Mathematical Researches
Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554
Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Eternal $m-$ secure subdivision numbers in Graphs

Maryam Atapour[1]

1. Department of Mathematics, Faculty of basic sciences University of Bonab, Bonab, Iran.

E-mail: maryam.atapour@gmail.com

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received:
12 November 2019
Revised form:
3 August 2020
Accepted:
5 August 2020
Published online:
14 May 2022

Keywords:
eternal m-secure set;
eternal m-security number;
eternal m- security subdivision number.

ABSTRACT

Introduction

Let $G = (V, E)$ be a simple graph with vertex set V and edge set E. A set $S \subseteq V$ is a dominating set if every vertex in $V - S$ is adjacent to at least one vertex in S. The domination number of G, denoted by $\gamma(G)$, is the minimum size of a dominating set in G. An eternal 1-secure set of a graph G is defined as a dominating set S_0 such that for any positive integer k and any sequence $v_1, v_2, \dots, v_k$ of vertices, there exists a sequence of guards $u_1, u_2, \dots, u_k$ with $u_i \in S_{i-1}$ and either $u_i = v_i$ or $u_i v_i \in E$ and $S_i = (S_{i-1} - \{u_i\}) \cup \{v_i\}$ is a dominating set. If we take a guard on every vertex in an eternal 1-secure set, then for any sequence of attacks to vertices of the graph only by moving one guard during one of the edges adjacent with the vertex, the result set still remains secure. Now let for every sequence of attacks to vertices, all guards could move during one of the edges adjacent with the vertex and the result set still remains secure. This set is called eternal m- secure set. The eternal m-security number $\sigma_m(G)$ is defined as the minimum number of an eternal m- secure set in G. Obviously, any eternal m- secure set of G is a dominating set of G. So we have $\gamma(G) \leq \sigma_m(G)$.

An edge $uv \in E(G)$ is subdivided if the edge uv is deleted and a new vertex x is added, along with two new edges ux and vx. The eternal m- security subdivision number $sd_{\sigma_m}(G)$ of a graph G is the minimum cardinality of a set of edges that must be subdivided (where each edge in G can be subdivided at

most once) in order to increase the eternal m- security number of G to increase the eternal m- security number of G.

Material and methods

In this paper, we first, prove that if there is a cycle or a path of length 3 in G, then $sd_{\sigma_m}(G) \leq 3$. Then we prove our main result using these results.

Results and discussion

We prove that $sd_{\sigma_m}(G) \leq 3$ for any connected nontrivial graph G, in our main Theorem.

Conclusion

In this paper we prove that $sd_{\sigma_m}(G) \leq 3$ for any connected nontrivial graph G which implies that $sd_{\sigma_m}(G) \leq 3$ for any nontrivial graph G. However, it is well known that the domination subdivision number of graphs can be arbitrary large.

How to cite: Atapour, M.; (2022). Eternal m- secure subdivision numbers in Graphs. *Mathematical Researches*, 8 (1), 235-242

 Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۸۸-۲۵۴٦
شاپا الکترونیکی: ۲۵۸۸-۲۵۵٤

پژوهش‌های ریاضی

دانشگاه خوارزمی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

عدد زیرتقسیم $m-$ امن دایم در گراف‌ها

مریم عطاپور[۱] ✉

۱. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی، دانشکدهٔ علوم پایه، دانشگاه بناب، بناب، ایران. پست الکترونیکی: maryam.atapour@gmail.com

اطلاعات مقاله | **چکیده**

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۲/۱۸
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۷/۱۹
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۹/۰۳
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۲/۲۴

واژه‌های کلیدی:
عدد احاطه‌ای - مجموعه -m امن دایم،
زیرتقسیم یک یال،
عدد زیرتقسیم احاطه‌ای،
عدد زیرتقسیم -m امن دایم.

فرض کنید $G=(V,E)$ گرافی با مجموعهٔ رئوس V و مجموعهٔ یال‌های E باشد. مجموعهٔ $S\subseteq V$ را یک مجموعهٔ احاطه‌گر در G نامند هرگاه هر رأس از $V-S$ با حداقل یک رأس از S مجاور باشد. مجموعهٔ احاطه‌گر S_0 از گراف G را یک مجموعهٔ ۱- امن دایم گویند هرگاه به ازای هر عدد صحیح مثبت k و هر دنباله $v_1,\dots,v_k$ از رئوس، دنباله‌ای مانند $u_1,\dots,u_k$ با شرط $u_i\in S_{i-1}$ موجود باشد که یا $u_i=v_i$ یا $u_iv_i\in E$ و $S_i=(S_{i-1}-\{u_i\})\cup\{v_i\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر باشد. اگر روی هر یک از رئوس یک مجموعهٔ ۱- امن دایم در G یک محافظ قرار دهیم، آن‌گاه به ازای هر دنباله از حملات به رئوس، با حرکت یک محافظ در امتداد یکی از یال‌های مجاور آن، مجموعهٔ حاصل، باز هم امن باقی می‌ماند. اگر به ازای هر دنباله از حملات به رئوس G، تمام محافظان بتوانند در امتداد یکی از یال‌های مجاور حرکت کنند و مجموعهٔ حاصل باز هم امن بماند، آن‌گاه این مجموعه را یک مجموعهٔ $m-$ امن دایم نامند. کمترین تعداد اعضای یک مجموعهٔ $m-$ امن دایم را عدد $m-$ امن دایم G نامیده و با $\sigma_m(G)$ نشان می‌دهند.

زیرتقسیم یال $e=uv$ از G عبارت است از حذف e و افزودن رأس جدید w و یالهای uw و wv. عدد زیرتقسیم $m-$ امن دایم G، $sd_{\sigma_m}(G)$، عبارت است از کمترین تعداد یال‌هایی از G که با زیرتقسیم آنها عدد $m-$ امن دایم گراف افزایش می‌یابد. در این مقاله نشان می‌دهیم که عدد زیرتقسیم $m-$ امن دایم در هر گراف حداکثر ۳ است.

استناد: عطاپور، مریم؛ (۱۴۰۱). عدد زیرتقسیم -m امن دایم در گراف‌ها. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۱)، ۲۴۲-۲۳۵.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱.مقدمه

گراف $G=(V,E)$ یک ساختار ریاضی متشکل از دو مجموعهٔ V و E است که در آن V مجموعه‌ای از نقاط و E مجموعه‌ای از دوتایی‌های نامرتب روی V است. اعضای V را **رأس** و اعضای E را **یال** می‌نامند. تعداد رئوس و تعداد یال‌های یک گراف را به ترتیب مرتبه و اندازهٔ آن می‌نامند. اگر $e=uv$ یالی از G باشد، آن‌گاه u و v را دو رأس مجاور می‌نامیم. همسایگی باز رأس v از G، $N_{G(v)}$، عبارت است از مجموعه تمام رأس‌هایی از G که با v مجاورند، به عبارت دیگر،$\{N_G(v)=\{u\in V(G)|\ uv\in E(G)$. همسایگی بسته رأس v عبارت است از$N_G[v]=N_G(v)\cup\{v\}$. فرض کنید $S\subseteq V(G)$. همسایگی‌های باز و بسته S به ترتیب عبارتند از $N_G(S)=\bigcup_{v\in S}N_G(v)$ و $N_G[S]=N_G(S)\cup S$. درجه رأس v برابر است با $|N_G(v)|$ که با $\deg_G(v)$ یا $\deg(v)$ نشان داده می‌شود. کوچکترین و بزرگترین درجهٔ گراف G را به ترتیب با $\delta(G)$ و $\Delta(G)$ نشان می‌دهند.

یالی را که دو انتهای آن بر هم منطبق باشند، طوقه می‌نامند. گراف ساده گرافی است که طوقه و یال تکراری نداشته باشد. در سراسر این بحث، منظور از گراف $G=(V,E)$ یک گراف ساده با مجموعه رئوس V و مجموعه یال‌های E است.

یک مسیر به طول n در G عبارت است از دنباله‌ای از رئوس متمایز به صورت$v_0v_1\dots v_n$ که در آن به ازای هر $1\leq i\leq n$، رئوس v_i و v_{i-1} باهم مجاورند. یک دور به طول n در G عبارت است از مسیری به طول n که ابتدا و انتهای آن بر هم منطبق هستند. گراف همبند گرافی است که بین هر دو رأس متمایز آن مسیری وجود دارد. گراف همبند بدون دور را درخت می‌نامند. فاصلهٔ دو رأس u و v که با $d(u,v)$ نشان داده می شود، برابر است با طول کوتاهترین مسیر بین u و v. قطر گراف همبند G که با $diam(G)$ نشان داده می شود برابر است با $diam(G)=\min\{d(u,v): u,v\in V\}$. گراف کامل از مرتبه n را با K_n نشان می دهیم. چون در گراف کامل هر زوج رأس متمایز باهم مجاورند، لذا $diam(K_n)=1$.

زیرتقسیم یال $e=uv$ از G عبارت است از حذف یال e و افزودن رأس جدید w و یال های جدید uw و wv.

زیرمجموعهٔ S از رئوس را یک مجموعهٔ احاطه‌گر در G نامند هرگاه هر رأس از $V-S$ با حداقل یک رأس از S مجاور باشد. کمترین تعداد اعضای یک مجموعهٔ احاطه‌گر در G را عدد احاطه‌ای G نامیده و با $\gamma(G)$ نشان می‌دهند. عدد زیرتقسیم احاطه‌ای G، $sd_\gamma(G)$، عبارت است از کمترین تعدادیال‌هایی از G که با زیرتقسیم آنها عدد احاطه‌ای گراف حاصل افزایش می‌یابد (توجه می‌کنیم که هر یال حداکثر یک بار می‌تواند زیرتقسیم شود). این مفهوم نخستین بار توسط ولامل[۱]معرفی و مورد مطالعه قرار گرفت [۸].

یک مجموعهٔ احاطه گر در گراف G به عنوان یک مجموعه امن نیز در نظر گرفته می‌شود. به عنوان مثال، دوربین‌های امنیتی یک موزه که هر مکان آن را رصد می‌کنند و یا دسته‌ای از سربازان که بر سر تقاطع‌ها نگهبانی می‌دهند. دوربین‌ها

[۱] Velamel

در محل خود ثابت هستند و تا آخر ثابت باقی می‌مانند ولی سربازان برای دفع یک حمله به حرکت نیاز دارند. هر چند بعد از دفع حمله ممکن است بعضی از جایگاه‌ها بدون محافظ رها شوند.

مفهوم مجموعه‌های احاطه‌گر امن را اچمانک[۲] در سال ۱۹۹۶ مطرح کرد [۷] و بعد از او کوکین[۳] و همکارانش در سال ۲۰۰۳ این مفهوم را روی گراف‌ها بررسی کردند [۴].

یک نظریهٔ تعمیم یافته‌تر این است که سیستم بتواند از پس دنباله‌ای از حمله‌ها برآید، این نظریه ابتدا توسط برگر[۴] مورد مطالعه قرار گرفت [۳]. یک مجموعهٔ امن در یک گراف را در واقع یک جایگذاری از محافظان در رئوس آن تعریف می‌کنیم که بتواند به هر دنباله‌ای از حملات پاسخ دهد. توجه می‌کنیم که در هر حمله فقط یک رأس مورد حمله قرار می‌گیرد. مجموعهٔ احاطه‌گر S_0 از گراف G را یک مجموعهٔ ۱- امن دایم در G گویند هرگاه به ازای هر عدد صحیح مثبت k و هر دنباله $v_1, \dots, v_k$ از رئوس G، دنباله‌ای از رئوس مانند $u_1, \dots, u_k$ با شرط $u_i \in S_{i-1}$ چنان موجود باشد که $u_i = v_i$ یا $u_i v_i \in E$ و $S_i = (S_{i-1} - \{u_i\}) \cup \{v_i\}$ یک مجموعهٔ احاطه گر باشد. اگر روی هریک از رئوس یک مجموعهٔ ۱- امن دایم در G یک محافظ قرار دهیم، آن‌گاه به ازای هر دنباله‌ای از حملات به رئوس G، با حرکت تنها یک محافظ در امتداد یکی از یال‌های مجاور با آن، مجموعهٔ حاصل باز هم امن باقی می‌ماند.

حال فرض کنید به ازای هر دنباله‌ای از حملات به رئوس G، تمام محافظان بتوانند در امتداد یکی از یال‌های مجاور حرکت کنند و مجموعهٔ حاصل باز هم امن بماند. این مجموعه را یک مجموعه $m-$ امن دایم می‌نامند. کمترین تعداد اعضای یک مجموعهٔ $m-$ امن دایم را عدد $m-$ امن دایم گراف G نامیده و با $\sigma_m(G)$ نشان می‌دهند. این مفهوم توسط قدارد[۵] و همکارانش در سال ۲۰۰۵ معرفی شده است [۵]. یک مجموعهٔ $m-$ امن دایم در G از اندازه $\sigma_m(G)$ را یک $\sigma_m(G)-$ مجموعه می‌نامیم.

عدد زیرتقسیم $m-$ امن دایم گراف G، $sd_{\sigma_m}(G)$، عبارت است از کمترین تعداد یال‌هایی از G که با زیرتقسیم آنها عدد $m-$ امن دایم گراف افزایش می‌یابد. عطاپور در [۱] این مفهوم را معرفی و ثابت کرد که این پارامتر در درخت‌ها حداکثر ۲ است. همچنین تمام درخت‌هایی را که عدد زیرتقسیم $m-$ امن دایم آنها برابر ۲ است، دسته‌بندی کرد. در این مقاله نشان می‌دهیم که عدد زیرتقسیم امن دایم در هر گراف حداکثر ۳ است. برای آشنایی بیشتر با تعاریف و نمادهای اولیه در نظریه گراف که در این‌جا تعریف نشده‌اند، خواننده را به [باندی]، [فوندا] و [وست] ارجاع می‌دهیم.

نتایج زیر در اثبات قضیه اصلی این مقاله مفید خواهند بود.

گزارهٔ ۱ [۵]. به ازای هر $n \geq 2$، $\sigma_m(K_n) = 1$.

گزارهٔ ۲ [۵] . در هر گراف G،

$$\sigma_m(G) \geq \frac{diam(G)+1}{2}.$$

---

۲ Ochmanek
۳ Cockayne
۴ Burger
۵ Goddard

نتیجهٔ زیر، از گزاره‌های ۱ و ۲ حاصل می‌شود.

نتیجهٔ ۳. به ازای هر $n \geq 2$، $sd_{\sigma_m}(K_n) = 1$.

قضیهٔ ۴ [۱]. در هر درخت T از مرتبهٔ $n \geq 2$، $sd_{\sigma_m}(T) \leq 2$.

۲.نتایج اصلی

برای اثبات نتیجهٔ اصلی در این بخش، ابتدا لم‌های زیر را ثابت می‌کنیم.

لم ۵. اگر گراف G دوری از طول ۳ داشته باشد، آن‌گاه $sd_{\sigma_m}(G) \leq 3$.

برهان: فرض کنید $C: (v_1, v_2, v_3)$ یک دور در G بوده و G' از G با زیرتقسیم یال‌های v_1v_2، v_2v_3 و v_3v_1 به ترتیب توسط رئوس x_1، x_2 و x_3 حاصل شود. فرض کنید S یک $\sigma_m(G')-$ مجموعه باشد که شامل x_1 است (همواره چنین مجموعه‌ای موجود است. می‌توان یک حمله به x_1 را در نظر گرفت). حالت‌های زیر را بررسی می‌کنیم:

حالت ۱. $x_2, x_3 \notin S$. در این صورت قرار دهید

$$S' = S - \{x_1\}.$$

حالت ۲. $x_2 \in S$ و $x_3 \notin S$ (حالت $x_3 \in S$ و $x_2 \notin S$ مشابه است). اگر $v_1, v_2, v_3 \in S$، آن‌گاه قرار دهید $S' = S - \{x_1, x_2\}$. اگر $v_1, v_2 \in S$ و $v_3 \notin S$، آنگاه قرار دهید

$$S' = (S - \{x_1, x_2\}) \cup \{v_3\}.$$

اگر $v_1, v_3 \in S$ و $v_2 \notin S$، آنگاه قرار دهید

$$S' = (S - \{x_1, x_2\}) \cup \{v_2\}.$$

اگر $v_1 \in S$ و $v_2, v_3 \notin S$ (حالت $v_3 \in S$ و $v_1,\ v_2 \notin S$ مشابه است)، آن‌گاه قرار دهید

$$S' = (S - \{x_1, x_2\}) \cup \{v_2\}.$$

حالت ۳. $x_2, x_3 \in S$. اگر $v_1, v_2 \notin S$ یا $v_1, v_2, v_3 \notin S$ ، آن‌گاه قرار دهید

$$S' = (S - \{x_1, x_2, x_3\}) \cup \{ v_1, v_2\}.$$

اگر $v_1, v_3 \notin S$ ، آن‌گاه قرار دهید

$$S' = (S - \{x_1, x_2, x_3\}) \cup \{ v_1, v_3\}.$$

اگر $v_2, v_3 \notin S$ ، آن‌گاه قرار دهید

$$S' = (S - \{x_1, x_2, x_3\}) \cup \{ v_2, v_3\}.$$

اگر $v_1, v_2, v_3 \in S$ ، آن‌گاه قرار دهید

$$S' = (S - \{x_1, x_2, x_3\}) \cup \{x, y\}$$

که در آن $x, y \in N(\{ v_1, v_2, v_3\}) - S$.

در هر حالت، به آسانی می‌توان بررسی کرد که S' یک مجموعهٔ $m-$امن دایم در G از اندازهٔ $|S|-1$ است. بنابراین $\sigma_m(G) \leq |S|-1$ و لذا

$$\sigma_m(G') = |S| > |S|-1 \geq \sigma_m(G).$$

در نتیجه $sd_{\sigma_m}(G) \leq 3$.

لم ۶. اگر گراف G مسیری از طول ۳ داشته باشد، آن‌گاه $sd_{\sigma_m}(G) \leq 3$.

برهان: فرض کنید فرض کنید $p: v_1, v_2, v_3, v_4$ یک مسیر در G باشد. اگر $v_1 = v_4$، آن‌گاه حکم از لم ۵ حاصل می شود. فرض کنید $v_1 \neq v_4$ و G' از G با زیرتقسیم یال‌های v_1v_2، v_2v_3 و v_3v_4 به ترتیب توسط رئوس x_1، x_2 و x_3 حاصل شود. نشان می‌دهیم $\sigma_m(G') > \sigma_m(G)$. فرض کنید S یک $\sigma_m(G')-$مجموعه باشد که شامل x_1 است. حالت‌های زیر را بررسی می‌کنیم.

حالت ۱. $|S \cap \{x_1, x_2, x_3\}| = 3$. اگر $v_2, v_3 \notin S$، آن‌گاه قرار دهید

$$S' = (S - \{x_1, x_2, x_3\}) \cup \{v_2, v_3\}.$$

اگر $v_3 \in S$ و $v_2 \notin S$ یا $v_2 \in S$ و $v_3 \notin S$، آنگاه به ترتیب قرار دهید $S' = (S - \{x_1, x_2\}) \cup \{v_2\}$ یا $S' = (S - \{x_1, x_2\}) \cup \{v_3\}$. اگر $v_2, v_3 \in S$ و $v_1 \notin S$ یا $v_4 \notin S$، آن‌گاه قرار دهید

$$S' = (S - \{x_1, x_2\}) \cup \{v_2, v_4\}.$$

حالت ۲. $|S \cap \{x_1, x_2, x_3\}| = 2$. ابتدا فرض کنید $x_1, x_2 \in S$. اگر $v_2 \notin S$، آنگاه قرار دهید

$$S' = (S - \{x_1, x_2\}) \cup \{v_2\}.$$

اگر $v_2 \in S$، آنگاه قرار دهید $S' = (S - \{x_1, x_2\}) \cup \{w\}$ که در آن $w \in |N_G[v_2] - S$. حال فرض کنید $x_1, x_3 \in S$. در این صورت برای احاطه شدن x_2 باید داشته باشیم $|S \cap \{v_2, v_3\}| \geq 1$. اگر $v_2, v_3 \in S$، آن‌گاه قرار دهید $S' = (S - \{x_1, x_2\}) \cup \{w\}$ که در آن $w \in (N_G(v_2) \cup N_G(v_3)) - S$. اگر $v_3 \in S$ و $v_2 \notin S$ یا $v_2 \in S$ و $v_3 \notin S$، آن‌گاه به ترتیب قرار دهید

$$S' = (S - \{x_1, x_3\}) \cup \{v_3\} \text{ یا } S' = (S - \{x_1, x_3\}) \cup \{v_2\}.$$

حالت ۳. $|S \cap \{x_1, x_2, x_3\}| = 1$. در این صورت $x_2, x_3 \notin S$. برای احاطه شدن x_2 و x_3 باید داشته باشیم $|S \cap \{v_2, v_3, v_4\}| \geq 1$. ابتدا فرض کنید $v_3 \notin S$. در این صورت $v_2, v_4 \in S$. یک حمله به v_3 را در نظر بگیرید. فرض کنید S_1 یک پاسخ به این حمله باشد. قرار دهید $S' = S_1 - \{x_1\}$. حال فرض کنید $v_3 \in S$. اگر $v_2, v_4 \in S$، آن‌گاه قرار دهید $S' = S - \{x_1\}$. اگر $v_2 \in S$ و $v_4 \notin S$، یک حمله به x_3 را در نظر بگیرید. فرض کنید S_1 یک پاسخ به این حمله باشد. قرار دهید $S' = (S_1 - \{x_1, x_3\}) \cup \{v_4\}$. اگر $v_4 \in S$ و $v_2 \notin S$، یک حمله به x_2 را در نظر بگیرید. فرض کنید S_1 یک پاسخ به این حمله باشد. قرار دهید

$$S' = (S_1 - \{x_1, x_2\}) \cup \{v_2\}.$$

در هر حالت، به آسانی می‌توان بررسی کرد که S' یک مجموعهٔ $m-$امن دایم در G از اندازهٔ $|S|-1$ است. بنابراین $\sigma_m(G) \leq |S|-1$ و لذا

$$\sigma_m(G') = |S| > |S| - 1 \geq \sigma_m(G).$$

در نتیجه $sd_{\sigma_m}(G) \leq 3$.

قضیهٔ ۷: در هر گراف همبند G، $sd_{\sigma_m}(G) \leq 3$.

برهان: اگر $diam(G) = 1$، آن‌گاه G یک گراف کامل است و حکم از نتیجهٔ ۳ حاصل می شود. فرض کنید $diam(G) \geq 2$. اگر G دارای دوری از طول ۳ یا مسیری از طول ۳ باشد، آن‌گاه حکم از لم های ۵ یا ۶ حاصل می‌شود. فرض کنید G دوری از طول ۳ و مسیری از طول ۳ نداشته باشد. در این صورت G هیچ دوری ندارد و لذا درخت است و حکم از قضیهٔ ۴ حاصل می شود و این برهان را کامل می‌کند.

References

1. Atapour M., "Eternal m-security subdivision numbers in trees", Communications in Combinatorics and Optimization, 4 No. 1 (2019) 25-33.

2. Bondy J. A., Murty U. S. R., "Graph theory with applications", North Holland (1976).

3. Burger A.P., Cockayne E.J., Grundlingh W.R., Mynhardt C.M., van Vuuren J.H., Winterbach W., "Finite order domination in graphs", J. Combin. Math. Combin. Comput., **49** (2004) 159–175.

4. Cockayne E. J., Favaron O., Mynhardt C. M., "Secure domination, weak Roman domination and forbidden subgraphs", Bull. Inst. Combin. Appl., **39** (2003) 87–100.

5. Goddard W., Hedetniemi S. M., Hedetniemi S. T., "Eternal Security in graphs", J. Combin. Math. Combin. Comput. **52** (2005) 160–180.

6. Haynes T.W., Hedetnimi S.T., Slater P.J., "Fundamentals of domination in graphs”, Marcel Dekker, Inc. New York, 1998.

7. Ochmanek D., "Time to restructure U. S. defense forces", ISSUES in Science and Technology (1996).

8. Velammal S., "Studies in graph theory: covering, independence, domination and related topics", Ph.D. thesis, Manonmaniam Sundaranar University, Tirunelveli (1997).

9. West D. B., "Introduction to graph theory". Prentice Hall Inc., Upper Saddle River, NJ, (2001) 2nd ed.