فرض می‌کنیم بیشترین درجه رئوس (به غیر از رأس مرکزی) درخت کراگوچواچ  $T$  برابر  $\Delta$  و درجه رأس مرکزی آن برابر  $d$  باشد. در این صورت داریم:

$$E(T) \leq \sqrt{2\Delta + 2d + 2 + 2\sqrt{(\Delta + d + 1)^2 - 4\Delta}} + \sqrt{2\Delta + 2d + 2 + 2\sqrt{(\Delta + d + 1)^2 - 4\Delta + 2d(\Delta - 1) + 2(d - 1)\sqrt{\Delta - 1}}}.$$

**اثبات.** با استفاده از قضیه ۲، طیف ماتریس مجاورت درخت منتظم  $T_{\Delta,d}$  شامل  $\pm 1$  با تعداد تکرار  $d(\Delta - 1)$ ،  $\pm\sqrt{\Delta - 1}$  با تعداد تکرار  $d - 1$  و اعداد حقیقی  $\pm\sqrt{\frac{\Delta+d+1\pm\sqrt{(\Delta+d+1)^2-4d}}{2}}$  است. نتیجه با استفاده از قضیه ۴ ثابت می‌شود. ■

از کاربردهای چندجمله‌ای مشخصه یک گراف می‌توان به محاسبه شاخص‌های توپولوژیک آن گراف اشاره کرد. به عنوان مثال با استفاده از ضرایب چندجمله‌ای مشخصه ماتریس لاپلاسی یک گراف همبند می‌توان شاخص کیرشهوف آن گراف که یکی از شاخص‌های توپولوژیک پرکاربرد در گراف‌های مولکولی می‌باشد را محاسبه کرد. در ادامه به عنوان کاربردی دیگر از قضیه ۲، شاخص کیرشهوف درخت کراگوچواچ منتظم را محاسبه می‌کنیم.

**قضیه ۴ [6].** اگر  $G$  یک گراف همبند مرتبه  $n \geq 2$  و  $P_G(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda$  چندجمله‌ای مشخصه ماتریس لاپلاسی آن باشد، آن‌گاه شاخص کیرشهوف  $G$  با فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$Kf(G) = \frac{-na_{n-2}}{a_{n-1}}.$$

**نتیجه ۴.** شاخص کیرشهوف درخت کراگوچواچ منتظم از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$Kf(T_{k,d}) = -d^2(10k^2 + 7k + 1) - 4d(k^2 + k).$$

**اثبات.** اگر  $n = 2kd + d + 1$  تعداد رئوس گراف باشد، آن‌گاه با استفاده از قضیه ۲، در چند جمله‌ای مشخصه ماتریس لاپلاسی  $T_{k,d}$  داریم:

$$\begin{aligned}
 a_{n-1} &= (-1)^d n, \\
 a_{n-2} &= (-1)^d (-3d(k-1)n - n(2k+4)(d-1) - kd - 2k - 3d - 4) \\
 &= (-1)^d d^2(10k^2 + 7k + 1) - 4d(k^2 + k).
 \end{aligned}$$

■

بنابراین اثبات با استفاده از قضیه ۴ کامل می‌شود.

## References

1. S. A. Hosseini, M. B. Ahmadi and I. Gutman, Kragujevac Trees with Minimal Atom-Bond Connectivity Index, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **71** (2014), 5-20.
2. R. Cruz, I. Gutman and J. Rada, Topological indices of Kragujevac trees, *Proyecciones Journal of Mathematics*, **33** (2014), 471-482.
3. H. Lin, On the Wiener Index of Trees with Given Number of Branching Vertices, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **72** (2014), 310-314.
4. A. Heydari and B. Taeri, On the characteristic polynomial of a special class of graphs and spectra of balanced trees, *Lin. Algebra. Appl.* **429** (2008), 1744-1757.
5. I. Gutman, X. Li and J. Zhang, in, *Graph Energy*, ed. by M. Dehmer, F. Emmert-Streib. *Analysis of Complex Networks. From Biology to Linguistics* (Wiley-VCH, Wein-heim) 2009.
6. X. Gao, Y. Luo and W. Liu, Kirchhoff index in line, subdivision and total graphs of a regular graph, *Discrete Appl. Math.* **160** (2012), 560-565.